Cvičení - Teorie míry a integrálu 1
ZS 2023/24

Jan Kotrbatý, Jan Rataj

Požadavky k zápočtu:

- Odevzdání alespoň *pěti* zadaných domácích úkolů s řešením schváleným vedoucím cvičení
- Úspěšné řešení cvičného testu (termín bude včas oznámen)

1 Cvičení 2.-3.10.2023
Konvergence Newtonova integrálu

Připomenutí: *Newtonův integrál* z funkce f na intervalu (a, b) je definován jako rozdíl limit primitivní funkce v krajních bodech (pokud existuje):

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b_-) - F(a_+).$$

Buď funkce f *spojitá* na intervalu (a, b). Pak konvergence Newtonova integrálu $\int_a^b f$ je dána existencí vlastních limit primitivní funkce, $F(a_+)$ a $F(b_-)$.

- Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, Newtonův integrál samozřejmě existuje.
- Je-li f spojitá a *omezená* na *omezeném* intervalu (a, b), pak $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje. (Věta z přednášky MA2)

Příklad: $\int_0^1 x^a\,dx$ konverguje $\iff$ $a > -1$. $\int_1^\infty x^a\,dx$ konverguje $\iff$ $a < -1$.

Připomeňme některá kriteria konergence integrálu z přednášky MA2:

Věta 1.1 (Srovnávací kriterium pro konvergenci integrálu)**.** *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a,b)$ a nechť $f \le g$ na $[a,b)$. Jestliže $\int_a^b g$ konverguje, pak konverguje i $\int_a^b f$.*

Věta 1.2 (Limitní srovnávací kriterium pro konvergenci integrálu)**.** *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a,b)$ a nechť existuje $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$. Pak*

(a) $c \in (0,\infty) \implies [\int_a^b f$ konverguje $\iff \int_a^b g$ konverguje].

(b) $c = 0 \implies [\int_a^b g$ konverguje $\implies \int_a^b f$ konverguje].

(c) $c = \infty \implies [\int_a^b g$ diverguje $\implies \int_a^b f$ diverguje].

Pozn.: Analogická kriteria platí pro funkce spojité na intervalu $(a,b]$.

Pozn.: Newtonův integrál je "*neabsolutně konvergentní*", např. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje, ale $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty$. Lebesgueův integrál, s nímž budeme pracovat, tuto vlastnost nemá, je to *absolutně konvergentní* integrál.

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

1. $\int_0^1 \log x\,dx$,
2. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx$,
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}\,dx$,
4. $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$,
5. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\,dx$,
6. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují:

7. $\int_0^{\pi/2} (\mathrm{tg}(x))^p \, dx$,

8. $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, dx$,

9. $\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx$,

10. $\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\right) \, dx \quad (\alpha > 0)$,

11. $\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} \, dx$.

Budeme vyšetřovat konvergenci integrálu i v tomto zobecněném smyslu: Řekneme, že $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje, jestliže existují $a < c_1 < \cdots < c_k < b$ takové, že Newtonův integrál konverguje na každém z intervalů (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{k-1}, c_k), (c_k, b).

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují v uvedeném zobecněném smyslu:

12. $\int_0^1 \frac{\log|1-a^2x^2|}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

Domácí úkol č.1: (termín - 10.10.) Zjistěte, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují:

$$\int_0^1 x^s(1-x^2)^t \, dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} \, dx.$$

Řešení:

1. Funkce $\log x$ je spojitá a nekladná na $(0,1]$. U 0 porovnáme $|\log x|$ třeba s $x^{-1/2}$. Integrál konverguje.

2. Funkci porovnáme u 0 opět s funkcí $x^{-1/2}$, u 1 je funkce omezená. Integrál konverguje.

3. U 0 porovnáme s funkcí $x^{-2/3}$, u 1 je funkce omezená. Integrál konverguje.

4. U 0 porovnáme s funkcí $|\log x|$, u 1 využijeme symetrie podle $\frac{\pi}{2}$. Integrál konverguje.

5. U 1 je funkce omezená, u 1 Porovnáme třeba s $1/x$. Integrál diverguje.

6. U 0 porovn8me s funkcí $1/x$. Integrál diverguje.

7. U 0 porovnáme s x^p, konverguje $\iff p > -1$. U $\frac{\pi}{2}$ porovnáme s $(\frac{\pi}{2} - x)^{-p}$, konverguje $\iff p < 1$. Celkem integrál konverguje $\iff p \in (-1, 1)$.

8. Integrál konverguje $\iff a, b > 0$.

9. Nutně $|a| \leq 1$ (jinak funkce není def. na $(0,1)$). U 0 je funkce omezená. Pro $|a| \in (0,1)$ porovnáme funkci u 1 s $1/\sqrt{1+x^2}$, integrál konverguje. Pro $|a| = 1$ porovnáme funkci u 1 třeba s $(1-x)^{-3/4}$, integrál konverguje.

