Řešení početní části zkouškové písemky z 6.2.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [7b] Spočtěte

$$J(p,q) = \int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\ln x}\, dx\,, \qquad p > -1\,,\ q > -1\,,\ p+q > -1\,.$$

Řešení: Naprosto stejný postup jako při minulé písemce (podívejte se): Pro pevné $q > -1$ zderivujeme podle proměnné p, nejprve formálně:[1]

$$\frac{\partial J}{\partial p}(p,q) = \int_0^1 (1-x^q)(-x^p) = \left[-\frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+q+1}\,. \tag{1}$$

Odůvodnění derivování: především je pro pevné $q > -1$ hodnota $J(0,q) = 0$ (tedy integrál konverguje pro jedno pevné $p = 0$), a zderivovaná funkce má pro pevné $q > -1$ integrabilní majorantu[2]

$$\left| x^p(1-x^q) \right| \le x^{p_0}|1-x^q| \quad \forall p \ge p_0 > -1\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková p. Protože však $p_0 > -1$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $p > -1$. Z (1) plyne, že

$$J(p,q) = \ln(p+q+1) - \ln(p+1) + f(q)\,, \tag{2}$$

kde $f(q)$ je libovolná dostatečně hladká funkce. Protože však $0 = J(0,q) = \ln(q+1) + f(q)$ pro každé pevné $q > -1$, máme $f(q) = -\ln(q+1)$, a tedy

$$J(p,q) = \ln(p+q+1) - \ln(p+1) - \ln(q+1) = \ln\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}\,, \qquad p > -1\,,\ q > -1\,,\ p+q > -1\,.$$

---

[1] Překvapením pro mě bylo, že stále ještě se našli jedinci, kteří zapomněli, že derivace x^p **podle** p není px^{p-1}, ale $x^p \ln x$.

[2] Musíme ovšem volit $p_0 < 0$, aby dosazovaná hodnota $p = 0$ ležela uvnitř intervalu, pro který máme majorantu.

2. [9b] Uvažujte pro $r > 0$ kouli $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$ a pro $a > 0$ kužel $K = \{x^2 + y^2 \le a^2 z^2,\ z \ge 0\}$.
   (a) Spočtěte povrch tělesa $T = B \cap K$, které vznikne jako průnik uvedených dvou těles.
   (b) Určete hodnotu parametru a tak, aby ta část povrchu tělesa T, která je součástí povrchu koule B, byla číselně rovna čtvrtině povrchu celé koule B.

Řešení:
(a) Povrch tělesa T sestává ze dvou částí: té, která je částí povrchu koule (označme ji S_2), a té, která leží uvnitř koule (a tedy je částí povrchu kužele, označme ji S_1). Obě části povrchu budeme parametrizovat explicitním předpisem, který bude definován na průmětu P_{xy} tělesa T do roviny xy. Průmět P_{xy} je kruh, jehož poloměr spočteme například takto: průnik povrchů koule a kužele je charakterizován splněním jak rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ tak rovnice $x^2 + y^2 = a^2 z^2$, tedy

$$r^2 - z^2 = a^2 z^2 \qquad \Rightarrow \qquad z^2(1 + a^2) = r^2 \qquad \overset{z \ge 0}{\Longrightarrow} \qquad z = \frac{r}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Z Pythagorovy věty (kreslete si obrázek) je pak poloměr P_{xy} roven $\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{1+a^2}} = \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}}$, tedy jsou povrchy S_1 a S_2 rovny

$$S_1 := \int_{S_1} dS = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{r^2a^2}{1+a^2}} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right\| dx\, dy\,, \tag{3}$$

$$S_2 := \int_{S_2} dS = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{r^2a^2}{1+a^2}} \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right\| dx\, dy\,, \tag{4}$$

kde φ_1 resp. φ_2 jsou parametrizace ploch S_1 resp. S_2. Protože S_1 je část hranice kužele a S_2 je část hranice koule, máme

$$\varphi_1 : x = x,\ y = y,\ z = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \varphi_2 : x = x,\ y = y,\ z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,.$$

