Konvexní tělesa
LS 2016/17

1 Úvod, kombinatorické věty

Základní prostor: V_d - afinní prostor dimenze d, většinou $V_d = \mathbb{R}^d$

Definice 1.1 1. $K \subset V_d$ je *konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in K$ a $t \in [0,1]$ platí $(1-t)x + ty \in K$.

2. *Konvexní obal* množiny $A \subset V_d$ je množina
$$\mathrm{conv}\, A := \bigcap \{B \subset V_d : B \supset A : B \text{ konvexní}\}.$$

3. *Dimenzí* konvexní množiny $K \subset V_d$ rozumíme dimenzi jejího konvexního obalu, tedy $\dim K := \dim(\mathrm{aff}\, K)$.

4. Množinu $\mathrm{conv}\{x_0, \dots, x_k\}$, kde $x_0, \dots, x_k \in V_d$ jsou afinně nezávislé, nazýváme k-*simplexem.*

5. *Konvexní těleso* v $\mathbb{R}^d$ je neprázdná, konvexní a kompaktní množina.

Pozn.: Zřejmě $K \subset V_d$ je konvexní právě tehdy, když
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_1, \dots, x_n \in K)(\forall t_1, \dots, t_n \in [0,1]), \sum_{i=1}^n t_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n t_i x_i \in K.$$

Lemma 1.1 *Mějme systém konvexních množin $K_\alpha \subset V_d$, $\alpha \in I$. Pak*

1. *$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ je rovněž konvexní,*
2. *je-li indexová množina I lineárně uspořádaná a systém (K_α) rostoucí (tzn. $K_\alpha \subset K_{\alpha'}$ kdykoliv $\alpha < \alpha'$), pak i $\bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha$ je konvexní.*

Lemma 1.2 *Pro libovolnou $A \subset V_d$ platí*
$$\mathrm{conv}\, A = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i x_i : t_i \geq 0, t_1 + \cdots + t_k = 1, x_i \in A, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 1.2 *Uzavřený konvexní obal* množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ definujeme jako
$$\overline{\mathrm{conv}} A := \bigcap \{B \subset \mathbb{R}^d : B \supset A, B \text{ konvexní uzavřená}\}.$$

Pozn.:

1. Pro $A \subset \mathbb{R}^d$ platí $\overline{\text{conv}} A = \overline{\text{conv}\, A}$.
2. Z uzavřenosti A neplyne uzavřenost $\text{conv}\, A$.
3. Je-li A kompaktní, pak je i $\text{conv}\, A$ kompaktní.

Věta 1.3 (Caratheodory) *Pro libovolnou množinu $A \subset V_d$ platí*

$$\text{conv}\, A = \left\{ \sum_{i=0}^{d} t_i x_i : t_i \geq 0, t_0 + \cdots + t_d = 1, x_i \in A, i = 0, \ldots, d \right\}.$$

Pozn.: Ekvivalentně lze říci, že konvexní obal množiny A ve V_d je sjednocením všech k-simplexů s vrcholy v A, $k \leq d$.

Věta 1.4 (Radon) *Nechť množina $A \subset V_d$ má aspoň $d+2$ prvků. Pak existují disjunktní podmnožiny $R, B \subset A$ takové, že $\text{conv}\, R \cap \text{conv}\, B \neq \emptyset$.*

Věta 1.5 (Helly) *Buďte $K_1, \ldots, K_m \subset V_d$ konvexní, $m \geq d+1$. Nechť pro libovolné $1 \leq i_1 < \cdots < i_{d+1} \leq m$ je $K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_{d+1}} \neq \emptyset$. Pak $K_1 \cap \cdots \cap K_m \neq \emptyset$.*

Důsledek 1.6 *Buď $K_i : i \in I\}$ systém kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^d$, $\text{card}\, I \geq d+1$. Nechť pro každou podmnožinu $J \subset I$ s $\text{card}\, J = d+1$ platí $\bigcap_{j \in J} K_j \neq \emptyset$. Pak $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.*

