Řešení početní části zkouškové písemky z 30.1.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Spočtěte

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x}\, dx\,, \qquad a > -1\,,\ \ b > -1\,.$$

Řešení: Pro pevné $a > -1$ zderivujeme podle proměnné b, nejprve formálně:[1]

$$\frac{\partial I}{\partial b}(a,b) = \int_0^1 x^b \sin \ln \frac{1}{x}\, dx\,. \tag{1}$$

Po substituci $\ln \frac{1}{x} = -\ln x = y$, tj. $x = e^{-y}$, $dx = -e^{-y}\, dy$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial b}(a,b) &= -\int_\infty^0 e^{-by} \cdot \sin y \cdot e^{-y}\, dy = \int_0^\infty e^{-(b+1)y} \sin y\, dy = \\ &= \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{(i-b-1)y}\, dy = \operatorname{Im} \frac{-1}{i-b-1} = \frac{1}{(b+1)^2+1}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Odůvodnění derivování: především je pro pevné $a > -1$ hodnota $I(a,a) = 0$ (tedy integrál konverguje pro jedno pevné $b = a$), a zderivovaná funkce má integrabilní majorantu

$$\left| e^{-(b+1)y} \sin y \right| \le e^{-(b_0+1)y} \quad \forall b \ge b_0 > -1\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková b. Protože však $b_0 > -1$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $b > -1$. Z (2) plyne, že

$$I(a,b) = \operatorname{arctg}(b+1) + f(a)\,, \tag{3}$$

kde $f(a)$ je libovolná dostatečně hladká funkce. Protože však $I(a,a) = \operatorname{arctg}(a+1) + f(a) = 0$ pro každé pevné $a > -1$, máme $f(a) = -\operatorname{arctg}(a+1)$, a tedy

$$I(a,b) = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1)\,, \qquad a > -1\,,\ \ b > -1\,. \tag{4}$$

---

[1] Doufám, že jste ještě nezapomněli, že derivace x^b **podle b** není bx^{b-1}, ale $x^b \ln x$.

2. [7b] Spočtěte (přímo nebo pomocí vhodné věty) plošný integrál

$$\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy\,,$$

kde S je „vnější“ strana boční stěny komolého kužele $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < h < z < 2h$.

Řešení, možnost I:
Přímo zparametrizujeme boční stěnu (plášť) komolého kužele: zobrazení φ je definováno takto: $x = x, y = y, z = \sqrt{x^2+y^2}$, a to na mezikruží $h^2 \le x^2 + y^2 \le (2h)^2$, které je průmětem pláště komolého kužele do roviny xy. Normálový vektor pak bude

$$\varphi_x \times \varphi_y = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right).$$

Tento normálový vektor však má orientaci „dovnitř“ do kužele (jeho třetí souřadnice je kladná), vezmeme proto vektor opačný, $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$, a tedy[2]

$$\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint_{h^2 \le x^2+y^2 \le (2h)^2} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = 0\,.$$

Řešení, možnost II: Použijeme Gaussovu větu. Podle ní je integrál přes **celý** povrch roven objemovému integrálu z divergence příslušného vektorového pole. Zde $\vec{T} = (x, y, z)$, tedy $\operatorname{div} \vec{T} = 3$, proto je objemový integrál roven trojnásobku objemu komolého kužele, tj. $3 \cdot \frac{1}{3}(\pi(2h)^2 \cdot 2h - \pi h^2 \cdot h) = 7\pi h^3$. To je však výsledek integrace přes celý povrch, proto musíme odečíst hodnoty plošných integrálů přes obě podstavy. To však není složité, postupem jako výše dostaneme, že integrál přes spodní podstavu Γ_1 je roven:[3]

$$\int_{\Gamma_1} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2 \le h^2} (-z)|_{z=h}\,dx\,dy = (-h)\cdot \pi h^2 = -\pi h^3\,,$$

zatímco integrál přes horní podstavu Γ_2 je roven:

$$\int_{\Gamma_2} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2 \le (2h)^2} (+z)|_{z=2h}\,dx\,dy = (2h)\cdot \pi (2h)^2 = 8\pi h^3\,,$$

je tedy integrál přes obě podstavy $7\pi h^3$ a proto musí být

$$\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 0\,.$$

Řešení, možnost III:

[2] Nebo jinak, názorněji: zadaný integrál je tvaru $\int_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$, načež si stačilo všimout, že $\vec{r} \perp d\vec{S}$ vždy na celé integrované ploše. Tudíž se integruje neustále nula a výsledek je taky takový. I tohle se dalo uznat za správný

[3] Příslušné normálové vektory jsou pro Γ_1 vektor $(0, 0, -1)$ a pro Γ_2 vektor $(0, 0, 1)$, pochopitelně.

