# Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 22.1.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [6b] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-k|x|}$, $k > 0$, kde $x \in \mathbb{R}^3$.

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 30 a) na straně 33 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“

Funkce je z prostoru $L^1(\mathbb{R}^3)$, sféricky symetrická, tedy se použije vzorec pro Fourierovu transformaci takových funkcí. Vzniklý jednorozměrný integrál se snadno spočte pomocí per partes. Kdo chodil na přednášky, všiml si možná, že se tam tento nepříliš složitý výpočet skoro celý předvedl, kromě toho v „tahácích“ je výsledek. ☺

Výsledek:

$$\widehat{e^{-k|x|}}(\xi) = \frac{8\pi k}{(k^2 + 4\pi^2|\xi|^2)^2} \,.$$

---

2. [12b] Najděte radiální řešení $u(x,t) = v(r,t)$, $r = |x|$, rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \,, \qquad x \in K_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^3 \,, \quad t > 0 \,,$$

(tzv. chladnutí třírozměrné koule), které splňuje

$$v\Big(\frac{1}{2}, t\Big) = 0 \quad \text{pro} \quad t > 0 \,, \qquad v(r,0) = \frac{1}{2} - r \quad \text{pro} \quad r \in \Big\langle 0, \frac{1}{2} \Big\rangle \,.$$

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 17 na straně 262 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“, Ve skriptech je ovšem chyba v jeho řešení, které má vypadat takto:

- Standardně se přepočítá rovnice pro novou funkci $v$ a dostane se

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\Big) = 0 \,.$$

- Zavedením nové funkce $w = r \cdot v$ přejde dále úloha na

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0$$

s podmínkami

$$w\Big(\frac{1}{2}, t\Big) = 0 \quad \text{pro} \quad t > 0 \,, \qquad w(r,0) = r\Big(\frac{1}{2} - r\Big) \quad \text{pro} \quad r \in \Big\langle 0, \frac{1}{2} \Big\rangle \,.$$

Jde tedy o řešení rovnice vedení tepla na omezeném intervalu. Druhá z podmínek se díky $w = r \cdot v$ (a tedy $w$ je nulové v nule, pokud $v$ tam bylo omezené, což předpokládáme) rozšiřuje liše na $\big\langle -\frac{1}{2}, 0 \big\rangle$, tedy na tomto intervalu má hodnotu $r(\frac{1}{2} + r)$, a dále periodicky. Pro tuto počáteční podmínku je nutno spočítat Fourierovu řadu (a zde je ta chyba ve skriptech), která vyjde:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\big((-1)^n - 1\big)}{\pi^3 n^3} \sin 2\pi n r = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(2n-1)r}{(2n-1)^3} \,,$$

a tedy řešení je

$$w(r,t) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(2n-1)r}{(2n-1)^3} e^{-4\pi^2(2n-1)^2 t} \,,$$

tj. pro funkci $u$:

$$u(x,t) = v(r,t) = \frac{2}{r\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(2n-1)r}{(2n-1)^3} e^{-4\pi^2(2n-1)^2 t} \,.$$

---

---

3. [12b] Pro $b > 0$ položme $\Omega := \mathbb{R} \times (0, b) \setminus G$, kde $G = (-\infty, 0\rangle \times \{\frac{b}{2}\}$. Nechť funkce $g(x, 0) = g(x, b) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a dále nechť $g(x, \frac{b}{2}-) = g(x, \frac{b}{2}+) = 1$ pro $x \leq 0$. Nechť konečně $u(x)$ je omezené řešení rovnice

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$u = g \quad \text{na hranici } \Omega\,.$$

Nalezněte hodnoty $u(x, \frac{b}{2})$ pro $x > 0$.
(Návod: začněte zobrazovat exponencielou.)

---

**Komentář k řešení:** Jde o příklad 16 na straně 154 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V." Zobrazení, která oblast převedla na horní polorovinu, byla po řadě tato: $e^{\frac{\pi z}{b}}$ (částečně napovězené – a tím jste se dostali do situace, kterou jsme na přednášce řešili ...), dále $z^2$, $z + 1$, $\sqrt{z}$. Celkové správně složené zobrazení je tedy

$$f(z) = \sqrt{e^{\frac{2\pi z}{b}} + 1}\,.$$

Protože okrajová podmínka se přenesla na charakteristickou funkci intervalu $\langle -1, 1\rangle$, dalo se řešení spočítat (opět postupem z přednášky) jako

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi + 1}{\eta} - \operatorname{arctg}\frac{\xi - 1}{\eta}\right)\,. \tag{1}$$

Řešení nás zajímalo jen pro $x > 0$, $y = \frac{b}{2}$, tedy pro

$$f(x + ib/2) = \sqrt{e^{\frac{2\pi x}{b}} \cdot e^{\pi i} + 1} = \sqrt{1 - e^{\frac{2\pi x}{b}}} = i\sqrt{e^{\frac{2\pi x}{b}} - 1} = i\eta\,,$$

a proto $\xi = 0$. Dosazením těchto dvou hodnot do (1) dostaneme

$$u(x, b/2) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi x}{b}} - 1}}\,, \qquad x > 0\,. \tag{2}$$

Kdo navíc napsal, že řešení je určeno jednoznačně díky slůvku „omezené" v zadání úlohy, mohl získat jeden bonusový bod navíc. ☺

---