Důsledek 1.7 *Buďte $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^d$ konvexní, $k \leq d+1$ a L lineární podprostor $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-k+1$. Nechť každých k množin A_i má neprázdný průnik. Pak existuje $z \in \mathbb{R}^d$ takový, že $(L+z) \cap A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$.*

Důsledek 1.8 (Barycentrum míry) *Pro každou borelovskou pravděpodobnostní míru μ na $\mathbb{R}^d$ existuje $y \in \mathbb{R}^d$ takový, že pro každý uzavřený poloprostor $H \subset \mathbb{R}^d$ je $\mu(H) \geq \frac{1}{d+1}$.*

Důsledek 1.9 (O aproximaci) *Buďte $f_i, g : T \to \mathbb{R}$ funkce na konečné množině T, $i = 1, \ldots, m$, a $\varepsilon > 0$. Pro $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ označme $f_x := x^1 f_1 + \cdots + x^m f_m$. Nechť pro libovolné $t_1, \ldots, t_{m+1} \in T$ existuje $x \in \mathbb{R}^m$ tak, že $|f_x(t_i) - g(t_i)| \leq \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m+1$. Pak existuje $y \in \mathbb{R}^m$ takový, že $\sup_{t \in T} |f_y(t) - g(t)| \leq \varepsilon$.*

Důsledek 1.10 *Pro libovolné $k, d \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ a $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^d$ tak, že*

$$\|x\|^{2k} = \sum_{i=1}^{m} (c_i \cdot x)^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

2 Opěrné a oddělovací věty

Věta 2.1 *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní a uzavřená. Pak ke každému bodu $y \in \mathbb{R}^d$ existuje právě jeden bod $\Pi_A(y) \in A$ splňující*

$$\|\Pi_A(y) - y\| = \operatorname{dist}(y, A) := \inf_{x \in A} \|y - x\|.$$

Zobrazení $y \mapsto \Pi_A(y)$ se nazývá *metrická projekce* na A.

Definice 2.1 Jsou-li $A \subset \mathbb{R}^d$ konvexní uzavřená, $u \in S^{d-1}$ jednotkový vektor a $t \in \mathbb{R}$ takové, že $A \subset H := \{x : x \cdot u \leq t\}$ a $A \cap E := \{x : x \cdot u = t\} \neq \emptyset$, říkáme, že:

1. E je *opěrná nadrovina* množiny A,
2. H je *opěrný poloprostor* množiny A,
3. $E \cap A$ je *opěrná množina* množiny A.

Věta 2.2 *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní uzavřená a $y \in \mathbb{R}^d \setminus A$. Pak nadrovina E procházející bodem $\Pi_A(y)$ a kolmá k $y - \Pi_A(y)$ je opěrnou nadrovinou A, a poloprostor s hranicí E a neobsahující bod y je opěrným poloprostorem A.*

Důsledek 2.3 *Každá neprázdná konvexní uzavřená vlastní podmnožina $A \subset \mathbb{R}^d$ je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují. Zároveň A je průnikem všech svých opěrných poloprostorů.*

Lemma 2.4 *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní uzavřená. Pak*

$$\|\Pi_A(y) - \Pi_A(x)\| \leq \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(Jinými slovy, metrická projekce je 1-Lipschitzovská.)

Věta 2.5 (Support Theorem) *Každým hraničním bodem neprázdné konvexní uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^d$ prochází opěrná nadrovina.*

Věta 2.6 (Separation Theorem) *Buďte $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná konvexní uzavřená a $K \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná konvexní a kompaktní, $A \cap K = \emptyset$. Pak existuje nadrovina E ostře oddělující A od K (tzn., že A a K jsou obsaženy v opačných otevřených poloprostorech s hranicí E).*

3 Extremální body

Definice 3.1 Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je convexní a uzavřená. Bod $x \in A$ je *extremálním bodem A*, jestliže x nelze vyjádřit jako netriviální konvexní kombinaci bodů z A (tedy jestliže $x = (1-t)y + tz$ pro nějaké $y, z \in A$ a $t \in (0,1)$, pak $x = y = z$). množinu všech extremálních bodů množiny A značíme $\operatorname{ext} A$.

