Početní část zkoušky | 31.3.2006

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [8b] Pro $p > -1$, $q > -1$ spočtěte integrál

$$F(p,q) = \int_0^1 \sin(\ln x)\, \frac{x^p - x^q}{\ln x}\, dx\,.$$

---

2. [9b] Spočtěte (přímo nebo použitím některé z vhodných vět) plošný integrál

$$\int_S xyz\, dy\, dz + y^2 z\, dx\, dy$$

kde S je „vnějšek“ povrchu útvaru, určeného nerovnostmi $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, $z \leq \frac{x^2}{4} + y^2$, $z \geq 0$.

---

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2} {y'}^2\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

---

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Teoretická část zkoušky

31.3.2006

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

1. **[6b]**
   (a) Definujte tyto pojmy: křivka, jednoduchá křivka, uzavřená křivka, opačná křivka, tečný a normálový vektor ke křivce.
   (b) Definujte tyto pojmy: jednoduchá 2-plocha v $\mathbb{R}^3$, parametrizace plochy, normálový vektor k ploše a jeho vyjádření pomocí parametrizace, orientace plochy parametrizací. Odvoďte, jak vypadá normálový vektor pro plochu zadanou explicitně, tj. předpisem $z = g(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2. **[6b]**
   (a) Formulujte bez důkazu Riemann-Lebesgueovo lemma.
   (b) Formulujte bez důkazu větu o integrování Fourierových řad.

3. **[8b]**
   (a) Formulujte a dokažte Besselovu nerovnost a Parsevalovu rovnost pro OG systém v Hilbertově prostoru.
   (b) Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$, $b_n = \frac{2+n}{n^4}$. Definujme funkci $f(x)$ jako součet Fourierovy řady s těmito koeficienty všude tam, kde je tento součet konečný. Je funkce f spojitá na $\mathbb{R}$? Jste schopni řici něco o derivování uvedené řady člen po členu a souvislosti této zderivované řady s funkcí $f'(x)$, pokud tato existuje? Svá tvrzení odůvodněte tak, že se odvoláte na nějakou větu, kterou zformulujte, ale nemusíte ji dokazovat.