Řešení početní části zkouškové písemky z 18.09.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [6b] Rozviňte funkci

$$z^2 \sin \frac{1}{z-1}$$

do Laurentovy řady o středu 1.

Řešení:
Ze znalosti známé Taylorovy řady pro sinus ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$) odvozujeme, že pro všechna $x = \frac{1}{z-1}$, tedy pro $z \neq 1$, platí

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} \mp \cdots . \tag{1}$$

Zbývá jen faktor z^2 převést do „řady“ o středu jedna:

$$z^2 = (z-1+1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \tag{2}$$

a obě řady (1), (2) vynásobit. Násobíme tedy řadu (1) postupně třemi faktory z (2) a vzniklé tři řady sečteme. To vše je možné uvnitř mezikruží konvergence Laurentovy řady, jak praví jisté věty z analýzy. Jediné omezení je $z \neq 1$, tedy pro $0 < |z-1| < \infty$ platí:

$$\begin{aligned}
z^2 \sin \frac{1}{z-1} &= (z-1) - \frac{1}{3!(z-1)} + \frac{1}{5!\,(1-z)^3} \mp \cdots + \\
&+ 2 - \frac{2}{3!(z-1)^2} + \frac{2}{5!\,(1-z)^4} \mp \cdots + \\
&+ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3!\,(1-z)^3} + \frac{1}{5!\,(1-z)^5} \mp \cdots = \\
&= (z-1) + 2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{3!(z-1)^2} - \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right)\frac{1}{(z-1)^3} \cdots .
\end{aligned}$$

Vzorec pro obecný koeficient a_n můžou zájemci najít v Kopáčkovi (Příklady č. 4), neboť z těchto skript příklad pochází. Ostatně, vyskytl se přesně v tomto znění už v písemce dne 27.6.2006.

---

2. [12b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(2-\cos x)^2}\,dx$$

pomocí reziduové věty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na tuto větu.

Řešení:

Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π“. Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce:

$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\left(2-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2} = \frac{2z^2+2}{i(z^2-4z+1)^2}\,.$$

Podle reziduové věty je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(2-\cos x)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{2z^2+2}{i(z^2-4z+1)^2} = 4\pi \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z^2+1}{(z^2-4z+1)^2}\,,$$

protože funkce $f(z) := \frac{z^2+1}{(z^2-4z+1)^2}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou dvou izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $2\pm\sqrt{3}$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $2-\sqrt{3}$. Počítáme tedy reziduum v tomto bodě (je tam dvojnásobný pól f):

Reziduum v $2-\sqrt{3}$ spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem $(z-2+\sqrt{3})^2$, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme $z = 2-\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{2-\sqrt{3}} f(z) &= \left(\frac{z^2+1}{(z-2-\sqrt{3})^2}\right)'\Bigg|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{2z(z-2-\sqrt{3})^2-(z^2+1)\cdot 2\cdot(z-2-\sqrt{3})}{(z-2-\sqrt{3})^4}\Bigg|_{z=2-\sqrt{3}} = \\
&= \frac{2(2-\sqrt{3})(-2\sqrt{3})-2(4-4\sqrt{3}+3+1)}{(-2\sqrt{3})^3} = \frac{-8\sqrt{3}+12-16+8\sqrt{3}}{-8\cdot 3\sqrt{3}} = \\
&= \frac{4}{8\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}\,.
\end{aligned}$$

Celkově je tedy výsledek

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(2-\cos x)^2}\,dx = 4\pi\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\,.$$

Tento příklad je modifikací příkladu č. 2 z 5.6.2006. Srovnejte postup.

3. [12b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x \operatorname{arctg} x}{(x^2+2)^3}\, dx\,.$$

Návod: Nejprve se pomocí integrace per partes zbavte arkustangenty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na věty a postupy z přednášky.

Řešení: Integrace per partes s $u' = \frac{4x}{(x^2+2)^3} \Rightarrow u = -\frac{1}{(x^2+2)^2}$, $v = \operatorname{arctg} x \Rightarrow v' = \frac{1}{1+x^2}$ dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x \operatorname{arctg} x}{(x^2+2)^3}\, dx = \left[-\frac{1}{(x^2+2)^2} \operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+1)}\,,$$

hraniční členy vypadnou, protože arctg je v nekonečnu omezená a $\frac{1}{(x^2+2)^2}$ tam má nulovou limitu. Dostali jsme integrál z racionální funkce, která nemá póly na reálné ose, přes celou reálnou osu. Protože stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele, jde integrál přes oblouk kružnice o poloměru R v horní polorovině k nule (při $R \to +\infty$), podle modifikovaného Jordanova lemmatu, a tedy podle reziduové věty aplikované na obvod „horního půlkruhu" o poloměru R:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+1)} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{i\sqrt{2}} + \operatorname{Res}_i\right) \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2+1)}\,.$$

Reziduum v i je reziduum v jednoduchém pólu, tedy dosazujeme do holomorfní části a do derivace neholomorfní části ve jmenovateli:

$$\operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2+1)} = \frac{1}{(-1+2)^2 \cdot 2i} = \frac{1}{2i}\,.$$

Reziduum v $i\sqrt{2}$ je reziduum ve dvojnásobném pólu, tedy násobíme $(z-i\sqrt{2})^2$, jednou derivujeme, dělíme $1!$ a dosadíme $i\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{i\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2+1)} &= \left(\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^2(z^2+1)}\right)'\Bigg|_{z=i\sqrt{2}} = \\
&= \frac{-2(z+i\sqrt{2})(z^2+1) - 2z(z+i\sqrt{2})^2}{(z+i\sqrt{2})^4(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=i\sqrt{2}} = \\
&= \frac{(-4i\sqrt{2})\cdot(-1) + 8\cdot 2i\sqrt{2}}{16\cdot 9} = \frac{5i\sqrt{2}}{16} = -\frac{5\sqrt{2}}{16i}\,.
\end{aligned}$$

Celkově tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x \operatorname{arctg} x}{(x^2+2)^3}\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{5\sqrt{2}}{16i}\right) = \pi - \frac{5\pi\sqrt{2}}{8}\,.$$

Tento příklad je modifikací příkladu č. 3 z 5.6.2006. Srovnejte postup.