Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 5.2.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [8b] Najděte **inverzní** Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}^{-1}F$ funkce

$$F(p) = \frac{p^3}{p^4 + a^4} + \frac{p^2}{p^2 + a^2}\,, \quad a > 0\,.$$

Komentář k řešení: Jde o příklad 38 na straně 33 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Příklad je ovšem doplněn o člen $\frac{p^2}{p^2+a^2}$, abyste opět museli počítat i v distribucích.

- Pro výpočet $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2}{p^2+a^2}\right)$ je možné použít dvě metody, buď zlomek upravíte tak, aby stupeň čitatele byl menší než stupeň jmenovatele, tj. například

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2}{p^2+a^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{p^2+a^2}\right) = \delta - a^2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\right)\,.$$

  Výraz, který se má invertovat (po přenásobení oním a^2), vyjde $a \sin ax$, což jste buď dohledali v tabulce inverzí pro Laplaceovu transformaci, nebo jste snadno spočetli pomocí reziduové věty.

  Druhá metoda spočívá v použití vzorce pro invertování v distribucích, a sice

$$\mathcal{L}^{-1}F(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\mathcal{S}'} \mathcal{L}^{-1}\frac{F(p)}{p}\,,$$

  pokud výraz $\frac{F(p)}{p}$ je invertovatelný v klasickém smyslu. Což zde je, protože $\frac{F(p)}{p} = \frac{p}{p^2+a^2}$. Tento výraz se invertuje opět buď dohledáním v tabulkách (je to $\cos ax$), nebo součtem přes dvě rezidua (= kořeny jmenovatele). Důležitý krok je zderivování $\cos ax$ ve smyslu distribucí, je třeba si totiž uvědomit, že funkce $\cos ax$ je vlevo od nuly rozšířená nulou, což při derivování ve smyslu distribucí dá Diraca v nule díky skoku v tomto bodě. Výsledek je tedy opět stejný, neboli:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2}{p^2+a^2}\right) = \delta - a\sin at\,.$$

- Invertování $\frac{p^3}{p^4+a^4}$ je příklad na standardní zacházení s reziduovou větou. Trochu práci možná dá výpočet 4 kořenů jmenovatele, ale s použitím komplexní exponenciály je hned vidět, že to jsou $ae^{\pm\frac{\pi i}{4}}$, $ae^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$, tedy: $z_{1,2,3,4} = a\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)$. Sčítáme rezidua v těchto bodech, z výrazu $\frac{p^3 e^{px}}{p^4+a^2}$, a protože jsou všechny kořeny jednoduché, dosazujeme do čitatele a do derivace jmenovatele, která je $4p^3$. Výraz p^3 se tedy krátí a ve finále dosazujeme čtyři kořeny pouze do $\frac{1}{4}e^{px}$, hledaná inverze je tedy

$$\sum_{p=z_{1,2,3,4}} \frac{1}{4}e^{px} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{ax\sqrt{2}}{2}(1+i)} + e^{\frac{ax\sqrt{2}}{2}(1-i)} + e^{\frac{ax\sqrt{2}}{2}(-1+i)} + e^{\frac{ax\sqrt{2}}{2}(-1-i)}\right)\,.$$

  Pokud vytknete reálné části exponenciál, najdete v komplexních exponencielách dva stejné kosiny, které opět můžete vytknout, a zbylé reálné exponenciály dají hyperbolický kosinus. Nemuselo se to nutně upravit až do tohoto tvaru, vlastně už tvar výše napsaný je správné řešení, ale možná není na škodu si všimnout, že jeho nejjednodušší tvar je tedy:

$$\cosh\frac{ax\sqrt{2}}{2}\,\cos\frac{ax\sqrt{2}}{2}\,.$$

  Celkem pak

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^3}{p^4+a^4} + \frac{p^2}{p^2+a^2}\right) = \delta - a\sin at + \cosh\frac{ax\sqrt{2}}{2}\,\cos\frac{ax\sqrt{2}}{2}\,.$$

---

2. [10b] V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ řešte rovnici

$$-y^{(4)} + k^2 y'' = \delta\,, \quad k > 0\,,$$

s podmínkami $y(-x) = y(x)$ pro $x \neq 0$, $y(0) = 0$.

