MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 PRO BIOINFORMATIKY
LS 2019/20

Přednáška 21.2.2020

1. Primitivní funkce a Newtonův integrál

Definice 1.1. *Řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, jestliže $F' = f$ na I. (V případě uzavřeného či polouzavřeného intervalu I uvažujeme v krajních bodech jednostranné derivace.)*

Pozn.: Je-li F primitivní funkce k funkci f na I, pak rovněž $F + C$ je primitivní funkcí k funkci f na I, pro každou konstantu $C \in \mathbb{R}$.

Věta 1.1. *Jsou-li F_1, F_2 dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu I, pak $F_1 - F_2$ je konstantní funkce na I.*

[Důkaz]

Značení: Je-li $F' = f$ na I, píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Pozn.

(1) Ne každá funkce má primitivní funkci (př. - funkce $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, nemá primitivní funkci na $\mathbb{R}$).
(2) Každá spojitá funkce na I má na I primitivní funkci (bude později).
(3) I nespojitá funkce může mít primitivní funkci (př. - $F(0) = 0$, $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $F'(x)$ existuje vlastní na $\mathbb{R}$ a je nespojitá v 0).
(4) Derivace funkce má vždy Darbouxovu vlastnost (tzn. jestliže existuje vlastní $F' = f$ na I a $f(x) < u < f(y)$, resp. $f(x) > u > f(y)$, pro nějaké body $x < y$ z I, pak existuje $c \in (x, y)$ takový, že $f(c) = u$).

Věta 1.2 (Linearita primitivní funkce)**.** *Jsou-li F, G primitivní funkce k funkcím f, g na intervalu I a jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ na $\mathbb{R}$.*

[Důkaz]

Věta 1.3 (Integrace per partes)**.** *Nechť funkce f, g mají vlastní derivace na intervalu I a nechť F je primitivní funkcí k funkci $f'g$ na I. Pak $G = fg - F$ je primitivní funkcí k funkci fg' na I.*

[Důkaz]

Věta 1.4 (První věta o substituci)**.** *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a nechť funkce $\varphi : J \to I$ má vlastní derivaci na intervalu J. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu J.*

[Důkaz]

Věta 1.5 (Druhá věta o substituci)**.** *Nechť zobrazení $\varphi : J \to I$ intervalu J na interval I je surjektivní a nechť má vlatní nenulovou derivaci na J. Je-li G primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu J, pak $G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci f na I.*

[Důkaz]

Pozn.: Z předpokladů plyne, že funkce φ je buď rostoucí, nebo klesající na intervalu J.

Primitivní funkce k racionální funkci. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

(1) Částečně vydělíme na tvar $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde stupeň polynomu P_2 je menší než stupeň Q.
(2) Rozložíme polynom Q na polynomy stupně jedna a polynomy stupně dva bez reálných kořenů:
$$Q(x) = c\prod_{i=1}^{m}(x - r_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{n}(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}.$$
(3) Provedeme rozklad na parciální zlomky:
$$\frac{P_2(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k_i} \frac{A_i^p}{(x - r_i)^p} \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{l_j} \frac{B_j^q x + C_j^q}{(x^2 + b_j x + c_j)^q}.$$
(4) Najdeme primitivní funkce k parciálním zlomkům.

Příklady substitucí vedoucích na racionální funkci.

(1) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, kde R je racionální funkce dvou proměnných: $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, někdy lze též použít $y = \operatorname{tg} x$ nebo $y = \sin x$ či $y = \cos x$.
(2) $\int R(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx$: $y = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (Eulerova substituce prvního typu).
(3) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, přitom ax^2+bx+c nemá reálné kořeny: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x + t$ (Eulerova substituce druhého typu).

Definice: Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci F na (a, b) $(a, b \in \mathbb{R}^*)$. Nechť existují vlastní limity $F(b_-) = \lim_{x\to b_-} F(x)$ a $F(a_+) = \lim_{x\to a_+} F(x)$. Pak definujeme *Newtonův integrál* z funkce f na intervalu (a, b) jako
$$(\mathrm{N})\int_a^b f = (\mathrm{N})\int_a^b f(x)\, dx = F(b_-) - F(a_+).$$
Je-li $a > b$, klademe $(\mathrm{N})\int_a^b f = -(\mathrm{N})\int_b^a f$. Pro $a = b$ definujeme $(\mathrm{N})\int_a^a f = 0$. Je-li zřejmé, že se jedná o Newtonův integrál, vynecháváme symbol (N). Rovněž používáme zkráceného značení $[F]_a^b = F(b_-) - F(a_+)$.

