

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

1. [9b] Spočtěte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Návod: spočtěte integrál

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$$

nejprve pro $a \geq 0$, $a \neq 1$, a pak ukažte, že J je spojitá v bodě 1.

2. [8b] Spočtěte integrál

$$\int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

kde křivka γ je elipsa $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, $a > 0$, $h > 0$, orientovaná kladně vůči vektoru $\vec{v} = (h, 0, a)$.

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 5yy'^4 - 3xy'^5 dx,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle), y(0)=3, y(1)=0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

4. [7b] Mějme
- $f(x) = |x|$
- na
- $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$
- ,
- $f(x) = 0$
- na
- $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6} \rangle$
- a
- $\langle \frac{\pi}{6}, \pi \rangle$
- a dále periodicky s periodou
- 2π
- .

- (a) Rozviňte tuto funkci do 2π -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
- (b) Dosazením bodu $x = \frac{\pi}{6}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

1. [6b]

- (a) Definujte potenciál vektorového pole \vec{T} na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$, definujte křivkový integrál 1. a 2. druhu v \mathbb{R}^3 .
- (b) Formulujte a dokažte vztah o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu.

2. [6b]

- (a) Formulujte základní úlohu variačního počtu, tj. jak vypadá funkcionál, jaké jsou vlastnosti L a na jakém prostoru co hledám.
- (b) Formulujte Eulerovu-Lagrangeovu větu o E-L rovnici, bez důkazu.
- (c) Formulujte a vysvětlete (bez důkazu) Jacobiho metodu hledání lokálního minima funkcionálu.

3. [8b]

- (a) Formulujte Riemannovu větu o lokalizaci. Větu nemusíte dokazovat.
 - (b) Formulujte větu o bodové konvergenci Fourierovy řady pro po částech C^1 funkce. Ukažte, jak lze tuto větu dokázat, znáte-li Riemannovu větu o lokalizaci.
-