Početní část zkoušky | 11.1.2006

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [8b] Spočtěte
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx\,, \qquad a \geq 0\,.$$
(Návod: výpočet proveďte pro $a \neq 1$, pak ukažte, že F je spojitá v $a = 1$ a tedy výsledek platí i pro $a = 1$.)

---

2. [8b] Spočtěte (přímo nebo použitím některé z vhodných vět) plošný integrál
$$\int_S xyz\,dy\,dz + y^2\,dx\,dy$$
kde S je „vnějšek“ povrchu útvaru, určeného nerovnostmi $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, $z \leq \frac{x^2}{4} + y^2$, $z \geq 0$.

---

3. [7b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu
$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(xy'^4 - 2yy'^3 \right) dx\,,$$
který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1,2\rangle), y(1) = 0, y(2) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru.

---

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

TEORETICKÁ ČÁST ZKOUŠKY $\boxed{11.1.2006}$

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

---

1. **[6b]**

   (a) Napište znění Stokesovy věty pro diferenciální formy. Větu nemusíte dokazovat.

   (b) Odvoďte z výše uvedené věty Gauss-Ostrogradského větu v $\mathbb{R}^3$.

---

2. **[6b]**

   (a) Definujte klasickou úlohu variačního počtu s Lagrangiánem $L(x, y, y')$.

   (b) Jaký je rozdíl mezi kritickým bodem funkcionálu a extremálou funkcionálu? Definujte oba pojmy a je-li mezi nimi nějaká implikace, řekněte jaká (bez důkazu, ale popište, za jaké situace platí).

---

3. **[8b]**

   (a) Formulujte a dokažte Besselovu nerovnost a Parsevalovu rovnost (vyberte si, jestli verzi pro sinus a kosinus, nebo abstraktní verzi pro OG systém v Hilbertově prostoru).

   (b) Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$, $b_n = \frac{2+n}{n^4}$. Definujme funkci $f(x)$ jako součet Fourierovy řady s těmito koeficienty všude tam, kde je tento součet konečný. Je funkce f spojitá na $\mathbb{R}$? Jste schopni řici něco o derivování uvedené řady člen po členu a souvislosti této zderivované řady s funkcí $f'(x)$, pokud tato existuje? Svá tvrzení odůvodněte tak, že se odvoláte na nějakou větu, kterou zformulujte, ale nemusíte ji dokazovat.