Pozn.:

(1) Hodnota Newtonova integrálu je zřejmě jednoznačně určena, pokud existuje.
(2) Je-li F primitivní funkcí k funkci f na omezeném intervalu $[a, b]$, pak $(\mathrm{N})\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Věta 1.6 (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na intervalu (a, b). Pak*
$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx,$$

je-li pravá strana definována (konečná).

Věta 1.7 (První věta o substituci pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce $\varphi : (\alpha, \beta) \to I$ má vlastní derivaci na intervalu (α, β) a nechť funkce f je definována na intervalu I. Pak*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha_+)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)\,dx,$$

je-li pravá strana definována.

Věta 1.8 (Druhá věta o substituci pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je na, má vlastní nenulovou derivaci na intervalu (α, β) a nechť funkce f je definována na intervalu (a, b). Pak*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

je-li pravá strana definována.

Přednáška 28.2.2020

2. Riemannův integrál

Definice: *Dělením* uzavřeného intervalu $[a,b]$ rozumíme konečnou množinu bodů

$$\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Norma dělení $\mathcal{D}$ je definována jako

$$\nu(\mathcal{D}) = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}).$$

Dělení $\mathcal{D}'$ nazveme *zjemněním* dělení $\mathcal{D}$, jestliže každý dělící bod dělení $\mathcal{D}$ je rovněž dělícím bodem dělení $\mathcal{D}$.
Definice: Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce a $\mathcal{D}$ dělení $[a,b]$ ve tvaru (1). *Dolní* a *horní Riemannův součet* funkce f odpovídající dělení $\mathcal{D}$ je (po řadě)

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), \\ S(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x). \end{aligned}$$

Dolní a *horní Riemannův integrál* funkce f přes interval $[a,b]$ je definován po řadě jako

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\mathcal{D}} s(f,\mathcal{D}), \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_{\mathcal{D}} S(f,\mathcal{D}).$$

Jsou-li si horní a dolní Riemannův integrál rovny, nazýváme jejich společnou hodnotu *Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $[a,b]$, a značíme (R) $\int_a^b f$ nebo (R) $\int_a^b f(x)\,dx$. V této kapitole budeme symbol (R) často vynechávat a integrál pak vždy budeme chápat jako Riemannův.
Pozn.: Zřejmě platí

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}) \le (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

pro každé dělení $\mathcal{D}$, tedy

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \le (b-a)\sup_{[a,b]} f.$$

Tvrzení 2.1. *Je-li $\mathcal{D}'$ zjemněním dělení $\mathcal{D}$, platí $s(f,\mathcal{D}) \le s(f,\mathcal{D}')$ a $S(f,\mathcal{D}) \ge S(f,\mathcal{D}')$.*

[Důkaz]

Důsledek 2.2. (1) *Pro libovolná dvě dělení $\mathcal{D},\mathcal{D}'$ platí $s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D}')$.*
(2) $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

[Důkaz]

Věta 2.3 (Nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu)**.** *Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak* (R) $\int_a^b f$ *existuje právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \text{ dělení } \mathcal{D}) : S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Příklady:

(1) (R) $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

(2) Dirichletova funkce f je definována jako $f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Platí $\underline{\int_a^b} f = 0$ a $\overline{\int_a^b} f = 1$, tedy (R) $\int_0^1 f$ neexistuje.

Věta 2.4. *Nechť existují Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ a platí*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

[Důkaz]

Tvrzení 2.5. *Je-li $f \leq g$ na $[a, b]$ a existují-li Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$, platí $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Důsledek: Je-li $f \geq 0$ na $[a, b]$, pak $\int_a^b f \geq 0$, pokud existuje.

