

OTÁZKY KE ZKOUŠCE Z TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU  
ZIMNÍ SEMESTR 2017/18

**A. Definice, znění vět, příklady (max. 10 bodů).**

**B. “Lehčí” důkaz (max. 8 bodů).**

- (1) Věta o spojitosti míry
- (2) Borelovská  $\sigma$ -algebra je generována kvádry
- (3) Měřitelnost “stačí ověřit” na generátoru  $\sigma$ -algebry
- (4) Měřitelnost součtu, součinu, maxima dvou měřitelných funkcí
- (5) Aproximace nezáporné měřitelné funkce jednoduchými funkcemi
- (6) Měřitelnost limity měřitelných funkcí
- (7) Fatouovo lemma
- (8) Lebesgueova věta o záměně limity a integrálu
- (9) Lebesgueova věta o spojitě závislosti integrálu na parametru
- (10) Nezáporná měřitelná funkce s nulovým integrálem je nulová s.v.
- (11) Měřitelnost řezů v součtinové  $\sigma$ -algebře
- (12) Věta o jednoznačnosti míry
- (13) Čebyševova nerovnost
- (14) Vztah mezi konvergencí v  $L^p$  a  $L^q$  pro  $p < q$
- (15) Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část
- (16) Tvrzení o diferencovatelné distribuční funkci
- (17) Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál
- (18) Spojitost v prázdné množině stačí pro spočetnou aditivitu konečně aditivní míry na algebře

**C. “Těžší” důkaz (max. 12 bodů).**

- (1) Věta o zúplnění míry
- (2) Existence Lebesgueovy míry
- (3) Regularita Lebesgueovy míry
- (4) Leviho věta (konvergence “nahoru” i “dolů”)
- (5) Linearita integrálu
- (6) Věta o záměně integrálu a derivace
- (7) Věta o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu
- (8) Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí
- (9) Věta o rovnosti  $\delta$ -obalu a  $\sigma$ -obalu
- (10) Existence součtinové míry
- (11) Fubiniova věta
- (12) Věta o součinu Lebesgueových měr
- (13) Lebesgueova míra obrazu při lineárním zobrazení
- (14) Caratheodoryho věta o vnější míře
- (15) Věta o metrické vnější míře
- (16) Luzinova věta
- (17) Hölderova nerovnost
- (18) Minkowského nerovnost
- (19) Úplnost prostoru  $L^p$
- (20) Jegorovova věta
- (21) Z posloupnosti funkcí konvergující podle míry lze vybrat podposloupnost konvergující s.v.

- (22) Radon-Nikodymova věta (důkaz případu  $\mu \leq \nu$ , konečné míry)
- (23) Radon-Nikodymova věta (důkaz obecného případu)
- (24) Existence kladné podmožiny kladné znaménkové míry
- (25) Hahn-Banachův rozklad znaménkové míry
- (26) Existence míry k dané distribuční funkci
- (27) Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry

Požadováno minimálně 15 bodů.