Pozn.:

1. $\operatorname{ext} A \neq \emptyset$ právě tehdy, když A neobsahuje žádnou přímku.
2. $x \in \operatorname{ext} A$ právě tehdy, když $A \setminus \{x\}$ je konvexní.
3. Je-li $\{x\}$ opěrnou množinou A, je x extremálním bodem. Opačná implikace neplatí.

Věta 3.1 (Krein-Milman) *Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ konvexní a kompaktní platí*

$$K = \operatorname{conv} \operatorname{ext} K.$$

Definice 3.2 Množina $P \subset \mathbb{R}^d$ je *polytop*, lze-li P zapsat jako konvexní obal konečné množiny bodů. $P \subset \mathbb{R}^d$ je *mnohostěn* (polyhedron), lze-li P zapsat jako průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů. Extremální body polytopu nebo mnohostěnu nazýváme *vrcholy*.

Důsledek 3.2 *Pro konvexní a kompaktní množinu $P \subset \mathbb{R}^d$ platí: P je polytop právě tehdy, když* $\operatorname{ext} P$ *je konečná.*

Věta 3.3 (Weyl-Minkowski, první část) *Každý omezený mnohostěn v $\mathbb{R}^d$ je polytop.*

Definice 3.3 Bod $x \in A$ uzavřené konvexní množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ nazveme *exponovaným bodem* A, jestliže $A \setminus \{x\}$ je konvexní. Množinu všech exponovaných bodů množiny A značíme $\exp A$.

Věta 3.4 (Straszewicz) *Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ konvexní kompaktní platí*

$$K = \overline{\operatorname{conv}}(\exp K).$$

4 Dualita

Definice 4.1 Pro $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdnou značíme

$$A^o := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot y \leq 1,\, y \in A\}$$

duální (polární) množinu k množině A.

Pozn.:

1. A^o je konvexní uzavřená, $0 \in A$.
2. $(\mathbb{R}^d)^o = \{0\}$, $\{0\}^o = \mathbb{R}^d$.
3. $A \subset B \implies B^o \subset A^o$.
4. $(\bigcup_i A_i)^o = \bigcup_i A_i^o$.

5. $(tA)^o = \frac{1}{t} A^o$, $t > 0$.
6. $L \subset \mathbb{R}^d$ lineární podprostor $\implies L^o = L^\perp$.
7. Je-li $P = \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_m\}$ polytop, je

$$P^o = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot y_i \le 1,\, i = 1, \dots, m\}$$

mnohostěn.

8. $A \subset (A^o)^o =: A^{oo}$.

Věta 4.1 (Bipolární věta) *Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní uzavřená, $0 \in A$. Pak*

$$A^{oo} = A.$$

Pozn.: Pro $A \neq \emptyset$ platí

$$A^{oo} = \overline{\operatorname{conv}}(A \cup \{0\}).$$

Příklady:

1. Pro mnohostěn $A = \{x : x \cdot u_i \le 1,\, i = 1, \dots, m\}$, platí

$$A^o = \operatorname{conv}\{0, u_1, \dots, u_m\},$$

tedy A^o je polytop.

2. $B(0, \rho)^o = B(0, \frac{1}{\rho})$.
3. $\big([-1, 1]^d\big)^o = \{x : |x^1| + \cdots + |x^d| \le 1\}$.
4. $\{x : \|x\|_p \le 1\}$ a $\{x : \|x\|_q \le 1\}$ jsou vzájemně duální, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Věta 4.2 (Weyl-Minkowski, druhá část) *Každý polytop je mnohostěn.*

Definice 4.2 Množina $C \subset \mathbb{R}^d$ je *kužel* (s vrcholem v počátku), jestliže

$$x \in C, t > 0 \implies tx \in C.$$

Pozn.: Je-li $C \subset \mathbb{R}^d$ neprázdný kužel, pak C^o je konvexní uzavřený kužel

$$C^o = \{x : x \cdot y \le 0,\, y \in C\}.$$

Věta 4.3 *Nechť $e \in S^{d-1}$, $H = e^\perp$ nadrovina, $K \subset H$ konvexní. Pak*

$$K^o = (C(K + e)^o \cap (H - e)) + e \subset H,$$

kde $C(A)$ značí nejmenší kužel obsahující množinu A.

