

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	4.	$\Sigma$

*Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.*

1. [8b] Určete, pro které hodnoty  $a \in \mathbb{R}$  je konečný integrál

$$J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} dx$$

a spočtete jej pro tyto hodnoty.

2. [9b] Spočtete povrch „čočky“, která vznikne jako průnik koule o středu  $[0, 0, 1]$  a poloměru 1 s koulí o středu  $[0, 0, -1]$  a poloměru  $\sqrt{5}$ .

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionalu

$$\Phi(y) := \int_1^3 5yy'^9 - 4xy'^{10} dx,$$

který je definován na prostoru  $X := \{y \in C^1(\langle 1, 3 \rangle), y(1)=1, y(3)=0\}$ . Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionalu?

4. [7b] Mějme  $f(x) = \cos 3x$  na  $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$ ,  $f(x) = 0$  na  $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6} \rangle$  a  $\langle \frac{\pi}{6}, \pi \rangle$  a dále periodicky s periodou  $2\pi$ .

- (a) Rozviňte tuto funkci do  $2\pi$ -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
- (b) Napište Parsevalovu rovnost a výpočtem určitého integrálu v ní sečtete příslušnou číselnou řadu.

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	$\Sigma$

## 1. [6b]

- (a) Definujte po částech  $C^1$  křivku v  $\mathbb{R}^n$  pomocí parametrizace, definujte křivkový integrál 1. a 2. druhu v  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Definujte pojem „křivkový integrál nezávisí na cestě“. Formulujte (přesně), jaký je vztah mezi výroky „křivkový integrál nezávisí na cestě“ a „integrál je nulový přes všechny uzavřené křivky“. Znáte ještě nějaký výrok, který je alespoň z jedním z výše uvedených dvou výroků ekvivalentní? Pokud ano, zformulujte vše pečlivě.

## 2. [6b]

- (a) Formulujte a dokažte Eulerovu-Lagrangeovu větu o E-L rovnici, bez důkazu lemmat, která k tomu potřebujete.
- (b) Formulujte a vysvětlete (bez důkazu) Jacobiho metodu hledání lokálního minima funkcionálu.

## 3. [8b]

- (a) Formulujte a dokažte Besselovu nerovnost a Parsevalovu rovnost (vyberte si, jestli verzi pro sinus a kosinus, nebo abstraktní verzi pro OG systém v Hilbertově prostoru).
- (b) Nechť  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ,  $b_n = \frac{4+n}{n^3}$ . Definujme funkci  $f(x)$  jako součet Fourierovy řady s těmito koeficienty všude tam, kde je tento součet konečný. Je funkce  $f$  spojitá na  $\mathbb{R}$ ? Jste schopni říci něco o derivování uvedené řady člen po členu a souvislosti této zderivované řady s funkcí  $f'(x)$ , pokud tato existuje? Svá tvrzení odůvodněte tak, že se odvoláte na nějakou větu, kterou zformulujete, ale nemusíte ji dokazovat.