# Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 12.2.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [8b] Pro $k > 0$ nalezněte v prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ řešení rovnice

$$\Delta^2 u + k^4 u = \delta\,.$$

Dvojitý Laplaceův operátor je definován takto: $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$.

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 18 na straně 90 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“

Srovnejte s třetím příkladem písemky z 29.1.2007. Tento je podobný, možná o chloupek jednodušší. Kdo si přepočítává předchozí písemky (a zejména se poučí, jak se substitucí zbavovat nepříjemných konstant typu $4\pi^2|\xi|^2$), neměl by zde mít problém.

Řešení tohoto příkladu se dá vlastně vzít jako copy-and-paste zmíněného příkladu, a provést drobné opravy: standardně Fourierovou transformací podle proměnné $x$ dostaneme

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi|\xi|)^4 + k^4}\,.$$

Inverzní Fourierova transformace je díky sférické symetrii rovna dopředné transformaci, a protože jsme ve třech dimenzích, lze použít vzorec pro F.T. radiálně symetrické funkce:

$$u(x) = u(|x|) = \frac{2}{|x|}\int_0^\infty \frac{r\sin(2\pi r|x|)}{(2\pi r)^4 + k^4}\,dr = \frac{1}{|x|}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{re^{2\pi i r|x|}}{(2\pi r)^4 + k^4}\,dr\,.$$

Nezapomínejte na sudé rozšíření integrálu a tudíž ztrátu dvojky v čitateli zlomku před integrálem. Dále se dost z vás (opět) vrhlo v této chvíli hned na reziduovou větu, což není chyba, ale je to trošku pracné. Tvar jmenovatele integrálu vybízí k substituování a tím k jeho zjednodušení, například substituce $2\pi r = kz$ dá

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2 k^2|x|}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{ikz|x|}}{z^4+1}\,dz\,,$$

což se počítá mnohem líp. Spočíst správně kořeny jmenovatele je zde ještě jednodušší než ve zmiňovaném příkladu z 29. ledna (srovnejte). Zde jsou 4 kořeny

$$z_{1,2,3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Při použití reziduové věty se uplatní jen kořeny v horní polorovině, což jsou

$$z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

a protože jde o jednoduché kořeny, dosazují se při výpočtu tyto kořeny do výrazu (který vznikne z výrazu za integračním znamením)

$$\frac{ze^{ikz|x|}}{4z^3} = \frac{e^{ikz|x|}}{4z^2}\,,$$

z vlastností kořenů ovšem plyne, že $z_1^2 = i$, $z_2^2 = -i$. Když se to celé dá dohromady, dostane se

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2k^2|x|}\,\mathrm{Im}\,2\pi i\left(\frac{e^{ik|x|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4i} - \frac{e^{ik|x|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4i}\right) = \ldots = \frac{1}{4\pi k^2|x|}\sin\frac{\sqrt{2}k|x|}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}k|x|}{2}}\,.$$

---

2. [10b] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-k|x|}$, $k > 0$, kde $x \in \mathbb{R}^2$. Pozor, jsme v prostoru dimenze 2.
(Návod: Použijte vzorce pro transformaci takovýchto symetrických funkcí, a poté integrální vyjádření jedné speciální funkce, která se v něm vyskytuje.)

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 30b na straně 33 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V." Napovězený postup (použití sféricky symetrického vzorce v $\mathbb{R}^2$ a dosazení integrálního vyjádření nulté Besselovy funkce) vede postupně k integrálu

$$I := \widehat{e^{-k|x|}}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-kr} J_0(2\pi r|\xi|)\, dr = \int_0^\infty r e^{-kr} \int_0^{2\pi} e^{2\pi r i|\xi| \sin t}\, dt\, dr\,.$$

Prohození integračního pořadí (tj. Fubiniho věta - určitě byste uměli odůvodnit její použití ☺) dá

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-kr} e^{2\pi r i|\xi| \sin t}\, dr\, dt = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{\alpha r}\, dr\, dt\,,$$

kde $\alpha = -k + 2\pi i|\xi| \sin t$. Důležité je zejména, že $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, což umožní vnitřní integrál spočítat metodou per partes:

$$\int_0^\infty r e^{\alpha r}\, dr = \left[\frac{1}{\alpha} r e^{\alpha r}\right]_0^\infty - \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{\alpha r}\, dr = 0 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha r}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{(2\pi i|\xi| \sin t - k)^2}\,,$$

a tedy hledaný integrál jsme upravili na tvar

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\pi i|\xi| \sin t - k)^2}\,.$$