10. Funkce je kladná a spojitá na $(0, \infty)$. U 0 je funkce omezená, u ∞ porovnáme s $x^{-\alpha}$. Integrál konverguje $\iff \alpha \in (0, 1)$.

11. Protože $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, samotný integrál z $\frac{\arctan ax}{x}$ diverguje kdykoliv $a \neq 0$. Integrál tedy diverguje, pokud právě jedno z čísel a, b je nulové, nebo pokud mají opačná znaménka. V případě $a = b = 0$ integrál samozřejmě konverguje. Zbývá vyřešit případy $a, b > 0$ a $a, b < 0$. Omezíme se na $a, b > 0$, druhý případ je ekvivalentní až na znaménko. Použitím vzorečku $\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$ dostaneme
$$\frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} = \frac{1}{x} \arctan \frac{(a-b)x}{1 + abx^2}.$$
U 0 je funkce omezená, u 1 porovnáme s $(a-b)/(1+abx^2)$. Integrál konverguje.

12. Pro $|a| > 1$ musíme knvergenci zjistit na intervalech $(0, 1/|a|)$ a $(1/|a|, 1)$. U bodu $1/|a|$ Integrály konvergují, tedy i celkový integrál konverguje ve zobecněném smyslu.

2 Cvičení 9.-10.10.2023
σ-algebry, σ-obaly

Připomeňme si pojmy z přednášky: *Algebra* je systém podmnožin dané neprázdné množiny X obsahující $\emptyset$ a X a uzavřený na doplňky a konečná sjednocení. Algebra je σ-*algebrou*, je-li uzavřená i na spočetná sjednocení. σ-*obal* je nejmenší σ-algebra obsahující daný množinový systém.

1. Ukažte, že algebra je uzavřená na množinové rozdíly.

2. Ukažte, že σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky.

3. Nechť $X = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{S} = \{\{1,2\},\{4\}\}$. Popište $\sigma\mathcal{S}$.

4. Buď $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{N} : F$ konečná nebo $\mathbb{N} \setminus F$ konečná $\}$. Rozhodněte, zda $\mathcal{A}$ je algebra, σ-algebra, případně jak vypadá $\sigma\mathcal{A}$.

5. Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na nejvýše spočetné množině X. Řekneme, že množina $A \in \mathcal{A}$ je *atom* σ-algebry $\mathcal{A}$, jestliže

$$\forall B \in \mathcal{A} : \; B \cap A = \emptyset \text{ nebo } B \supset A.$$

   Ukažte, že $\mathcal{A}$ sestává ze všech sjednocení svých atomů.

6. Buď $\mathcal{B}$ σ-algebra na X, $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{B}$. Ukažte, že

$$\sigma\big(\mathcal{B} \cup \{A\}\big) = \big\{(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^C) : \; B_1, B_2 \in \mathcal{B}\big\}.$$

7. Buď $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $A_i := \{x \in X : \; x_i = 1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Položme $\mathcal{A} := \sigma\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Ukažte:

   (a) $\{x \in X : \; x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n\} \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$.

   (b) $\{x\} \in \mathcal{A}$, $x \in X$.

   (c) $\{x \in X : \; \lim_{i\to\infty} x_i = 0\} \in \mathcal{A}$.

   (d) $\{x \in X : \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = p\} \in \mathcal{A}$, $p \in [0,1]$.

   Pozn.: Prostor X můžeme interpretovat jako pravděpodobnostní prostor všech výsledků z nekonečněkrát opakovaného hodu mincí.

8. Uvažujte zobrazení $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ dané předpisem

$$f : (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}.$$

Ukažte:

(a) Množina $S \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ posloupností s *konečným* počtem jedniček je spočetná,

(b) f je prosté na $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus S$,

(c) $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus S \to (0,1]$ je bijekce,

(d) (*) obraz $f(\mathcal{A})$ σ-algebry $\mathcal{A}$ splývá s $\mathcal{B}(0,1]$ (borelovské podmnožiny $(0,1]$).

Domácí úkol č.2: úloha 6 (termín - 17.10.)

Řešení, návody:

4 $\mathcal{A}$ je algebra, ale nikoliv σ-algebra. $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, protože každou $A \subset \mathbb{N}$ lze napsat jako nejvýše spočetné sjednocení $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$.

5 Uvědomte si, že atomy tvoří nejvýše spočetný rozklad množiny X.

7 (c) $\{x : \lim x_i = 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} (X \setminus A_j)$.

(d) Pro každé n a každou množinu konfigurací $F \subset \{0,1\}^n$ je $\{x : (x_1, \dots, x_n) \in F\} \in \mathcal{A}$. Dále už vlastnost snadno dokážete z definice limity.

8 (d) f-obrazem libovolné množiny typu z příkladu 7 (a) je "dyadický" interval typu $(\frac{p-1}{2^n}, \frac{p}{2^n}]$, $p = 1, \dots, 2^i$. Dále ukažte, že každý otevřený interval $I \subset (0,1]$ je spočetným sjednocením dyadických intervalů. Dále je třeba využít toho, že borelovské podmnožiny $(0,1]$ jsou právě všechna disjunktní spočetná sjednocení relativně otevřených podintervalů intervalu $(0,1]$.