5 Opěrná funkce

Definice 5.1 Pro konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ definujeme jeho *opěrnou funkci* předpisem

$$h(K, y) := \sup\{x \cdot y : x \in K\}, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Pozn.:

1. Opěrnou fuknkci lze definovat pro libovolnou neprázdnou omezenou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$; pak platí $h(A, \cdot) = h(\overline{\mathrm{conv}} A, \cdot)$.
2. $K \subset L \implies h(K, \cdot) \leq h(L, \cdot)$.
3. $h(\alpha K + \beta L, \cdot) = \alpha h(K, \cdot) + \beta h(L, \cdot)$, $\alpha, \beta \geq 0$.

Definice 5.2 Funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je *sublineární*, jestliže

i $f(tx) = tf(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ (f je pozitivně homogenní), a

ii $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ (f je subaditivní).

Lemma 5.1 *Buď $C \subset \mathbb{R}^d$ konvexní, $f : C \to \mathbb{R}$ konvexní funkce a x vnitřní bod K. Pak f je spojitá v x.*

Lemma 5.2 *Opěrná funkce je sublineární.*

Věta 5.3 *Ke každé sublineární funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ existuje právě jedno konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ takové, že $h(K, \cdot) = f$.*

Definice 5.3 Pro konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek definujeme jeho *radiální funkci* předpisem

$$\rho(K, x) := \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\}.$$

Věta 5.4 *Pro konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek ve svém vnitřku platí*

$$h(K^o, \cdot) = \frac{1}{\rho(K, \cdot)}, \quad h(K, \cdot) = \frac{1}{\rho(K^o, \cdot)}.$$

6 Prostory kompaktních a konvexních těles

Značení: $\mathcal{K}^d$ - množina všech neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}^d$ - množina všech neprázdných kompaktních konvexních podmnožin $\mathbb{R}^d$ (konvexních těles), $B^d = B(0, 1)$ jednotková koule v $\mathbb{R}^d$, $S^{d-1} = \partial B^d$ - jednotková sféra v $\mathbb{R}^d$.

Definice 6.1 *Hausdorffova vzdálenost* neprázdných kompaktních množin $A, B \in \mathcal{K}^d$ je definována jako

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \mathrm{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \mathrm{dist}(b, A)\right\}.$$

Cvičení: d_H je metrika na $\mathcal{K}^d$.

Lemma 6.1 *1. Pro $A, B \in \mathcal{K}^d$ platí*

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subset B + \varepsilon B^d, \ B \subset A + \varepsilon B^d\}.$$

2. Pro $K, L \in \mathcal{C}^d$ platí

$$d_H(K, L) = \sup_{|u|=1} |h(K, u) - h(L, u)|.$$

Věta 6.2 *$(\mathcal{K}^d, d_H)$ je úplný metrický prostor.*

Lemma 6.3 *$A_n \searrow A \implies d_H(A_n, A) \to 0$, $n \to \infty$, $A_n, A \in \mathcal{K}^d$.*

Věta 6.4 *Každá omezená uzavřená podmnožina $(\mathcal{K}^d, d_H)$ je kompaktní.*

Věta 6.5 *$\mathcal{C}^d$ je uzavřená podmnožina $(\mathcal{K}^d, d_H)$.*

Symbolem λ^d značíme Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^d$.

