Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 15.1.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [9b] V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nalezněte řešení rovnice

$$-y''' + k^2 y' = \delta\,, \quad k > 0\,,$$

které splňuje $y(-x) = -y(x)$ pro $x \neq 0$.

Komentář k řešení:
Jde o příklad 6 na straně 89 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V." Řeší se standardní cestou:

- Vyřešení rovnice s pravou stranou rovnou nule, metodou charakteristického polynomu dá řešení tvaru $c_1 + c_2 e^{-kx} + c_3 e^{kx}$
- Abychom zůstali v prostoru $\mathcal{S}'$, musí být

$$y_+(x) = a + be^{-kx}\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad y_-(x) = c + de^{kx}\,, \quad x < 0\,.$$

- Podmínky spojitosti nulté a první derivace v nule, a skoku velikosti (-1) druhé derivace v nule dají tři podmínky, lichost funkce dává čtvrtou podmínku, jejichž řešením dostaneme:

$$a = d = \frac{1}{2k^2}\,, \qquad b = c = -\frac{1}{2k^2}\,.$$

- Celkově tedy

$$y_+(x) = \frac{1}{2k^2}(1 - e^{-kx})\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad y_-(x) = -\frac{1}{2k^2}(1 - e^{kx})\,, \quad x < 0\,.$$

  což lze zapsat souhrnně jako

$$y(x) = \frac{1}{2k^2}\,\mathrm{sign}\,x(1 - e^{-k|x|})\,.$$

---

2. [10b] Najděte **inverzní** Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}^{-1}F$ funkce

$$F(p) = 1 + \frac{ab}{p^2\,(p^2+a^2)\,(p^2+b^2)} + \frac{p^3}{(p+1)^2}\,, \quad b > a > 0\,.$$

Komentář k řešení: Jde o příklad 39 na straně 33 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.", který je zlehčen tím, že je ve skriptech uvedený zlomek upraven, a ztížen přidáním členu $\frac{p^3}{(p+1)^2}$, abych se podíval, jak derivujete ve smyslu distribucí. ☺
Onen přidaný člen se invertuje takto: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^3}{(p+1)^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{\mathcal{S}'}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}\right)$, kde inverze

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}\right) = \mathrm{Res}_{p=-1}\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} = (pe^{pt})'\big|_{p=-1} = e^{-t} - te^{-t}$$

je standardní reziduový výpočet. Důležité je si uvědomit, že výsledná funkce je vlevo od nuly rozšířená nulou a tedy při derivování ve smyslu distribucí dá člen e^{-t} Diraca v nule díky svému skoku v tomto bodě, zatímco te^{-t} je v nule spojité a žádný Dirac nevznikne. Tedy je (čárka budiž derivací ve smyslu distribucí)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^3}{(p+1)^2}\right) = (e^{-t} - te^{-t})'' = (\delta - e^{-t} - e^{-t} + te^{-t})' = \delta' - 2\delta + 3e^{-t} - te^{-t}\,,$$

a tedy celý výsledek (pro první část se podívejte do skript) je:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)](t) = \delta' - \delta + e^{-t}(3-t) + \frac{t}{ab} + \frac{ab}{b^2-a^2}\left(\frac{\sin bt}{b^3} - \frac{\sin at}{a^3}\right)\,.$$

---

3. [11b] Pro $a > 0$ položme $G := K_a(0) \cup (\{0\} \times (-\infty, -a\rangle)$, tj. G je kruh se středem v počátku a s poloměrem a, sjednocený se zápornou imaginární osou. Dále buď $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$, tj. doplněk uzávěru množiny G. Nechť funkce $g(x) = 1$ na hranici kružnice $K_a(0)$ a $g(x) = 0$ na zbytku hranice oblasti Ω. Nechť konečně $u(x)$ je omezené řešení rovnice

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$u = g \quad \text{na hranici } \Omega\,.$$

Nalezněte hodnoty $u(0, y)$ pro $y > a$.
(Návod: začněte konformním zobrazením $f(z) = iz$.)

Komentář k řešení: Jde o příklad 21 na straně 155 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Zobrazení iz otočí oblast o 90 stupňů proti směru hodinových ručiček, poté zobrazení $\sqrt{z}$ oblast „rozevře“, takže vznikne „Žukovovatelný“ ☺ profil, a konečně zobrazení $\frac{1}{2}(z + a/z)$ vše zobrazí na horní polorovinu. Problém často činí správné složení těchto zobrazeni. Pravidlo je, že to zobrazení, které aplikujete jako první, musí být ve vašem složeném zobrazení „nejhlouběji“. Tedy celkově je správné konformní zobrazení

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{iz} + \frac{a}{\sqrt{iz}}\right)\,.$$

Dále standardně: počáteční podmínka se přenese jako charakteristická funkce intervalu $\langle -\sqrt{a}, \sqrt{a}\rangle$, což dá po dosazení do vzorce řešení na horní polorovině

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\xi + \sqrt{a}}{\eta} - \operatorname{arctg}\frac{\xi - \sqrt{a}}{\eta}\right]\,.$$

Pro výpočet řešení v bodech $(0, y)$ potřebujeme hodnoty f jen pro $z = 0 + iy$, což dává

$$f(iy) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-y} + \frac{a}{\sqrt{-y}}\right) = \frac{1}{2}\left(i\sqrt{y} - i\frac{a}{\sqrt{y}}\right) = i\frac{y - a}{2\sqrt{y}} = \xi + i\eta\,,$$

odkud $\xi = 0$, $\eta = \frac{y-a}{2\sqrt{y}}$, a tedy po dosazení a úpravě

$$u(0, y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{ya}}{y - a}\,.$$

Kdo navíc napsal, že řešení je určeno jednoznačně díky slůvku „omezené“ v zadání úlohy, mohl získat jeden bonusový bod navíc. ☺