3 Cvičení 16.-17.10.2023 Nulové množiny, zúplnění míry

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

1. Rozcvička: ukažte, že pro všechny posloupnosti množin $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ platí
$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu(A_i)$$
(*subaditivita* míry).

Připomeňme si definici nulových množin:

$$\mathcal{N} := \{N \subset X : \exists A \in \mathcal{A},\, N \subset A,\, \mu(A) = 0\}.$$

2. Popište nulové množiny pro (a) Diracovu míru δ_x, (b) aritmetickou míru μ.

3. Ukažte, že každou otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}$ lze zapsat jako disjunktní sjednocení otevřených intervalů.

   (Návod: pro $G \subset \mathbb{R}$ otevřenou a $x \in G$ buď I_x maximální otevřený podinterval G obsahující x. Pak $G = \bigcup_{x \in G} I_x$ je hledané disjunktní sjednocení otevřených intervalů.)

Připomeňme si zavedení Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$: $\lambda (= \lambda^1)$ je borelovská míra na $\mathbb{R}$ splňující $\lambda(I) = |I|$ pro každý interval I ($|I|$ značí délku I). (Existence a jednoznačnost zatím nebyla dokázána.) Lebesgueova míra je *regulární* v tomto smyslu: pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbb{R}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená madmnožina $G \supset B$ a uzavřená podmnožina $F \subset B$ takové, že $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$.

Označme

$$\mathcal{C} := \left\{ A \subset \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \text{ otevřené intervaly } I_1, I_2, \dots \text{ takové, že } A \subset \bigcup_i I_i \text{ a } \sum_i |I_i| < \varepsilon \right\}.$$

4. Ukažte, že (a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$, (b) $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Tedy $\mathcal{C}$ jsou všechny lebesgueovsky nulové množiny v $\mathbb{R}$.

Nyní si dokážeme větu 2.4 z přednášky:

Věta (2.4. Zúplnění míry)**.** *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:*

1. *$\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$ (symbolem $\triangle$ značíme symetrickou diferenci množin).*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme opět μ).*
3. *V prostoru $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Důkaz. 1. Označme

$$\overline{\mathcal{A}}_0 := \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}.$$

Ukážeme nejprve, že $\overline{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra.

- Zřejmě platí $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{A}}_0$.
- Je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $A \triangle B \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, a tedy také $X \setminus B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(X \setminus B) \triangle (X \setminus A) = B \triangle A \in \mathcal{N}$ a $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- Dále, jsou-li $B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, $i \in \mathbb{N}$, pak $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$ pro nějaké $A_i \in \mathcal{A}$, a tedy také $\bigcup_i B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(\bigcup_i B_i) \triangle (\bigcup_i A_i) \subset \bigcup_i (B_i \triangle A_i) \in \mathcal{N}$.

$\overline{\mathcal{A}}_0$ je tedy σ-algebra. Pak ale ze zřejmé inkluze $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}}_0$ plyne $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma \overline{\mathcal{A}}_0 = \overline{\mathcal{A}}_0$. Opačná inkluze je snadná: je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $B \triangle A \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, tedy $B = A \cup (B \setminus A) \setminus (A \setminus B)$, přitom $B \setminus A$ i $A \setminus B$ leží v $\mathcal{N}$, tedy nutně $B \in \mathcal{A}_0$.

2. Je-li $B \in \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$ taková, že $B \triangle A \in \mathcal{N}$, položíme $\mu(B) := \mu(A)$. Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě A. Je-li $A' \in \mathcal{A}$ jiná množina s vlastností $B \triangle A' \in \mathcal{N}$, pak z inkluzí $A \setminus A' \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A') \in \mathcal{N}$ a $A' \setminus A \subset (A' \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{N}$ plyne $\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0$, a tedy $\mu(A) = \mu(A')$. Definice je tedy korektní. Ukážeme, že takto dodefinovaná množinová funkce μ je σ-aditivní. Buď (B_i) posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}_0$, označme $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, a buďte $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$. Položme $C_1 := A_1$, $C_i := A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})$, $i = 2, 3 \ldots$, $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Pak (C_i) je posloupnost po dvou

disjunktních množin z $\mathcal{A}$, tedy $\mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$. Protože množiny $C_i \triangle B_i$ a $C \triangle B$ jsou nulové, platí $\mu(B_i) = \mu(C_i)$, $i \in \mathbb{N}$, a $\mu(B) = \mu(C)$, a tedy také $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Tím je dokázáno, že μ je σ-aditivní na $\mathcal{A}_0$, a je to tedy míra.

