Řešení početní části zkouškové písemky z 11.09.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Rozviňte funkci

$$\frac{6z^2 - 10z + 2}{z(z^2 - 3z + 2)}$$

do Laurentovy řady o středu 2 tak, aby číslo $\frac{1}{2}$ patřilo do oboru konvergence řady.

Řešení:
Nejprve rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{6z^2 - 10z + 2}{z(z^2 - 3z + 2)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{z-2}\,.$$

Ze zadání úlohy plyne, že hledáme Laurentovu řadu, konvergující v mezikruží $1 < |z-2| < 2$. Zlomek $\frac{3}{z-2}$ z rozkladu výše už tedy je členem této řady. Pro zbylé dva zlomky použijeme rozpis pomocí geometrické řady, jako již v několika dřívějších písemkách:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+z-2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-2}{2}\Big)^n,$$

tato řada konverguje pro $|z-2| < 2$, a dále

$$\frac{2}{z-1} = \frac{2}{1+z-2} = \frac{\frac{2}{z-2}}{\frac{1}{z-2}+1} = \frac{2}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{z-2}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(z-2)^n}\,,$$

všimněte si, jak jsme přechodem proměnné do jmenovatele složeného zlomku obdrželi kvocient geometrické řady rovný $\frac{1}{z-2}$, a tedy řada konverguje pro $\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$, tj. pro $|z-2| > 1$, jak jsme chtěli.
Celkově

$$\frac{6z^2 - 10z + 2}{z(z^2 - 3z + 2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(z-2)^n} + \frac{3}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}\,.$$

---

2. [11b] Spočtěte integrál
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,dx\,.$$

Řešení:
Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π“. Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce:

$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2\left(\frac{1}{-4}\right)}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \frac{-1}{2i}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}\,.$$

Podle reziduové věty je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,dx = 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{-1}{2i}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)} = (-\pi)\sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}\,,$$

protože funkce $f(z) := \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou tří izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $-2\pm\sqrt{3}$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $-2+\sqrt{3}$. Počítáme tedy reziduum v tomto bodě (je tam jednoduchý pól f) a v bodě nula (je tam jednoduchý pól f).
Reziduum v 0 spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem z^2, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme $z=0$:

$$\operatorname{Res}_0 f(z) \;=\; \left(\frac{z^4-2z^2+1}{z^2+4z+1}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{(4z^3-4z)(\ldots)-(\ldots+1)(2z+4)}{(\ldots+1)^2}\Bigg|_{z=0} = -4\,.$$

Reziduum v $2-\sqrt{3}$ spočteme dosazením do holomorfní části a do derivace neholomorfní části jmenovatele:

$$\operatorname{Res}_{-2+\sqrt{3}} f(z) \;=\; \frac{(\sqrt{3}-2)^4-2(\sqrt{3}-2)^2+1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2} = \frac{84-48\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\,,$$

což ovšem dá trošku počítání (rozšiřte poslední zlomek výrazem $(7+4\sqrt{3})$).
Celkově je tedy výsledek
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,dx = 4\pi - 2\pi\sqrt{3}\,.$$

3. [11b] Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\,dx\,, \qquad a>0\,,\ \ b>0\,.$$

Řešení:
Integrovaná funkce je sudá, proto je $\int_0^\infty \ldots = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty$, dále budeme integrovat funkci $\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}$ a z výsledku vezmeme imaginární část. Budeme integrovat přes „obvod horního půlkruhu o poloměru R“ a pošleme R do nekonečna, pro integrál přes horní půloblouk použijeme Jordanovo lemma: integrovaná funkce je tvaru $f(z)\exp(iaz)$, kde $a>0$ a $f(z)$ je racionální funkce, přičemž stupeň jmenovatele je větší než stupeň čitatele. Když to všecko dáme dohromady, dostaneme:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}\,dx = \mathrm{Im}\left(\pi i\ \mathrm{Res}_{bi}\,\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\right)\,.$$

Reziduum spočteme dosazením do čitatele a do derivace jmenovatele, tj. jako $\left.\frac{ze^{iaz}}{2z}\right|_{z=bi} = \frac{1}{2}e^{-ab}$, a tedy celkově je

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}\,.$$