Odtud přímými výpočty dostaneme

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \left(-\frac{x}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right),$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right),$$

a tedy

$$S_1 = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{r^2a^2}{1+a^2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a(x^2 + y^2)} + 1}\, dx\, dy = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \cdot \underbrace{\pi \cdot \frac{r^2a^2}{1+a^2}}_{\text{obsah kruhu } P_{xy}} = \frac{\pi a r^2}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Konečně

$$S_2 = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{r^2a^2}{1+a^2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{r^2 - x^2 - y^2} + 1}\ dx\, dy = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{r^2a^2}{1+a^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\ dx\, dy\,.$$

Zavedením polárních souřadnic $x = \rho r \cos\alpha$, $x = \rho r \sin\alpha$ dostaneme pak

$$S_2 = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\, d\rho\, d\alpha = 2\pi r^2 \left[-\sqrt{1 - \rho^2} \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \right).$$

Celkový povrch tělesa je tedy roven

$$S = \frac{\pi a r^2}{\sqrt{1 + a^2}} + 2\pi r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \right).$$

(b) Chceme, aby

$$2\pi r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot 4\pi r^2\,.$$

Odtud snadno spočteme $a = \sqrt{3}$.

3. [7b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_{16}^{81} y'\Big(2xy'^4 - 3y\Big)\, dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 16, 81\rangle), y(16){=}16, y(81){=}54\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x, y, y') = y'(2xy'^4 - 3y) = 2xy'^5 - 3yy'$, máme[3] $\frac{\partial L}{\partial y} = -3y'$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 10xy'^4 - 3y$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$(10xy'^4 - 3y)' = -3y'\,.$$

Vlevo není nutno proderivovat, všimneme si pouze členu $-3y'$, který se vyskytuje na obou stranách a který odečteme, načež dostaneme $(10xy'^4)' = 0$ neboli $xy'^4 = c = \text{const}$. Proto

$$y'^4 = cx^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = cx^{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad y = c_1 + c_2 x^{\frac{3}{4}}\,.$$

Okrajové podmínky dají $c_1 + 8c_2 = 16$, $c_1 + 27c_2 = 54$. Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $19c_2 = 38$, tedy $c_2 = 2$, načež $c_1 = 0$ a jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice má tedy tvar

$$y = 2x^{\frac{3}{4}}\,.$$

Toto řešení budeme dále značit $y_0(x)$.

Dodatečné úvahy za bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = 2x^{\frac{3}{4}}$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 40xy_0'^3 = 40\left(\frac{3}{2}\right)^3 x^{-\frac{3}{4}} > 0 \qquad \text{v } \langle 16, 81\rangle\,.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se pak redukuje na

$$P(x)\omega'(x) = c \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 + c_2 x^{\frac{3}{4}}\,.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(16) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (16, 81\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 16, 81\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = 2x^{\frac{3}{4}}$ lokálním minimem funkcionálu Φ.

[3] Srovnejte s písemkou z 16.1.2006, dále je to totiž až na konstanty ona.

4. [7b] Mějme $f(x) = \sin 2x$ na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, 0\rangle$ a $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ a dále periodicky s periodou 2π. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

Řešení: Funkce není ani sudá, ani lichá, budeme tedy hodně integrovat:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\,,$$

a dále

$$\pi a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(n-2)x - \cos(n+2)x\big)\,dx\,.$$

Je vidět, že výpočet bude vypadat jinak pro $n = 2$ a jinak pro $n \neq 2$. Pro $n = 2$ máme

$$\pi a_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \cos 4x\big)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \frac{1}{4}\,,$$

zatímco pro $n \neq 2$ je

$$\begin{aligned}\pi a_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}\Big[\sin(n-2)x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+2}\Big[\sin(n+2)x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin\frac{n\pi}{2}}{n-2} - \frac{-\sin\frac{n\pi}{2}}{n+2}\right) = -\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-4}\,.\end{aligned}$$

Podobně spočítáme, že

$$\pi b_2 = 0 \qquad \text{a pro } n \neq 2 \text{ pak} \quad \pi b_n = -\frac{2(1+\cos\frac{n\pi}{2})}{n^2-4}\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty}\left(\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-4}\right)\sin nx + \left(\frac{2(1+\cos\frac{n\pi}{2})}{n^2-4}\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce je po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.