3. Buď $M \subset X$ nulová v $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$. Ukážeme, že $M \in \mathcal{N}$ (tedy že M je nulová i v původním prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$), a tedy $M \in \mathcal{A}_0$. K množině M existuje $B \in \mathcal{A}_0$, $M \subset B$, $\mu(B) = 0$. Z definice rozšířené míry μ dále existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $B \setminus A \in \mathcal{N}$, tedy existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a $B \setminus A \subset N$. Pak ale $M \subset B \subset A \cup N \in \mathcal{A}$ a $\mu(A \cup N) = 0$, tedy $M \in \mathcal{N}$. $\square$

Domácí úkol č.3: (termín - 24.10.) - Příklad 4.

4 Cvičení 23.-24.10.2023 Abstraktní Lebesgueův integrál, záměna limity a integrálu

Cantorovo diskontinuum: Položme $C_0 := [0,1]$ a indukcí definujme množiny $C_n := \phi(C_{n-1}) \cup \psi(C_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, kde

$$\phi(t) = \frac{1}{3}t, \quad \psi(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cantorovo diskontinuum $C \subset [0,1]$ je definováno jako průnik

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

1. Ukažte, že:

   (i) $C \neq \emptyset$,

   (ii) C je nespočetná množina,

   (iii) C je nulová (vzhledem k Lebesgueově míře).

Připomenutí - definice abstraktního Lebesgueova integrálu na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2. Čemu se rovná $\int f \, d\delta_x$, je-li δ_x *Diracova míra* v bodě $x \in X$?

3. Čemu se rovná $\int f \, d\mu$, je-li μ *aritmetická míra* na $\mathbb{N}$?

4. K funkci $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ a $f(x) = 0$ jinak, najděte posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $s_n \nearrow f$, a pomocí ní spočtěte $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$.

5. Totéž jako v předchozím příkladu, ale s funkcí $f(x) = 2^x$, $x \in [0,1]$.

6. Ukažte, že pro Dirichletovu funkci $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$, a $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, platí $\int g \, d\lambda = 0$.

Připomenutí z přednášky:

Leviho věta : Pro *nezáporné* měřitelné funkce f_n platí:

$$f_n \nearrow f \implies \int_X f_n \, d\mu \nearrow \int_X f \, d\mu.$$

Značení:

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_{(a,b)} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \chi_{(a,b)} \, d\lambda.$$

7. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin x(1 - (\frac{x}{\pi})^n) \, dx$.

Důsledek zobecněné Leviho věty (bude na přednášce): Pro měřitelné funkce f_n platí:

$$\int_X f_1 \, d\mu < \infty, \quad f_n \searrow f \implies \int_X f_n \, d\mu \searrow \int_X f \, d\mu.$$

V následujících příkladech ověřte, zda lze provést záměnu limity a integrálu:

8. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} \, dx$,

9. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} \, dx$,

10. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x(1-x)^n \, dx$.

Domácí úkol č.3: (termín - 31.10.) - Příklad 10.

Návody:

1(ii) Uvažte funkci $x \mapsto \sum_{i=1}^\infty \frac{2x_i}{3^i}$, $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

1(iii) Určete $\lambda(C_n)$.

2 $\int f \, d\delta_x = f(x)$.

3 $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$, pokud suma konverguje absolutně.

7 Použijte monotonie: $\sin x(1-(\frac{x}{\pi})^n) \nearrow \sin x$, $x \in (0,\pi)$.

8 Ukažte, že $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \searrow 0$ na $(0,1)$. Monotonii ukažte buď přímým porovnáním sousedních členů, nebo derivováním $\frac{d}{dt}\frac{x^t}{1+x^{2t}}$.

9 Jako v předchozím příkladu. Použijte faktu $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} < \infty$.

5 Cvičení 30.-31.10.2023 Záměna limity a integrálu, sumy a integrálu

1. Ukažte, že pro $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ platí monotonie: $f \leq g \implies \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$. (Z přednášky to víme pro *nezáporné* měřitelné funkce.)

2. Ukažte: Je-li funkce f měřitelná a $|f| \leq g$ pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

3. Nechť je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *úplný*. Ukažte, že z rovnosti $f = g$ s.v. plyne: [f je měřitelná $\iff$ g je měřitelná.]

4. Najděte posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí s_n na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ takových, že $s_n \searrow 0$, ale $\int s_n\, d\lambda \not\to 0$.

5. Je možné takovou posloupnost s_n najít na prostoru $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda|[0,1])$ (Lebesgueova míra restringovaná na interval $[0,1]$)?

6. Pro funkce $f_n(x) = n$, $x \in (0, \frac{1}{n})$, a $f_n(x) = 0$ jinak, platí: $f_n(x) \to 0$ bodově, ale $\int_0^1 f_n\, d\lambda^1 \not\to 0$. Proč zde nelze použít Leviho větu?

Teoretické prostředky (připomenutí):

- (Linearita integrálu) Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu, \quad \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,$$

  má-li pravá strana smysl.