Tvrzení 2.6. *Nechť existují Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^c f$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Tvrzení 2.7. *Nechť existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. Pak existuje $\int_\alpha^\beta f$ pro všechna $a \leq \alpha < \beta \leq b$.*

Tvrzení 2.8. *Riemannův integrál se nezmění, předefinujeme-li funkci v konečně mnoha bodech.*

[Důkaz]

Tvrzení 2.9. *Existuje-li Riemannův integrál z funkce f na intervalu $[a, b]$, existují i Riemannovy integrály z kladná a záporné části f^+ a f^-, a z absolutní hodnoty $|f|$, a platí $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

[Důkaz]

Přednáška 6.3.2020

Věta 2.10. *Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I a nechť pro všechna $x, y \in I$ existuje* $(\mathrm{R})\int_x^y f$. *Zvolme pevně bod $a \in I$ a označme* $F(x) = (\mathrm{R})\int_a^x f$. *Pak*

(i) *funkce F je spojitá na I;*
(ii) *je-li funkce f spojitá v bodě x, platí $F'(x) = f(x)$;*
(iii) *pro libovolný interval $[x, y] \subseteq I$ platí* $(\mathrm{R})\int_x^y f = F(y) - F(x)$.

[Důkaz]

Věta 2.11. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, existuje* $(\mathrm{R})\int_a^b f$.

[Důkaz později]

Důsledek 2.12. (1) *Každá spojitá funkce má primitivní funkci.*
(2) *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, existují Riemannův i Newtonův integrál z f rovnají se.*

Věta 2.13 (První věta o střední hodnotě)**.** *Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$ a nechť $g \geq 0$ na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

[Důkaz]

Věta 2.14 (Druhá věta o střední hodnotě)**.** *Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, nechť g je monotónní a existuje spojitá derivace g' na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f.$$

[Důkaz]

Konvergence Newtonova integrálu. Buď funkce f spojitá na intervalu (a, b). Pak existence (konvergence) Newtonova integrálu $\int_a^b f$ je dána existencí vlastních limit primitivní funkce, $F(a_+)$ a $F(b_-)$. (Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, Newtonův integrál samozřejmě existuje.)

Pozn.: Bolzano-Cauchyova podmínka pro existenci vlastní limity funkce dává následující kriterium: Newtonův integrál ze spojité funkce f na intervalu $[a, b)$ konverguje právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists v < b)(\forall x, y \in (v, b)) \ \left| \int_x^y f \right| < \varepsilon.$$

(Analogicky pro funkci spojitou na intervalu $(a, b]$.)

Příklad: $\int_0^1 x^a \, dx$ konverguje $\iff a > -1$. $\int_1^\infty x^a \, dx$ konverguje $\iff a < -1$.

Tvrzení 2.15. *Je-li f spojitá a omezená na omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f$ konverguje.*

Věta 2.16 (Srovnávací kriterium pro konvergenci intergrálu)**.** *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a, b)$ a nechť $f \leq g$ na $[a, b)$. Jestliže $\int_a^b g$ konverguje, pak konverguje i $\int_a^b f$.*

[Důkaz]

Věta 2.17 (Limitní srovnávací kriterium pro konvergenci intergrálu)**.** *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a, b)$ a nechť existuje* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$. *Pak*

(a) $c \in (0, \infty) \implies [\int_a^b f$ konverguje $\iff \int_a^b g$ konverguje $]$.
(b) $c = 0 \implies [\int_a^b g$ konverguje $\implies \int_a^b f$ konverguje $]$.
(c) $c = \infty \implies [\int_a^b g$ diverguje $\implies \int_a^b f$ diverguje $]$.

Pozn.: Analogická kriteria platí pro funkce spojité na intervalu $(a, b]$.
Příklad: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje, ale $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ diverguje.

Přednáška 13.3.2020 (distanční forma)

Následující věta dává do přímé souvislosti konvergenci integrálu a řady.

Věta 2.18 (Integrální kriterium konvergence řady)**.** *Buď funkce f spojitá, nezáporná a nerostoucí na intervalu $[1,\infty)$. Pak*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konverguje } \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konverguje }.$$

Důkaz. Funkce f je spojitá na $[1,\infty)$, má tedy promitivní funkci F. Můžeme bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládat, že $F(1)=0$.

