Řešení početní části zkouškové písemky z 16.1.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [7b] Spočtěte

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx\,, \qquad \alpha,\beta > 0\,.$$

Řešení, varianta I: Pro pevné $\beta > 0$ formálně zderivujeme podle proměnné α:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}\cdot(-x^2)}{x}\, dx = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\, dx \overset{[\alpha x^2 = y]}{=} -\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-y}\, dy = -\frac{1}{2\alpha}\,. \tag{1}$$

Odůvodnění derivování: pro pevné $\beta > 0$ je $I(\beta,\beta) = 0$ (tedy integrál konverguje pro jedno pevné $\alpha = \beta$), a derivovaná funkce má integrabilní majorantu

$$|xe^{-\alpha x^2}| \le xe^{-\alpha_0 x^2} \in L^1(0,\infty)\,, \quad \forall \alpha \ge \alpha_0 > 0\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková α. Protože však $\alpha_0 > 0$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $\alpha > 0$. Přeintegrováním (1) podle α dostaneme

$$I(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + f(\beta)\,,$$

protože však $0 = I(\beta,\beta) = -\frac{1}{2}\ln\beta + f(\beta)$, máme $f(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$, a tedy:

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta - \frac{1}{2}\ln\alpha = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} = \ln\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha,\beta > 0\,.$$

Řešení, varianta II: Možná někdo nemá příliš rád hledání integrabilních majorant :-). V tomto příkladě existoval postup, jak se tomuto vyhnout, pokud jste si všimli, že

$$e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2} = \Big[e^{-tx^2}\Big]_{t=\beta}^{t=\alpha} = \int_\beta^\alpha \frac{d}{dt}\left(e^{-tx^2}\right) dt = \int_\beta^\alpha (-x^2 e^{-tx^2})\, dt\,,$$

a tedy

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx = \int_0^\infty \int_\beta^\alpha (-xe^{-tx^2})\, dt\, dx\,.$$

Trik spočívá v prohození integračního pořadí pomocí Fubiniho věty. Tu je možno bez problémů použít, protože integrovaná funkce nemění znaménko, a tedy dvojný Lebesgueův integrál existuje. Proto

$$I(\alpha,\beta) = \int_\beta^\alpha \int_0^\infty (-xe^{-tx^2})\, dx\, dt = \int_\beta^\alpha \left[\frac{1}{2t}e^{-tx^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} dt = -\int_\beta^\alpha \frac{1}{2t}\, dt = \ln\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha,\beta > 0\,.$$

---

2. [7b] Spočtěte plošný obsah té části plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, která leží uvnitř tělesa $x^2 + y^2 \leq 4x - 3$.

Řešení:
Plocha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je kuželová plocha, zatímco $x^2 + y^2 \leq 4x - 3$ lze upravit na $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$, tedy jde o válec, jehož podstavou je jednotkový kruh o středu $[2, 0]$. Počítáme tedy povrch P části kuželové plochy, která leží uvnitř tohoto válce. Parametrizace $x = x, y = y, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je potom explicitní parametrizací této plochy a množinou, ve které „žijí“ parametry x, y, je kruh $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$. Podle toho, co víme o explicitně parametrizovaných plochách, je[1] $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$. Tedy:

$$P = \int_S 1\, dS = \iint_{(x-2)^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy\,.$$

Spočteme

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}\,,$$

a tedy

$$P = \sqrt{2} \iint_{(x-2)^2 + y^2 \leq 1} 1\, dx\, dy = \pi\sqrt{2}\,,$$

neboť dvojný integrál představuje obsah kruhu o poloměru 1 (a středu $[2, 0]$), což by člověk mohl umět zpaměti :-).

[1] Indexem označujeme parciální derivování.

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(4yy' - \frac{8}{3}xy'^6\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1,2\rangle), y(1) = 1 - \sqrt[5]{16}, y(2) = 0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = 4yy' - \frac{8}{3}xy'^6$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 4y'$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 4y - 16xy'^5$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$(4y - 16xy'^5)' = 4y'\,.$$

Vlevo není nutno proderivovat, všimneme si pouze členu $4y'$, který se vyskytuje na obou stranách a který odečteme, načež dostaneme $(-16xy'^5)' = 0$ neboli $xy'^5 = c = \text{const}$. Proto

$$y'^5 = cx^{-1} \quad\Rightarrow\quad y' = cx^{-\frac{1}{5}} \quad\Rightarrow\quad y = c_1 + c_2x^{\frac{4}{5}}\,.$$

Okrajové podmínky dají $c_1 + c_2 = 1 - \sqrt[5]{16}$, $c_1 + c_2\sqrt[5]{16} = 0$. Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $1 - \sqrt[5]{16} = c_2(1 - \sqrt[5]{16})$, tedy $c_2 = 1$, načež $c_1 = -\sqrt[5]{16} = -\sqrt[5]{2^4}$ a jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice má tedy tvar

$$y = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}\,.$$

Dodatečné úvahy za bonusové body:
1. bonusový bod: Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = -5\cdot 16xy_0'^4 = -80\left(\frac{4}{5}\right)^4 x^{1/5} < 0 \qquad \text{v } \langle 1,2\rangle\,,$$

a protože nutnou podmínkou minima je $P(x) > 0$ v $\langle 1,2\rangle$, nemůže být nalezené řešení minimem daného funkcionálu.

2. bonusový bod až dva: Může to však být třeba lokální maximum funkcionálu Φ, což vyšetříme jako minimum funkcionálu $(-\Phi)$. Změna znaménka u Φ a tedy i u L způsobí i změnu znaménka u P, nutná podmínka minima je tedy splněna. Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se pak redukuje na

$$P(x)\omega'(x) = c \qquad\Rightarrow\qquad \omega(x) = c_1 + c_2x^{\frac{4}{5}}\,.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (1,2\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 1,2\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}$ lokálním minimem funkcionálu $(-\Phi)$ a tedy lokálním maximem funkcionálu Φ.

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi\rangle$, $a > 0$.

   1. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.
   2. Spočtěte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi\rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sinh ax \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx\,,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočtěme nejprve

$$\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{a+in}\left(e^{a\pi}\, e^{in\pi} - 1\right) = \frac{a-in}{a^2+n^2}\left(e^{a\pi}\,(-1)^n - 1\right)\,,$$

tedy

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}\right)\,.$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{-ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2+n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}\right)\,,$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{a^2+n^2}\left[1 - 1 + (-1)^{n+1}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\right] = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2+n^2}\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2+n^2}\sin nx\,,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+)+\widetilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{f}(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^\infty b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\right)^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}\,. \tag{2}$$

Protože (spočtěte si) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)$, $(a \neq 0\,!)$ dostaneme konečně:[2]

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\sinh^2 a\pi}\left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)\,, \quad a \neq 0\,. \tag{3}$$

[2] Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim\limits_{a\to 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odůvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)