Početní část zkoušky $\boxed{6.2.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [7b] Spočtěte

$$J(p,q) = \int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\ln x}\, dx\,, \qquad p > -1\,,\ q > -1\,,\ p+q > -1\,.$$

---

2. [9b] Uvažujte pro $r > 0$ kouli $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ a pro $a > 0$ kužel $K = \{x^2 + y^2 \leq a^2 z^2,\ z \geq 0\}$.

   (a) Spočtěte povrch tělesa $T = B \cap K$, které vznikne jako průnik uvedených dvou těles.

   (b) Určete hodnotu parametru a tak, aby ta část povrchu tělesa T, která je součástí povrchu koule B, byla číselně rovna čtvrtině povrchu celé koule B.

---

3. [7b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_{16}^{81} y' \Big(2xy'^4 - 3y\Big)\, dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 16, 81\rangle), y(16){=}16, y(81){=}54\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

---

4. [7b] Mějme $f(x) = \sin 2x$ na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, 0\rangle$ a $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ a dále periodicky s periodou 2π. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

TEORETICKÁ ČÁST ZKOUŠKY $\boxed{6.2.2006}$

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

---

1. **[6b]**

   (a) Definujte jednoduchou 2-plochu v $\mathbb{R}^3$ pomocí parametrizujícího zobrazení φ, nezapomeňte na vlastnosti tohoto φ. Definujte plošný integrál 1. a 2. druhu pro jednoduchou 2-plochu v $\mathbb{R}^3$.

   (b) Napište bez důkazů, ale se všemi předpoklady: Greenovu větu v $\mathbb{R}^2$, Stokesovu větu v $\mathbb{R}^3$.

---

2. **[7b]**

   (a) Pro jaký speciální tvar Euler-Lagrangeovy rovnice lze tuto rovnici redukovat na tzv. Beltramiho identitu? Zformulujte a dokažte příslušné tvrzení.

   (b) Který z parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ musí být roven nule, aby bylo možno použít Betramiho identitu, je-li funkcionál Φ definován předpisem

$$\Phi(y) := \int_0^1 ax\sqrt{1+y^2} + by\sqrt{1+y'^2} + cy'\sqrt{1+x^2}\, dx\,,$$

   na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle\}$? Sestavte Beltramiho identitu v tomto případě (nemusíte ji řešit).

---

3. **[7b]**

   (a) Formulujte Riemannovu větu o lokalizaci. Větu nemusíte dokazovat.

   (b) Formulujte větu o bodové konvergenci Fourierovy řady pro po částech $\mathcal{C}^1$ funkce. Ukažte, jak lze tuto větu dokázat, znáte-li Riemannovu větu o lokalizaci.