Označíme-li f_n restrikci f na interval $[1,n]$ a $\mathcal{D}_n$ dělení $\{1<2<3\cdots<n-1<n\}$, platí pro dolní a horní Riemannův součet

$$s(f_n,\mathcal{D}_n)=f(2)+f(3)+\cdots+f(n),\quad S(f_n,\mathcal{D}_n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

(využíváme monotonie funkce f). Riemannův integrál z f_n existuje a musí tedy splňovat

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\le\int_1^n f(x)\,dx=F(n)\le f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1).$$

V důsledku toho platí ($n\to\infty$)

$$\sum_{k=2}^\infty f(k)\le\lim_{n\to\infty}F(n)\le\sum_{k=1}^\infty f(k),$$

z čehož už plyne dokazovaná ekvivalence. □

Příklad: $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$ diverguje, ale $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^2}$ konverguje. Skutečně, použitím substituce $y=\log x$, $dy=x^{-1}dx$ dostaneme

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}=\int_{\log 2}^\infty \frac{dy}{y}=\infty,$$

ale

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log^2 x}=\int_{\log 2}^\infty \frac{dy}{y^2}<\infty.$$

Aplikace integrálu.

Délka křivky. Parametrizovanou křivkou rozumíme zobrazení

$$\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):I\to\mathbb{R}^n$$

z intervalu I do $\mathbb{R}^n$ takové, že jednotlivá zobrazení φ_j (souřadnice) jsou spojitá na I. Je-li

$$\mathcal{D}=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b\}$$

dělení intervalu $[a,b]$, značíme

$$\ell(\varphi,\mathcal{D})=\sum_{i=1}^k\|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\|$$

délku lomené čáry procházející body $\varphi(t_0)$, $\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_k)$ na křivce, přitom

$$\|u\|=\sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}$$

značí euklidovskou normu vektoru $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Délku křivky φ definujeme jako

$$\ell(\varphi) = \sup_{\mathcal{D}} \ell(\varphi, \mathcal{D}).$$

Věta 2.19. *Existují-li spojité derivace φ_j' na $[a, b]$, $j = 1, \dots, n$, platí*

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n \varphi_j'(t)^2} \, dt.$$

[Bez důkazu]

Plocha mezi grafy funkcí. Je-li množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ dána předpisem

$$M = \{(x, y) : x \in [a, b], \ f(x) \le y \le g(x)\},$$

kde f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$, přitom $f \le g$, pak plošný obsah množiny M je roven

$$A(M) = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

Objem rotačního tělesa. Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ nezáporná spojitá funkce a množina $T \subseteq \mathbb{R}^3$ buď dána předpisem

$$T = \{(x, y, z) : x \in [a, b], \ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}$$

(T vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x). Pak objem tělesa T je roven

$$V(T) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Povrch rotačního tělesa. Počítá se podle vzorce

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx,$$

za předpokladu existence spojité derivace funkce f na $[a, b]$.

Přednáška 20.3.2020 - nahrána na video

3. Funkce více proměnných

3.1. **Normovaný lineární prostor konečné dimenze.** Buď V vektorový prostor dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Definice 3.1. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ je *norma* na V, jestliže

(1) $\|v\| \geq 0$ pro všechna $v \in V$ a $\|v\| = 0 \iff v = o$;
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ a $v \in V$;
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pro všechna $u, v \in V$.

Uspořádaná dvojice $(V, \|\cdot\|)$ se pak nazývá normovaným lineárním prostorem dimenze m.

Příklady:

(1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
(2) na $\mathbb{R}^m$ jsou normy ($u = (u_1, \ldots, u_m)$):

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2}, \quad \|u\|_s = \sum_{j=1}^{m} |u_j|, \quad \|u\|_m = \max_{1\leq j\leq m} |u_j|.$$

Tvrzení 3.1. *Pro reálná čísla $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) platí:*

(a) $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$;
(b) $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ *(Schwartzova nerovnost);*
(c) $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ *(trojúhelníková nerovnost);*
(d) $\left|\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.

Důkaz. (a) Nerovnost je snadno vidět po umocnění na druhou.

(b) Umocníme-li dokazovanou nerovnost na druhou a odečteme na obou stranách $\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2$, dostaneme

$$2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j \leq \sum_{i<j} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2).$$

Tato nerovnost snadno plyne z nerovnosti $(a_i b_i - a_j b_j)^2 \geq 0$.

(c) Opět umocníme na druhou a využijeme nerovnost (b).

(d) Použijeme nerovnost (c) pro $a_i - b_i$, b_i, resp. pro $b_i - a_i$, a_i, na místě a_i, b_i. □

Důsledek: $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{R}^m$.

Definice 3.2. Posloupnost (v_n) vektorů z V konverguje k vektoru $v \in V$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ nebo $v_n \to v$, $n \to \infty$), jestliže $\|v_n - v\| \to 0$, $n \to \infty$.