Komentář k řešení: Jde o příklad 7 na straně 89 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Řeší se standardní cestou:

- Vyřešení rovnice s pravou stranou rovnou nule, metodou charakteristického polynomu dá 4 kořeny: $0, 0, \pm k$, a tedy obecné řešení je tvaru $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 e^{-kx} + \alpha_4 e^{kx}$.
- Abychom zůstali v prostoru $\mathcal{S}'$, musí být

$$y_+(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-kx}\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad y_-(x) = d_1 + d_2 x + d_3 e^{kx}\,, \quad x < 0\,.$$

- Podmínky spojitosti nulté, první a druhé derivace v nule, a skoku velikosti (-1) třetí derivace v nule dají čtyři podmínky, sudost funkce dává pátou podmínku, a podmínka $y(0) = 0$ je šestá podmínka pro šest neznámých koeficientů. Jejich řešením dostaneme:

$$c_3 = d_3 = \frac{1}{2k^3}\,, \qquad c_1 = d_1 = -\frac{1}{2k^3}\,, \qquad c_2 = -d_2 = \frac{1}{2k^2}.$$

- Celkově tedy

$$y_+(x) = \frac{x}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}(e^{-kx} - 1)\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad y_-(x) = -\frac{x}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}(e^{-kx} - 1)\,, \quad x < 0\,.$$

  což lze zapsat souhrnně jako

$$y(x) = \frac{|x|}{2k^2} + \frac{1}{2k^3}(e^{-k|x|} - 1)\,.$$

---

3. [12b] Nalezněte omezené řešení u rovnice $\Delta u = 0$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, splňující podmínku $u = g$ na hranici Ω, kde Ω je doplněk uzavřeného kruhu o středu v počátku a poloměru $a > 0$, a funkce g je definovaná takto:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{na polokružnici } x^2 + y^2 = a^2\,,\ y > 0\,, \\ -1 & \text{na polokružnici } x^2 + y^2 = a^2\,,\ y < 0\,. \end{cases}$$

(Návod: zkuste lineární lomené zobrazení.)

Komentář k řešení: Jde o příklad 18 na straně 154 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“

- Z instruktážních důvodů popíšu nalezení transformujícího zobrazení hodně podrobně: Napovězené zobrazení bylo lineární lomené. To převádí kružnice na kružnice nebo přímky. Je tedy jasné, že když převedeme naši kružnici na reálnou osu, bude vnějšek kruhu převeden buď na horní nebo na dolní polorovinu. Reálná osa, na kterou chceme kružnici převést, má dva význačné body, nulu a nekonečno. Převedením například bodu a na nulu a bodu $-a$ na nekonečno plníme část našeho předsevzetí. Takové lineární lomené zobrazení musí být tvaru

$$f(z) = \alpha\frac{z - a}{z + a}$$

  se zatím neznámým koeficientem α. Ten určíme tak, abychom převedli vnějšek kruhu rovnou na horní polorovinu: když budeme cestovat po kružnici z bodu a do bodu $-a$ přes bod ia, budeme mít oblast Ω po pravé ruce. Z toho plyne, že při cestování po přenesené hranici, z bodu 0 (obraz bodu

a) do bodu ∞ (obraz bodu $-a$), musíme jít z bodu 0 „doleva“, abychom měli horní polorovinu také po pravé ruce. Tj. bod ia se musí přenést na nějaké záporné číslo, třeba na -1, což dává

$$\alpha\frac{ia-a}{ia+a} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = i\,,$$

a tedy celkově máme zobrazení

$$f(z) = i\frac{z-a}{z+a}\,.$$

- Protože jsme si právě ujasnili, že horní půlkružnice se převede na zápornou reálnou osu, je obrazem dolní půlkružnice kladná reálná osa, a tedy počáteční podmínka v přenesené oblasti je $-\operatorname{sign} x$, a šení v přenesené oblasti je po dosazení do vzorce snadno spočítatelné jako

$$v(\xi,\eta) = -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\,.$$

- Přepočítání proměnných by nemělo činit problém: $f(x+iy) = \xi + i\eta$ dává

$$i\frac{x+iy-a}{x+iy+a} = \xi + i\eta\,,$$

rozšíření zlomku vlevo číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli umožní snadný výpočet jeho reálné a imaginární části, což dá

$$\xi = -\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2}\,, \qquad \eta = \frac{x^2+y^2-a^2}{(x+a)^2+y^2}\,.$$

Celkově tedy

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\,.$$

A opět: kdo napsal, že díky předpokladu omezenosti řešení je takové řešení právě jedno, dostal bonusový bod navíc ☺.