- (zobecněná) Leviho věta a její důsledky:
  - Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \nearrow f$ a $\int f_1\, d\mu > -\infty$, pak $\int f_n\, d\mu \nearrow \int f\, d\mu$.
  - Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \searrow f$ a $\int f_1\, d\mu < \infty$, pak $\int f_n\, d\mu \searrow \int f\, d\mu$.
  - Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

- Lebesgueova věta o konvergentní majorantě a její důsledek:
  - Buďte f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.
  - Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leq g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a
$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

7. Dokažte následující tvrzení:

Tvrzení. *Jsou-li f_n měřitelné funkce na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$, pak*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu.$$

Vypočtěte následující integrály rozvojem funkce do řady. Zdůvodněte záměnu sumy a integrálu:

8. $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} \, dx$,
9. $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} \, dx$,
10. $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} \, dx$,
11. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} \, dx$.

Domácí úkol č. 5: (termín - 7.11.) Spočtěte pomocí rozvoje do řady. Zdůvodněte záměnu sumy a integrálu:
$$(i) \int_0^1 \frac{x \log \frac{1}{x}}{1 - x^2} \, dx, \quad (ii) \int_0^{\infty} \log(1 + e^{-x}) \, dx.$$

Návody:

1 Uvažujte rozdíl $g - f \geq 0$.

3 Využijte měřitelnosti množiny $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$.

4 Třeba $s_n = \chi_{(n,\infty)}$.

5 Ne, zde musí být $\int_0^1 s_1 < \infty$.

7 Použijte větu o itegrovatelné majorantě s majorantou $g = \sum_n |f_n|$.

8 Rozviňte $\frac{1}{1-e^{-x}}$ jako geometrickou řadu.

9 Rozviňte $\frac{1}{1+e^{-x}}$ jako geometrickou řadu.

10 Použijte Taylorův rozvoj funkce $\log(1-x)$ v $x = 0$.

11 Použijte Taylorův rozvoj funkce $\log(1+x)$ v $x = 0$.

6 Cvičení 6.-7.11.2023 Integrály závislé na parametru

Připomenutí vět:

Věta (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. pro všechna $t \in T$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá na T.

Věta (Záměna integrálu a derivace)**.** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,*

(ii) *existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a pro všechna $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t, x)$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$,*

(iv) *existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí

$$F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x)\, d\mu(x), \quad t \in I.$$

1. Ukažte, že funkce $F : t \mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\, dx$ je spojitá na $[0, \infty)$.

2. Ukažte, že funkce $F : t \mapsto \int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx$ je spojitá na $(0, \infty)$ a $\lim_{t \to 0_+} F(t) = \infty$.

3. Najděte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce

$$F : a \mapsto \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(Definičním oborem je zde myšlena množina všech hodnot $a \in \mathbb{R}$, pro něž uvedený Lebesgueův integrál konverguje.)

4. Najděte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce

$$F : a \mapsto \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^a}\, dx.$$

5. Funkce *Gamma* je definovaná předpisem

$$\Gamma : s \mapsto \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

Ukažte, že:

(a) Funkce Gamma je definovaná a spojitá na intervalu $(0, \infty)$,

(b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s > 0$,

(c) $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k = 1, 2, \ldots$,

(d) $\lim_{s \to 0_+} \Gamma(s) = \lim_{s \to \infty} \Gamma(s) = \infty$,

(e) $\Gamma'(s) = \int_0^\infty (\log x) x^{s-1} e^{-x}\, dx$, $s > 0$.

6. Pro funkci

$$F : a \mapsto \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x}\, dx$$

najděte definiční obor, spočtěte $F'(a)$ a následně $F(a)$.

Domácí úkol č. 6: (termín - 14.11.) Pro následující funkce najděte definiční obor a vyšetřete spojitost:

$$(i)\ F(a) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx, \quad (ii)\ G(b) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-bx}\,dx.$$

Návody:

1. Majoranta $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. Majorantu hledejte na intervalu $[\varepsilon, \infty) \subset (0, \infty)$ (proč to stačí?) Pro limitu v 0 použijte (a zdůvodněte) verzi Leviho věty pro spojitou limitu.
3. $\mathcal{D}_F = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, majoranta na $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$.
4. $\mathcal{D}_F = (2, \infty)$, majoranta na $[2 + \varepsilon, \infty)$.
5. a. majoranta na $[\varepsilon, K] \subset (0, \infty)$
   b. použijte per partes
   c. ukažte indukcí pomocí (b)
   d. použijte Leviho větu (pro spojitou limitu)
   e. použijte větu o záměně integrálu a derivace na intervalu (ε, K)
6. $\mathcal{D}_F = [0, \infty)$, $F'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1}$, tedy $F(a) = \log(a+1) + C$, $a > 0$. F je spojitá v 0 zprava (zdůvodněte) a $F(0) = 0$, tedy $C = 0$ a $F(a) = \log(a + 1)$, $a \geq 0$.