Věta 6.6 *Zobrazení $K \mapsto \lambda^d(K)$ je spojité na $(\mathcal{C}^d, d_H)$.*

Věta 6.7 *Nechť $K \in \mathcal{C}^d$ a $\varepsilon > 0$. Pak platí:*

1. *Existují polytopy P, Q takové, že $P \subset K \subset Q$ a $d_H(P, K) \leq \varepsilon$, $d_H(Q, K) \leq \varepsilon$.*
2. *Je-li počátek obsažen v relativním vnitřku K, pak existuje polytop P takový, že $P \subset K \subset (1 + \varepsilon)P$.*

7 Objem a povrch konvexního tělesa

Pro konvexní těleso $K \in \mathcal{C}^d$ a jednotkový vektor $u \in S^{d-1}$ značíme

$$K(u) := K \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot u = h(K, u)\}$$

opěrnou množinu K s nadrovinou kolmou k u.

Symbolem $\mathcal{P}^d$ zmačíme množinu všech neprázdných polytopů (konvexních obalů konečných neprázdných množin). Je-li dán polytop $P \in \mathcal{P}^d$, pak opěrné množiny $P(u)$, $u \in S^{d-1}$, nazýváme *stěny* P (obecné dimenze). Symbolem $\mathcal{F}_j(P)$ značíme množinu všech j-rozměrných stěn P, $j = 0, \ldots, d-1$ ($\mathcal{F}_0(P)$ je množina všech vrcholů P). Dále značíme

$$\Sigma(P) := \{u \in S^{d-1} : P(u) \in \mathcal{F}_{d-1}(P)\}.$$

Definice 7.1 Buď $P \in \mathcal{P}^d$ polytop. Jeho *objem* $V_d(P)$ a *povrch* $S_d(P)$ definujeme indukcí následovně:

Pro $d = 1$ je $P = [a, b]$, a klademe $V_1(P) := b - a$ a $S_1(P) := 2$.

Pro $d \geq 2$ klademe

$$V_d(P) := \begin{cases} \frac{1}{d} \sum_{u \in \Sigma(P)} h(P, u) V_{d-1}(P(u)) & \textit{pokud} \dim P \geq d - 1, \\ 0 & \textit{pokud} \dim P \leq d - 2, \end{cases}$$

a

$$S_d(P) := \begin{cases} \sum_{u \in \Sigma(P)} V_{d-1}(P(u)) & \textit{pokud} \dim P \geq d - 1, \\ 0 & \textit{pokud} \dim P \leq d - 2. \end{cases}$$

Píšeme často krátce $V(P) = V_d(P)$ a $S(P) = S_d(P)$.

Lemma 7.1 *Objem a povrch polytopu mají tyto vlastnosti:*

1. $V(P) = \lambda^d(P)$,
2. V *a* S *jsou invariantní vůči všem eukleidovským pohybům (translacím a rotacím),*
3. $V(tP) = t^d V(P)$, $S(tP) = t^{d-1} S(P)$, $t \geq 0$,
4. $V(P) = 0$ *právě tehdy, když* $\dim P \leq d - 1$,
5. *je-li* $P \subset Q$, *pak* $V(P) \leq V(Q)$ *a* $S(P) \leq S(Q)$.

Definice 7.2 Pro konvexní těleso $K \in \mathcal{C}^d$ definujeme

$$V_+(K) := \inf_{P \supset K} V(P), \quad V_-(K) := \sup_{P \subset K} V(P),$$

$$S_+(K) := \inf_{P \supset K} S(P), \quad S_-(K) := \sup_{P \subset K} S(P)$$

(suprema a infima jsou chápána přes $P \in \mathcal{P}^d$).

Věta 7.2 (a definice) *Pro* $K \in \mathcal{K}^d$ *platí*

$$V_+(K) = V_-(K) =: V(K),$$

$$S_+(K) = S_-(K) =: S(K),$$

přitom $V(K)$ *a* $S(K)$ *nazýváme objem a povrch konvexního tělesa* K.

