Řešení početní části zkouškové písemky z 5.6.2006

MA pro F, 3. semestr

1. [8b] Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-3z+2}$$

do Laurentovy řady o středu (-1) v mezikruží $2 < |z+1| < 3$.

Řešení: Prvním krokem je úprava výrazu $f(z)$ pomocí rozkladu na parciální zlomky a tyto pak dále tak,[1] aby obsahovaly členy $(z+1)$:

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-1} = \frac{1}{-3+z+1} + \frac{2}{-2+z+1} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} + \frac{\frac{2}{z+1}}{1-\frac{2}{z+1}}.$$

Všimněte si, že zatímco první zlomek jsme upravili tak, aby byl součtem geometrické řady s kvocientem $\frac{z+1}{3}$, která tedy konverguje pro $|z+1| < 3$, ve druhém zlomku jsme dbali na to, aby $|z+1| > 2$, což nás vede ke kvocientu $\frac{2}{z+1}$.
S využitím součtů oněch geometrických řad máme tedy pro $|z+1| < 3$ resp. pro $|z+1| > 2$:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\frac{2}{z+1}}{1-\frac{2}{z+1}} = \frac{2}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n,$$

a tedy celkově pro $2 < |z+1| < 3$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n.$$

[1] Komu se nelíbí čarování s geometrickými řadami, může Laurentovy koeficienty počítat pomocí vzorce pro ně: pokud je γ uzavřená jednoduchá křivka, která oběhne bod -1 v kladném smyslu, a přitom leží celá v uvažovaném mezikruží (tj. oběhne i singularitu funkce v bodě 1), je $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}}\,dz$, který v našem případě dá

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{3z-5}{(z^2-3z+2)(z+1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \sum_{z=-1,1} \mathrm{Res}_z \frac{3z-5}{(z-1)(z-2)(z+1)^{n+1}} = \sum_{z=-1,1} \mathrm{Res}_z \frac{3z-5}{(z-1)(z-2)(z+1)^{n+1}},$$

druhá rovnost je reziduová věta. Zkuste to dopočíst, mělo by vyjít totéž.

---

2. [10b] Spočtěte integrál
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx$$
pomocí reziduové věty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na tuto větu.

Řešení:
Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π". Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce (při úpravě násobíme uvnitř závorky ve jmenovateli výrazem $-2iz$, tedy v čitateli $(-2iz)^2$):
$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{\left(5-\frac{3}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)^2}=\frac{1}{i}\cdot\frac{-4z}{\left(3z^2-10iz-3\right)^2}.$$
Podle reziduové věty
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx = 2\pi\sum_{|z_0|<1}\operatorname{Res}_{z_0}\frac{-4z}{\left(3z^2-10iz-3\right)^2},$$
protože funkce $f(z) := \frac{-4z}{\left(3z^2-10iz-3\right)^2}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou dvou izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $\frac{10i\pm\sqrt{-100+36}}{6}$, tj. $\frac{i}{3}$ a $3i$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $\frac{i}{3}$. Počítáme tedy reziduum v tomto bodě (je tam dvojnásobný pól f).
Reziduum v $\frac{i}{3}$ spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem $(z-\frac{i}{3})^2$, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme $\frac{i}{3}$:
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\frac{i}{3}} f(z) &= \left(\frac{(-4z)(z-\frac{i}{3})^2}{\left[3(z-\frac{i}{3})(z-3i)\right]^2}\right)'\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = -\frac{4}{9}\left(\frac{z}{(z-3i)^2}\right)'\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = \\ &= -\frac{4}{9}\,\frac{(z-3i)^2-2z(z-3i)}{(z-3i)^4}\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = -\frac{4}{9}\,\frac{(\frac{i}{3}-3i)^2-2\frac{i}{3}(\frac{i}{3}-3i)}{(\frac{i}{3}-3i)^4} = \frac{5}{64}.\end{aligned}$$
Celkově je tedy výsledek
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx = 2\pi\frac{5}{64}=\frac{5\pi}{32}.$$

---

3. [12b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{(x^2+1)^3}\, dx\,.$$

Návod: Nejprve se pomocí integrace per partes zbavte arkustangenty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na věty a postupy z přednášky.

Řešení: Integrace per partes s $u' = \frac{2x}{(x^2+1)^3} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}$, $v = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Rightarrow v' = \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}$ dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{(x^2+1)^3}\, dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,,$$

hraniční členy vypadnou, protože arctg je v nekonečnu omezená a $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ tam má nulovou limitu. Dostali jsme integrál z racionální funkce, která nemá póly na reálné ose, přes celou reálnou osu. Protože stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele, jde integrál přes oblouk kružnice o poloměru R v horní polorovině k nule (při $R \to +\infty$), podle modifikovaného Jordanova lemmatu, a tedy podle reziduové věty aplikované na obvod „horního půlkruhu“ o poloměru R:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = 2\pi i\,(\operatorname{Res}_i + \operatorname{Res}_{2i})\, \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,.$$

Reziduum v $2i$ je reziduum v jednoduchém pólu, tedy dosazujeme do holomorfní části a do derivace neholomorfní části ve jmenovateli:

$$\operatorname{Res}_{2i} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} = \frac{1}{(-3)^2 \cdot 2 \cdot 2i} = \frac{1}{36i}\,.$$

Reziduum v i je reziduum ve dvojnásobném pólu, tedy násobíme $(z-i)^2$, jednou derivujeme, dělíme 1! a dosadíme i:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} &= \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)'\Bigg|_{z=i} = \frac{-2(z+i)(z^2+4) - 2z(z+i)^2{}'}{(z+i)^4(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=i} = \\ &= \frac{(-4i)\cdot 3 + 4 \cdot 2i}{16 \cdot 9} = \frac{-i}{36} = \frac{1}{36i}\,. \end{aligned}$$

Celkově tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{(x^2+1)^3}\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{36i} + \frac{1}{36i}\right) = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9}\,.$$