7 Cvičení 13.-14.11.2023 Integrály závislé na parametru, Fubiniova věta

Spočtěte derivováním podle parametru:

1. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx,$$

2. $$\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx,$$

3. $$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx.$$

Domácí úkol č. 7: (termín - 21.11.) Spočtěte derivováním podle parametru pro $a, b > 0$:

$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx.$$

Výsledky:

1. $F'(a) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{|a|+1}$, $F(a) = \frac{\pi}{2}\log(|a|+1)\operatorname{sgn}(a)$, $a \in \mathbb{R}$.
2. $F'(a) = \pi/\sqrt{1-a^2}$, $F(a) = \pi \arcsin a$, $a \in (-1,1)$.
3. $\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$, $F(a,b) = \arctan\frac{b}{a} + C(a)$, $F(a,0) = 0 \implies C(a) = 0$, $F(a,b) = \arctan\frac{b}{a}$, $a > 0$.

8 Cvičení 20.-21.11.2023

Fubiniova věta :

- Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí
$$\int f(x,y)\,d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy.$$
kde $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.
- Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí
$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\,dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\,dy,$$
kde $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ jsou projekce.
- Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí
$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

1. Ukažte, že pro každou přímku $P \subset \mathbb{R}^2$ a kružnici $K \subset \mathbb{R}^2$ platí $\lambda^2(P) = \lambda^2(K) = 0$.
2. Spočtěte $\lambda^2\{(x,y) : \ x^2 + y^2 < 6\}$.
3. Spočtěte $\lambda^2\{(x,y) : \ 0 < xy^2 < 1,\ x^2 < y\}$.
4. Spočtěte $\int_{x^2+y^2 \le 1} \frac{d(x,y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
5. Spočtěte $\lambda^3\{(x,y,z) : \ \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$.
6. Spočtěte $\int_{(0,\infty)^2} \frac{d(x,t)}{(1+t)(1+tx^2)}$ dvěma způsoby s využitím Fubiniovy věty. Odvoďte vztah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
7. Je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná a taková, že
$$\int \int |f(x,y)|\,dx\,dy < \infty \text{ nebo } \int \int |f(x,y)|\,dy\,dx < \infty,$$
pak $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ a lze tedy použít Fubiniovu větu pro f.

8. Fubiniova věta jako alternativa k derivování podle parametru: Pomocí Fubiniovy věty spočtěte $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx$.

9. Co říká Fubiniova věta o prohození sumy a integrálu?

Domácí úkol č. 8: (termín - 28.11.) S využitím Fubiniovy věty spočtěte ($R > 0$ je daný parametr)

$$\lambda^3\{(x, y, z) : x > 0,\, y > 0,\, x^2 + y^2 < R^2,\, 0 < z < xy\}.$$

Výsledky:

3. $\pi_1 A = (0, 1)$, $A_x = (x^2, x^{-1/2})$, $0 < x < 1$, $\lambda^2(A) = \frac{5}{3}$.

4. 2π.

5. $\lambda^3(A) = \int_0^1 \lambda^2(A^z)\, dz = \int_0^1 \pi z^2\, dz = \frac{\pi}{3}$.

6. (i) $I = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots dx\, dt = \frac{\pi^2}{2}$; $I = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots dt\, dx = 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\, dx = 4 \int_0^1 \frac{-\log x}{1-x^2} dx$ (substituce $y = \frac{1}{x}$ na $(1, \infty)$), dále rozvojem geometrické řady $\int_0^1 \frac{-\log x}{1-x^2} dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

8. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx = \int_0^\infty \int_0^b e^{-ax} \cos(yx)\, dy\, dx = \int_0^b \int_0^\infty e^{-ax} \cos(yx)\, dx\, dy = \int_0^b \frac{a}{a^2+y^2}\, dy = \arctan \frac{b}{a}$.

9. Použijte větu pro součin Lebesgueovy a aritmetické míry.

9 Cvičení 27.-28.11.2023 Fubiniova věta, věta o substituci

Věta o substituci - připomenutí:

Věta 9.1. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

1. Spočtěte
$$\lambda^2\{(x,y) :\ y \le x^2 \le 4y,\ 2x \le y^2 \le 3x\}$$
(a) přímo pomocí Fubiniovy věty, (b) s využitím substituce $u = y^2/x$, $v = x^2/y$.

2. S využitím *polárních souřadnic* $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ spočtěte:
   (a) $\lambda^2\{(x,y) :\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,
   (b) $\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{d(x,y)}{1-x^2-y^2}$,
   (c) $\lambda^2\{(x,y) :\ (x^2+y^2)^2 \le 2a^2(x^2-y^2)\}$.

3. Funkce *Beta* je definovaná předpisem
$$B : (s,t) \mapsto \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx.$$
Ukažte, že funkce Beta je definovaná a spojitá na množině $(0,\infty)^2$. Odvoďte vztah
$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \quad s,t > 0.$$
(Vyjádřete součin $\Gamma(s)\Gamma(t)$ jako dvojný integrál $(d(x,y))$ a použijte substituci $x = zv$, $y = z(1-v)$.)