Lemma 7.3 *Objem a povrch konvexního tělesa mají tyto vlastnosti:*

1. $V(K) = \lambda^d(K)$,
2. V *a* S *jsou invariantní vůči všem eukleidovským pohybům (translacím a rotacím),*
3. $V(tK) = t^d V(K)$, $S(tK) = t^{d-1} S(K)$, $t \geq 0$,

4. *$V(K) = 0$ právě tehdy, když $\dim K \le d-1$,*

5. *je-li $K \subset L$, pak $V(K) \le V(L)$ a $S(K) \le S(L)$.*

Pro konvexní těleso $K \in \mathcal{C}^d$ označme

$$v(K,\varepsilon) := V(K+\varepsilon B^d), \quad \varepsilon \ge 0.$$

Pozorování: Pro $P \in \mathcal{P}^d$ platí

$$v(P,\varepsilon) = V(P) + \sum_{k=1}^{d} \varepsilon^k \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-k}(P)} V_{d-k}(F)\gamma_F,$$

kde $\gamma_F := V_k\{tu : 0 \le t \le 1, u \in n_F\}$ a $n_F := \{u \in S^{d-1} : F \subset P(u)\}$, $F \in \mathcal{F}_{d-k}(P)$. Zřejmě $v(\cdot,\cdot)$ je rostoucí v obou argumentech.

Lemma 7.4 *Zobrazení $K \mapsto v(K,\varepsilon)$ je spojité pro každé $\varepsilon \ge 0$.*

Lemma 7.5 *Nechť p_i jsou polynomy stupně nejvýše d s nezápornými koeficienty a takové, že $p_i \to f$ na $([0,\infty)$, kde f je nějaká funkce. Pak f je polynom stupně nejvýše d a všechny koeficienty p_i konvergují k příslušným koeficientům f.*

Důsledek 7.6 1. *Pro $K \in \mathcal{C}^d$ je*

$$S(K) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{V(K+\varepsilon B^d) - V(K)}{\varepsilon}.$$

2. *Zobrazení $K \mapsto S(K)$ je spojité na $\mathcal{C}^d$.*

8 Brunn-Minkowského nerovnost a její důsledky

Věta 8.1 *Nechť $K_0, K_1 \in \mathcal{C}^d$ a $\lambda \in [0,1]$. Pak*

$$V((1-\lambda)K_0 + \lambda K_1)^{\frac{1}{d}} \ge (1-\lambda)V(K_0)^{\frac{1}{d}} + \lambda V(K_1)^{\frac{1}{d}}.$$

Rovnost nastává pro nějaké $\lambda \in (0,1)$ právě tehdy, když buď K_0, K_1 leží v paralelních nadrovinách, nebo když jsou homotetické (tedy $tK_1 = K_0 + z$ nebo $tK_0 = K_1 + z$ pro nějaké $t \ge 0$ a $z \in \mathbb{R}^d$).

Pozn.: Nerovnost říká, že funkce $\lambda \mapsto V(K_\lambda)^{1/d}$ je konkávní na $[0,1]$, kde $K_\lambda := (1-\lambda)K_0 + \lambda K_1$.

Definice 8.1 Je-li $K \in \mathcal{C}^d$ značíme

$$S_0(K) := \frac{K-K}{2} = \left\{ \frac{x-y}{2} : x, y \in K \right\}$$

středovou symetrizaci K.

Důsledek 8.2 $V(S_0K) \geq V(K)$.

Lemma 8.3 $\operatorname{diam} S_0(K) = \operatorname{diam} K$.

Symbolem $\omega_d := \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$ značíme objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$.

Důsledek 8.4 (Izodiametrická nerovnost) *Pro $K \in \mathcal{C}^d$ platí*

$$V(K) \leq \omega_d \left(\frac{\operatorname{diam} K}{2}\right)^d.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když K je koule.

Důsledek 8.5 (Izoperimetrická nerovnost) *Pro $K \in \mathcal{C}^d$ platí*

$$S(K) \geq d\omega_d^{\frac{1}{d}}\, V(K)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když K je koule.