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left((2-n)xy'^n + nyy'^{(n-1)}\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0) = 3, y(1) = 0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru s ohledem na parametr úlohy $n \in \mathbb{N}$. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = \left((2-n)xy'^n + nyy'^{(n-1)}\right)$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = ny'^{(n-1)}$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = (2-n)nxy'^{(n-1)} + n(n-1)yy'^{(n-2)}$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě máme pro $n = 1$ „rovnici“ $1 = 1$, které vyhovují všechny funkce z prostoru X. Stejně tak pro $n = 2$ dostáváme E-L „rovnici“ $2y' = 2y'$, které rovněž vyhovují všechny funkce z prostoru X. Konečně pro $n \geq 3$ máme po proderivování a úpravě E-L rovnici:

$$y''y'^{(n-3)}\left(y - xy'\right) = 0\,,$$

tedy platí buď $y'' = 0$ nebo $y - xy' = 0$, pro $n > 3$ ještě máme navíc případ $y' = 0$. Řešením tedy jsou buď funkce typu $y = ax + b$ nebo $y = cx$. Počátečním podmínkám vyhovuje jediná funkce, a sice $y = 3(1-x)$. Tedy shrnujeme:

$n = 1$	$\Rightarrow$	E-L rovnici s okrajovými podmníkami vyhovují všechny funkce prostoru X,
$n = 2$	$\Rightarrow$	E-L rovnici s okrajovými podmníkami vyhovují všechny funkce prostoru X,
$n \geq 3$	$\Rightarrow$	$y = 3(1-x)$.

Dodatečná úvaha za 2 bonusové body: Pro $n = 1$ i $n = 2$ vychází pro libovolnou $y \in X$

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y(x), y'(x)) = 0\,,$$

a proto nebudeme umět rozhodnout touto metodou o lokálním extrému.
Pro $n \geq 3$ je pro $y_0(x) = 3(1-x)$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = n(n-1)(n-2)(-1)^{n-3}3^{n-2}\,,$$

a

$$Q(x) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$\omega''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 x + c_2\,.$$

Podmínka $\omega(0) = 0$ říká, že $c_2 = 0$ a tedy $\omega(x) = c_1 x$. Má-li navíc ω nebýt identicky nulová, musí být $c_1 \neq 0$. Pak už ovšem ω nemá žádný nulový bod v $(0,1\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 0,1\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = 3(1-x)$ pro lichá $n \geq 3$ lokálním minimem funkcionálu Φ a pro sudá $n > 3$ lokálním maximem tohoto funkcionálu.

---

4. [7b] Mějme $f(x) = |x|(1 - |x|)$ na $(-1, 1)$ a dále periodicky s periodou 2.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy $b_n = 0$, dále vidíme, že na intervalu $(0,1)$ se rovná funkci $x(1-x) = x - x^2$. Protože perioda $\ell = 2$, je koeficient před integrálem $\frac{2}{\ell} = \frac{2}{2} = 1$, díky sudosti však můžeme také brát dvojnásobek integrálu přes poloviční periodu, tedy:

$$a_0 = 2\int_0^1 x - x^2\,dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

případně s onou dvojkou zacházet takto:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{2} &= \int_0^1 (x - x^2)\cos \pi n x\,dx = \int_0^1 x\cos \pi n x\,dx - \int_0^1 x^2 \cos \pi n x\,dx = \\
&= \left[\frac{1}{\pi n} x \sin \pi n x\right]_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin \pi n x\,dx - \left[\frac{1}{\pi n} x^2 \sin \pi n x\right]_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x \sin \pi n x\,dx = \\
&= \left[\frac{1}{(\pi n)^2}\cos \pi n x\right]_0^1 + \frac{2}{\pi n}\left(\left[-\frac{1}{\pi n} x\cos \pi n x\right]_0^1 + \frac{1}{(\pi n)^2}\left[\sin \pi n x\right]_0^1\right) = \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi^2 n^2}(-1)^n = -\frac{(-1)^n + 1}{\pi^2 n^2},
\end{aligned}$$

tedy

$$a_n = -\frac{2\Big((-1)^n + 1\Big)}{\pi^2 n^2}.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2}\cos \pi n x,$$

a protože zadaná funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $2\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$2\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \frac{1}{18} + \frac{4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n + 1)^2}{n^4},$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Big((-1)^n + 1\Big)^2}{n^4} = \frac{\pi^4}{360}.$$