4. Integrací $\iint e^{-x^2-y^2}\, d(x,y)$ s využitím polárních souřadnic odvoďte hodnotu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Domácí úkol č.9: (termín - 5.12.2023) Spočtěte

$$\lambda^2\{(x,y):\ (x^2+2y^2)^2 \le x^2y\}.$$

(Použijte variantu polárních souřadnic $x = ar\cos t$, $y = br\sin t$.)

Výsledky:

1. $\lambda^2(A) = 1$ (substituce $\varphi(u,v) = (u^{1/3}v^{2/3}, u^{2/3}v^{1/3})$, $\mathcal{J}\varphi(u,v) = -\frac{1}{3}$).
2. (a) 3π, (b) ∞, (c) $2a^2$.
4. $\sqrt{\pi}$.

10 Cvičení 4.-5.12.2023 Zápočtový test; věta o substituci

1. S pomocí *válcových souřadnic* $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = s$ spočtěte
$$\lambda^3\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2 \le 2,\, x^2+y^2+z^2 \le 2z\}.$$

2. *Sférické souřadnice* jsou dány předpisem
$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi,$$
$r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Zobrazení je regulární, doplněk jeho obrazu má nulovou Lebesgueovu míru a Jakobián je roven $r^2\cos\psi$.

3. Spočtěte míru množiny z příkladu 2 pomocí sférických souřadnic.

Výsledek: $\lambda^3(M) = \pi(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 1)$.

11 Cvičení 11.-12.12.2023

1. Spočtěte $\iint_M \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\, d(x,y)$, kde
$$M = \{(x,y):\, x>0,\, y>0,\, \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\}.$$

2. Spočtěte
$$\lambda^3\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2\le 1,\, x+2y+2z\le 2\}.$$

3. Spočtěte $\lambda^3(M)$ pro
$$M = \{(x,y,z):\, x^2+y^2\le 2az,\, x^2+y^2+z^2\le 3a^2\}$$
($a>0$ je pevný parametr).

4. Ukažte následující tvrzení: *Jestliže $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na prostoru s konečnou mírou μ, pak existuje vybraná podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j}\to f$ μ-s.v.*

Domácí úkol č.10: (termín - 19.12.2023) Spočtěte:
$$\lambda^3\{(x,y,z):\, (x+y+z)^2\le ay,\, x>0, y>0, z>0\}.$$

(Nápověda: použijte substituci $x=r\cos^2\varphi\cos^2\psi$, $y=r\sin^2\psi$, $z=r\sin^2\varphi\cos^2\psi$.)

Návody, řešení:

1. Použijte substituci $x = r\cos^4 t$, $y = r\sin^4 t$, $r > 0$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{J}\varphi(r,t) = 4r\sin^3 t\cos^3 t$, výsledek je $\frac{4}{27}$.

2. Druhou podmínku v popisu množiny můžeme zapsat jako $\langle (x,y,z), u\rangle \leq \frac{2}{3}$, kde u je jednotkový vektor. Použijte rotaci v $\mathbb{R}^3$, která vektor u zobrazí na $(0,0,1)$. Rotace nemění Lebesgueovu míru, proto můžeme počítat ekvivalentně míru množiny

$$\{(x,y,z) : \, x^2+y^2+z^2 \leq 1, \, z \leq \tfrac{2}{3}\},$$

a pomocí Fubiniovy věty snadno dostaneme $\lambda^3(M) = \pi\frac{100}{81}$.

3. Použijte válcové souřadnice ($x = r\cos t, y = r\sin t$). Transformovaná množina je popsaná nerovnostmi $r \leq \sqrt{2az}$ pro $0 \leq z \leq a$ a $r \leq \sqrt{3a^2 - z^2}$ pro $a \leq z \leq \sqrt{3}a$. Výsledek je $\pi a^3(2\sqrt{3} - \frac{5}{3})$.

4. Ke každému $j \in \mathbb{N}$ existuje $n_j \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu\{|f_n - f| \geq 2^{-j}\} < 2^{-j}$ kdykoliv $n \geq n_j$. Položte $A_j := \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}$, $A := \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$, a ukažte, že $\mu(A) = 0$.

12 Cvičení 18.-19.12.2023

1. Spočtěte
$$\lambda^3\{2x^2 - y^2 + z^2 \le 2z,\ |y| \le 1\}.$$

2. *Sférické souřadnice v* $\mathbb{R}^n$: Zobrazení $\varphi_n : U \to \mathbb{R}^n$ je dáno předpisem
$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_{n-1}\\
x_2 &= r\sin\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_{n-1}\\
x_3 &= r\sin\alpha_2\dots\cos\alpha_{n-1}\\
&\dots\\
x_n &= r\sin\alpha_{n-1},
\end{aligned}$$
$r > 0$, $\alpha_1 \in (-\pi, \pi)$, $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ověřte, že φ_n je difeomorfismus, určete jeho obraz a spočtěte Jakobián.

