Početní část zkoušky $\boxed{30.1.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [8b] Spočtěte

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} \, dx\,, \qquad a > -1\,,\ \ b > -1\,.$$

---

2. [7b] Spočtěte (přímo nebo pomocí vhodné věty) plošný integrál

$$\int_S x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy\,,$$

kde S je „vnější“ strana boční stěny komolého kužele $x^2+y^2=z^2$, $0<h<z<2h$.

---

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \Big((2-n)xy'^n + nyy'^{(n-1)} \Big)\, dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0)=3, y(1)=0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru s ohledem na parametr úlohy $n \in \mathbb{N}$. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

---

4. [7b] Mějme $f(x) = |x|(1-|x|)$ na $\langle -1, 1\rangle$ a dále periodicky s periodou 2.
   (a) Rozviňte tuto funkci do 2-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   (b) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Teoretická část zkoušky 30.1.2006

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

1. **[6b]**
   (a) Definujte tyto pojmy: křivka, jednoduchá křivka, uzavřená křivka, opačná křivka, tečný a normálový vektor ke křivce.
   (b) Definujte tyto pojmy: jednoduchá 2-plocha v $\mathbb{R}^3$, parametrizace plochy, normálový vektor k ploše a jeho vyjádření pomocí parametrizace, orientace plochy parametrizací. Odvoďte, jak vypadá normálový vektor pro plochu zadanou explicitně, tj. předpisem $z = g(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2. **[6b]**
   (a) Formulujte Gauss-Ostrogradského větu v $\mathbb{R}^3$.
   (b) Buď dokažte tuto větu, nebo formulujte obecnou Stokesovu větu pro diferenciální formy a odvoďte z ní Gauss-Ostrogradského větu v $\mathbb{R}^3$.

3. **[8b]**
   (a) Definujte abstraktní Fourierovu řadu v Hilbertově prostoru (jak vypadají koeficienty, jak vypadá řada), definujte pojem úplného ortogonálního systému v Hilbertově prostoru.
   (b) Formulujte a dokažte větu o ekvivalenci úplnosti OG systému.