Kdo dopočítal až sem, obdržel polovinu bodů, tj. 5 z 10. Zbytek je totiž trochu technický a opírá se o znalost z minulého semestru, totiž, že víte, jak se pomocí reziduové věty spočítá integrál z racionální funkce v sinech a kosinech přes celou periodu. Připomenu, že se za sinus dosadí $\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$, za $dt$ se vezme $\frac{dz}{iz}$ a počítá se $2\pi i$-krát součet všech reziduí z takto vzniklého výrazu v bodech $|z| < 1$ (jen uvnitř jednotkové kružnice!). To po úpravě dá (proveďte podrobně)

$$I = \frac{2}{\pi|\xi|^2} \sum_{|z|<1} \mathrm{Res}\, \frac{z}{(z^2 - \frac{k}{\pi|\xi|} z - 1)^2}\,. \tag{1}$$

Použujeme-li například pro zjednodušení označení $\beta := \frac{k}{\pi|\xi|}$, vyjdou kořeny jmenovatele

$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4}\Big)\,, \qquad z_2 = \frac{1}{2}\Big(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}\Big)\,.$$

Uvnitř jednotkového kruhu leží jen $z_1$, a je to dvojnásobný kořen, počítáme tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\,z=z_1} \frac{z}{\big((z - z_1)(z - z_2)\big)^2} &= \left(\frac{z}{(z - z_2)^2}\right)'\Bigg|_{z=z_1} = \frac{(z_1 - z_2)^2 - 2z_1(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_2)^4} = \\
&= \frac{(z_1 - z_2) - 2z_1}{(z_1 - z_2)^3} = -\frac{z_1 + z_2}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2 + 4)^3}} = \frac{k\pi^2|\xi|^2}{\sqrt{(k^2 + 4\pi^2|\xi|^2)^3}}\,,
\end{aligned}$$

a tedy po přenásobení koeficientem $\frac{2}{\pi|\xi|^2}$ (viz (1)) dostaneme:

$$\widehat{e^{-k|x|}}(\xi) = \frac{2\pi k}{\sqrt{(k^2 + 4\pi^2|\xi|^2)^3}}\,.$$

3. [12b] Uvažujte omezené řešení $u$ rovnice $\Delta u = 0$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, splňující podmínku $u = g$ na hranici $\Omega$, kde

$$\Omega := \{[x,y]\,;\ x>0\,,\, y>0\,,\, x^2+y^2>a^2\,\}\,, \quad \text{pro } a>0\,,$$

a funkce $g$ je definovaná takto:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{na } x^2+y^2=a^2\,,\ x>0\,, y>0\,, \\ 0 & \text{na zbytku hranice.} \end{cases}$$

Nalezněte hodnoty tohoto řešení na množině $\{[x,y]\in\Omega\,,\ x=y\}$.

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 22 na straně 155 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V." Je zlehčen tím, že řešení se nepočítá všude, ale jen na ose prvního kvadrantu.

Nejprve zobrazením $z^2$ zobrazíme zadanou oblast na horní polorovinu bez půlkruhu o poloměru $a^2$ a středu 0, což je jak dělané na Žukovského zobrazení $\frac{1}{2}(z+a^4/z)$. Celkové zobrazení je tedy[1]

$$f(z) = \frac{1}{2}\Big(z^2 + \frac{a^4}{z^2}\Big)\,.$$

Počáteční podmínka se přenese na charakteristickou funkci intervalu $(-a^2,a^2)$, a explicitní výpočet v horní polorovině dá řešení

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\xi+a^2}{\eta}\Big) - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\xi-a^2}{\eta}\Big)$$

(spočtěte si podrobně).

Vyjádření proměnných $\xi$ a $\eta$ pomocí $x$ a $y$ vychází ze vztahu

$$\frac{1}{2}\Big((x+iy)^2 + \frac{a^4}{(x+iy)^2}\Big) = f(x+iy) = \xi + i\eta\,,$$

což pro $x=y$ dává po úpravě

$$2ix^2 + \frac{a^4}{2ix^2} = 2(\xi+i\eta) \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 0\,, \quad \eta = x^2 - \frac{a^4}{4x^2}\,,$$

a tedy

$$u(x,x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{a^2}{x^2-\frac{a^4}{4x^2}}\right) - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-a^2}{x^2-\frac{a^4}{4x^2}}\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4x^2a^2}{4x^4-a^4}$$

na zadané množině.

[1] Ve skriptech se příklad řeší pomocí lineárního lomeného zobrazení - porovnejte.