3. Výpočet objemu jednotkové koule B_n v $\mathbb{R}^n$, $\omega_n := \lambda^n(B_n)$:
   (a) Ukažte pomocí Fubiniovy věty rekurentní vztah
   $$\omega_n = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}, n \ge 3.$$
   (b) Ukažte, že
   $$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Konvergence integrálů více proměnných: Vyšetřete konvergenci integrálů:
$$\iint_{\{x^2+y^2>1\}} \frac{d(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha},$$
$$\iint_{[0,1]^2} \frac{d(x,y)}{(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)^\alpha}$$
v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Domácí úkol č.11: (termín - 21.12.2020) Spočtěte:

$$\iiint_M e^{y^2}\, d(x,y,z),$$

kde $M = \{(x,y,z) : 2x^2 + 3z^2 < y < 4\}$.

Návody, výsledky:

1. válcové souřadnice ve tvaru $x = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos t$, $z = 1 + r\sin t$, výsledek je $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

2. φ_n je zřejmě třídy C^1, prostotu lze ukázat indukcí podle dimenze n, $\varphi(U) = \mathbb{R}^n \setminus ((-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2})$. Jakobián vyjde (rozvojem determinantu podle posledního řádku)

$$\mathcal{J}_n(r,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}) = r^{n-1}\cos\alpha_2\cos^2\alpha_3\ldots\cos^{n-2}\alpha_{n-1}.$$

3. Počítejte

$$\lambda^n(B_n) = \int_{B_2} \lambda^{n-2}((B_n)_{(x,y)})\, d(x,y),$$

kde řez $(B_n)_{(x,y)}$ je koule dimenze $n-2$ o poloměru $\sqrt{1-x^2-y^2}$. Vztah v (b) ověřte nejprve pro $n=1$ a $n=2$, a dále indukcí podle n.

4. V prvním příkladu použijte polární souřadnice a Fubiniovu větu (proč to lze?), integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$. V druhém příkladu lze použít nerovnosti

$$c(y^2+x^2) \le y^2\cos^2 x + \sin^2 x \le y^2 + x^2$$

pro vhodné $c > 0$, $0 \le x \le 1$, a příklad tak lze převést na otázku konvergence $\int (x^2+y^2)^{-\alpha}\, d(x,y)$ na okolí počátku, což pomocí polárních souřadnic a Fubiniovy věty vychází pro $\alpha < 1$.

13 Cvičení 8.-9.1.2024

1. Ukažte, že $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2. Drobnou modifikcí důkazu ukažte následující zobecnění Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě:

   Jsou-li f_n, f měřitelné funkce na $(X, \mathcal{A}, \mu)$ takové, že $f_n \to f$ μ-s.v. a $|f_n| \leq g$ s.v., $n \in \mathbb{N}$, pro nějakou funkci $g \in L^1(\mu)$, pak $f_n \to f$ v prostoru $L^1(\mu)$.

3. Ukažte, že v metrickém prostoru (X, d), kde $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|/2^i$, platí:

   (a) pro $x^{(n)}, x \in X$ platí $x^{(n)} \to x$ právě tehdy, když $x_i^{(n)} \to x_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

   (b) Prostor X je kompaktní.

   (c) Je-li $\Pi_n : X \to \{0,1\}^n$ projekce do prvních n souřadnic a $B \subset \{0,1\}^n$, pak množina $\Pi_n^{-1}(B)$ je zároveň otevřená i uzavřená v X.

4. Zobrazení $f : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ je definováno jako

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}.$$

   Posloupnost x je "trojkovým rozvojem" čísla $f(x)$. Ověřte následující vlastnosti:

   (a) zobrazení f je *na* $[0,1]$.

   (b) jestliže $f(x) = f(y)$, pak buď $x = y$, nebo

$$x = x_1 \ldots x_n x_{n+1} 000 \ldots, \quad y = x_1 \ldots x_n y_{n+1} 2222 \ldots$$

   (nebo naopak) pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1,2\}$ a $x_{n+1} = y_{n+1} + 1$.

   (c) Cantorovo discontinuum C (z 4. cvičení) je obrazem množiny $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ při f.

Návody, výsledky:

1 Integrál $\Gamma(\frac{1}{2})$ převeďte vhodnou substitucí na Laplaceův integrál $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

3 (b) Ukažte metodou diagonálního výběru, že z každé posloupnosti v X lze vybrat konvergentní podposloupnost. (c) Ukažte, že je-li $d(x,y) < 2^{-n}$, pak $\Pi_n(x) = \Pi_n(y)$.

4 (a) Body $\frac{k}{3^i}$ tvoří hustou podmnožinu $[0,1]$. (b) Použijte rovnost $\frac{1}{3^n} = \sum_{i=n+1}^\infty \frac{2}{3^i}$. (c) Popište aproximující množiny C_n z 4. cvičení pomocí trojkových rozvojů.