Řešení početní části zkouškové písemky z 23.1.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Spočtěte

$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\alpha\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,dx\,, \qquad \alpha > -1\,.$$

Řešení: Nejprve formálně zderivujeme podle proměnné α:

$$F'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha\sin^2 x}\,. \tag{1}$$

Odůvodnění derivování: především je $F(0) = 0$ (tedy integrál konverguje pro jedno pevné $\alpha = 0$), a zderivovaná funkce má integrabilní majorantu

$$\left|\frac{1}{1+\alpha\sin^2 x}\right| = \frac{1}{1+\alpha\sin^2 x} \le \frac{1}{1+\alpha_0\sin^2 x} \in L^1\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big) \quad \forall\alpha \ge \alpha_0 > -1\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková α. Protože však $\alpha_0 > -1$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $\alpha > -1$. V integrálu (1) provedeme substituci (integrovaná funkce je sudá v sinech i kosinech) $\operatorname{tg} x = t$, tj. $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$, a dostaneme

$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\Big(1+\frac{\alpha t^2}{1+t^2}\Big)} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2(\alpha+1)} = \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}\operatorname{arctg} t\sqrt{\alpha+1}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha+1}}$$

a tedy

$$F(\alpha) = \pi\sqrt{\alpha+1} + c\,.$$

Protože však $0 = F(0) = \pi + c$, máme $c = -\pi$ a

$$F(\alpha) = \pi(\sqrt{\alpha+1} - 1) \qquad \forall\alpha > -1\,.$$

---

2. [8b] Spočtěte (přímo nebo pomocí vhodné věty) křivkový integrál

$$\int_\gamma (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz\,,$$

kde $\langle\gamma\rangle$ je průnikem povrchu krychle $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$ s rovinou $x+y+z = \frac{3}{2}a$, $a > 0$. Přitom orientace křivky γ „vyhovuje pravidlu pravé ruky" vzhledem k vektoru $(1, 1, 1)$.

Řešení:
Křivkový integrál (2. druhu) je tvaru $\int_\gamma T_1\,dx + T_2\,dy + T_3\,dz = \int_\gamma \vec{T}\,d\vec{\gamma}$, kde tedy $\vec{T} = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$. K výpočtu použijeme Stokesovu větu

$$\int_\gamma \vec{T}\,d\vec{\gamma} = \int_S \operatorname{rot}\vec{T}\,d\vec{S}\,,$$

kde plocha S je v tomto případě pravidelný šestiúhelník, ležící v rovině $x + y + z = \frac{3}{2}a$, jehož obvodem je geometrický obraz křivky γ. Vektor $(1, 1, 1)$ je normálovým vektorem k dané rovině a tedy k ploše S, a podle zadání úlohy je orientován v souladu se zněním Stokesovy věty.
Máme $\operatorname{rot}\vec{T} = (-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y)$ a tedy podle Stokesovy věty

$$\int_\gamma (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = \int_S (-2y - 2z, -2x - 2z, -2x - 2y) \cdot \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}\,dS =$$
$$= \int_S (-4x - 4y - 4z)\frac{1}{\sqrt{3}}\,dS = -\frac{4}{\sqrt{3}}\int_S \underbrace{(x + y + z)}_{=\frac{3}{2}a \text{ na } S}\,dS = -\frac{6a}{\sqrt{3}}\int_S 1\,dS\,.$$

Integrál, který zbývá spočítat, nevyjadřuje nic jiného než obsah pravidelného šestiúhelníka, jímž plocha S je. Jistě je možno jej spočítat i vhodnou parametrizací, je však také možné si středoškolsky zařádit, a vzpomenout si, že obsah rovnostranného trojúhelníka o straně h je $\frac{h\sqrt{h^2-(h/2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2$, a obsah pravidelného šestiúhelníka o hraně h je pak šestinásobkem tohoto čísla, tj. $\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$. Zbývá si uvědomit, že hrana našeho šestiúhelníka například spojuje středy sousedních stran podstavy krychle $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$, tedy $h = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Plocha šestiúhelníka pak vyjde $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2}$, a tedy

$$\int_\gamma (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = -\frac{6a}{\sqrt{3}}\int_S 1\,dS = -\frac{6a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = -\frac{9}{2}a^3\,.$$

Nevyšlo by to nakonec tou vhodnou parametrizací rychleji? :-) Zkuste si to.

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2}{y'}^2\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = 2xy + \frac{1+x^2}{2}{y'}^2$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 2x$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = (1+x^2)y'$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$((1+x^2)y')' = 2x\,.$$

Proderivování vlevo by situaci podstatně zkomplikovalo, lépe je integrovat a obdržet postupně

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' &= x^2 + c\,,\\ y' &= \frac{x^2+c}{1+x^2} = 1 + \frac{c-1}{1+x^2}\,,\\ y &= x + (c-1)\operatorname{arctg} x + d\,.\end{aligned}$$

Z podmínky $y(0) = 0$ ovšem plyne $d = 0$, načež z podmínky $y(1) = 1$ plyne $c = 1$. Dostaneme tak jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na prostoru X:

$$y = x\,.$$

Dodatečná úvaha za 2 bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = (1+x^2) > 0 \qquad \text{v } \langle 0,1\rangle\,.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$(1+x^2)\omega'(x) = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x + c_2\,.$$

Podmínka $\omega(0) = 0$ říká, že $c_2 = 0$ a tedy $\omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x$. Má-li navíc ω nebýt identicky nulová, musí být $c_1 \neq 0$. Pak už ovšem ω nemá žádný nulový bod v $(0,1\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 0,1\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x$ lokálním minimem funkcionálu Φ.

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$.

1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
2. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.
3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá a na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ se rovná funkci $\cos \frac{x}{2}$. Proto

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2}\, dx = \frac{2}{\pi} \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}\,,$$

a (v první rovnosti využijeme $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + \cos x\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\, dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{2n+1} \sin x\Big(n + \frac{1}{2}\Big) + \frac{2}{2n-1} \sin x\Big(n - \frac{1}{2}\Big) \right]_0^\pi = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{2n+1} \underbrace{\sin \pi\Big(n + \tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{2n-1} \underbrace{\sin \pi\Big(n - \tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^{n+1}} \right) = \\
&= \frac{2}{\pi}(-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{(-2)}{4n^2-1} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Dosazení bodu $x = \pi$ dává

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} (-1)^n\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$