Řešení početní části zkouškové písemky z 11.1.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Spočtěte
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\, dx\,, \qquad a \geq 0\,.$$
(Návod: výpočet proveďte pro $a \neq 1$, pak ukažte, že F je spojitá v $a = 1$ a tedy výsledek platí i pro $a = 1$.)

Řešení: Nejprve formálně zderivujeme (nezapomeňte, že se derivuje podle a):
$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,. \tag{1}$$
Derivování je v pořádku, neboť $F(0) = 0$ (tj. existuje 1 bod, ve kterém integrál konverguje) a derivovaná funkce má integrabilní majorantu:
$$\left|\frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(0,\infty)\,, \qquad \forall a \geq 0\,.$$
Integrál pro $F'(a)$ spočteme například rozkladem integrandu na parciální zlomky. Uvědomte si, že pro $a \neq 1$ a pro $a = 1$ nastávají při integrování diametrálně odlišné situace. Je to vidět i z toho, že pro $a \neq 1$ dostaneme rozkladem na parciální zlomky (spočtěte pečlivě):
$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^\infty \left(\frac{a^2}{a^2-1}\frac{1}{1+a^2x^2} - \frac{1}{a^2-1}\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left[\frac{a^2}{a^2-1}\frac{1}{a}\operatorname{arctg} ax - \frac{1}{a^2-1}\operatorname{arctg} x\right]_0^\infty = \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1}\right) = \frac{\pi}{2(a+1)}\,. \end{aligned}$$
Proto $F(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1) + c$, načež $F(0) = 0$ implikuje
$$F(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1) \qquad \forall a \geq 0,\ a \neq 1\,. \tag{2}$$
Ukážeme-li spojitost funkce F v bodě 1, bude vztah (2) platit i pro $a = 1$. Požadovanou spojitost lze obdržet například takto: pro $a \in \mathcal{U}^\varepsilon(1)$ je $|a| < 1 + \varepsilon$, a dále obecně je $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$. Proto
$$\left|\frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\right| \leq \left|\frac{ax}{x(1+x^2)}\right| \leq \frac{1+\varepsilon}{1+x^2} \in L^1(0,\infty)\,, \qquad \forall a \in \mathcal{U}^\varepsilon(1)$$
a funkce F je spojitá[1] v bodě 1. Tedy
$$F(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1) \qquad \forall a \geq 0\,.$$

---

[1] Jiná možnost: z (1) plyne, že $F'(1) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ je vlastní (je to konečné číslo). Proto je F je spojitá v bodě 1. :-)

2. [8b] Spočtěte (přímo nebo použitím některé z vhodných vět) plošný integrál

$$\int_S xyz\,dy\,dz + y^2\,dx\,dy$$

kde S je „vnějšek" povrchu útvaru, určeného nerovnostmi $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, $z \leq \frac{x^2}{4} + y^2$, $z \geq 0$.

Řešení: Samozřejmě můžete počítat uvedený plošný integrál přímo, uvědomte si však, že vás čekají tři integrály: přes eliptickou podstavu objektu, přes „svislé boky" eliptického válce, a přes „horní parabolickou pokličku" (udělejte si geometrickou představu). Lépe než tři plošné integrály je počítat jeden objemový, užijeme-li identity:

$$\int_S \vec{T}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{T}\,dV\,.$$

Samozřejmě $\int_S \vec{T}\,d\vec{S} = \int_S T_1\,dy\,dz + T_2\,dz\,dx + T_3\,dx\,dy$. V našem případě je tedy $\vec{T} = (xyz, 0, y^2)$, a proto $\operatorname{div}\vec{T} = yz$, a

$$A := \int_S xyz\,dy\,dz + y^2\,dx\,dy = \int_V yz\,dV = \iint_{\frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1} \left(\int_0^{\frac{x^2}{4}+y^2} yz\,dz \right) dx\,dy\,.$$

Poslední rovnost reflektuje výpočet objemového intergrálu pomocí Fubiniho věty: průmětem tělesa je eliptická podstava, a pro každý bod z této podstavy integrujeme podle z mezi 0 a $\frac{x^2}{4} + y^2$ (podívejte se do zadání na nerovnosti pro z). Tedy:

$$A := \iint_{\frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1} \frac{y}{2} \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right)^2 dx\,dy\,.$$

Pro výpočet dvojného integrálu přes elipsu se hodí modifikované polární souřadnice $x = 2r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ s jakobiánem $2r$. Pak

$$A := \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \cdot \frac{r\sin\varphi}{2} \cdot (r^2)^2\,dr\,d\varphi = 0$$

díky členu $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi$.

3. [7b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(xy'^4 - 2yy'^3 \right) dx \,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1,2 \rangle), y(1) = 0, y(2) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru.

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = xy'^4 - 2yy'^3$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = -2y'^3$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 4xy'^3 - 6yy'^2$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} \,,$$

tedy v našem případě

$$(4xy'^3 - 6yy'^2)' = -2y'^3 \,.$$

Po proderivování a úpravě dostaneme

$$0 = y''y'(xy' - y) \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = 0 \quad \text{nebo} \quad xy' - y = 0 \,.$$

Ony tři možnosti vedou postupně k řešením $y = ax + b$ nebo $y = c$ nebo $y = dx$. Okrajovým podmínkám pak vyhoví pouze řešení prvního typu, a dostaneme jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$y = x - 1 \,.$$

Dodatečná úvaha za bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x - 1$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 12xy_0'^2 - 12yy_0' = 12 > 0 \qquad \text{v } \langle 1,2 \rangle \,.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 - \frac{d}{dx}(-6y_0'^2) = 12y_0'y_0'' = 0 \,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$\omega''(x) = c \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 + c_2 x \,.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (1,2\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 1,2 \rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x - 1$ lokálním minimem funkcionálu Φ.

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Ze sudosti dostáváme

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

a dále

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Při dosazení bodu $x = \frac{\pi}{2}$ do (3) tedy na pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{\pi}{4}$, načež dostaneme

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Protože $\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin\pi n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

což je jedna z možných forem výsledku. Je však možno si ještě uvědomit, že výraz $\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}$ je nenulový pouze pro $n = 4k+2$, a pak má hodnotu 2, tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(4k+2)^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

což je jednodušší a přehlednější forma výsledku.