Tvrzení 3.2. *V normovaném lineárním prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť $v_n \to v$ a $v_n \to w$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\|v_n - v\| < \varepsilon$ a $\|v_n - w\| < \varepsilon$, a tedy

$$\|v - w\| = \|v - v_n + v_n - w\| \leq \|v - v_n\| + \|v_n - w\| < 2\varepsilon.$$

Protože ε může být libovolně malé, musí platit $\|v - w\| = 0$, a tedy $v = w$. □

Tvrzení 3.3. *Pro vektory $v_n, v \in V$ platí: $v_n \to v \implies \|v_n\| \to \|v\|$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z nerovnosti

$$|\|v_n\| - \|v\|| \leq \|v_n - v\|,$$

jež je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti pro normu. □

Definice 3.3. Množina $A \subseteq V$ je *omezená*, jestliže je množina $\{\|v\| : v \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ omezená.

Důsledek 3.4. *Každá konvergentní posloupnost vektorů je omezená.*

Důkaz. Plyne snadno z předchozího tvrzení. □

Tvrzení 3.5. *Nechť $u_n \to u$, $v_n \to v$, $u_n, u, v_n, v \in V$, a nechť $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$. Pak*

(1) $u_n + v_n \to u + v$,
(2) $\lambda_n v_n \to \lambda v$, $n \to \infty$.

Důkaz. (1) Plyne snadno z trojůhelníkové nerovnosti:

$$\|(u_n + v_n) - (u + v)\| \leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

(2) Použijeme nerovnosti

$$\|\lambda_n v_n - \lambda v\| \leq \|\lambda_n v_n - \lambda_n v\| + \|\lambda_n v - \lambda v\| = |\lambda_n|\|v_n - v\| + |\lambda_n - \lambda|\|v\|$$

a toho, že posloupnost $(|\lambda_n|)$ je omezená, takže pravá strana konverguje k nule. □

Věta 3.6. *Buď $\{e_1, \ldots, e_m\}$ libovolná pevně zvolená báze vektorového prostoru V. Pak pro vektory $v_n, v \in V$ se souřadnicemi $v_n = \xi_1^n e_1 + \cdots + \xi_m^n e_m$, $v = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_m e_m$, platí*

$$v_n \to v \iff \xi_j^n \to \xi_j, \quad n \to \infty, \forall j \leq m.$$

Důkaz. Implikace $\Longleftarrow$ snadno plyne z předchozího tvrzení. Ukážeme implikaci $\Longrightarrow$. Nechť tedy $v_n \to v$ a předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $v = 0$. Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \xi_j^n = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Budeme postupovat sporem, nechť tedy pro spor existuje index $i \leq m$ takový, že $\xi_i^n \not\to 0$.

(i) Předpokládejme nejprve, že posloupnosti (ξ_j^n) jsou omezené pro všechna $j \leq m$. Pak podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost z posloupnosti (ξ_i^n) konvergující k nenulovému číslu $\tilde{\xi}_i$. Postupným vybíráním dalších podposloupností nakonec vybereme podposloupnost (n_k) takovou, že $\xi_j^{n_k} \to \tilde{\xi}_j$ pro nějaká $\tilde{\xi}_j$, $j = 1, \ldots, m$, a tedy $v_{n_k} \to \sum_{j=1}^m \tilde{\xi}_j e_j$ podle obrácené implikace věty. Limitní vektor je ovšem nenulový, neboť má nenulovou $i$tou souřadnici, což je spor s předpokladem.

(ii) Nyní ukážeme omezenost posloupností souřadnic, čímž bude důkaz ukončen. Nechť pro spor (ξ_i^n) není omezená pro některé $i \leq m$. Posloupnost

$$\sigma_n := \max\{1, |\xi_1^n|, \ldots, |\xi_m^n|\} \geq 1$$

je tedy neomezená a vektory $w_n := \frac{v_n}{\sigma_n}$ splňují $\|w_n\| \leq \|v_n\|$, tedy $w_n \to 0$. Souřadnice η_j^n vektorů $w_n = \eta_1^n e_1 + \cdots + \eta_m^n e_m$ jsou z definice omezené jednotkou v absolutní hodnotě, takže podle části (i) důkazu splňují $\eta_j^n \to 0$ pro všechna $j \leq n$. Zároveň ale je z definice σ_n zřejmé, že pro nějaký index j existuje vybraná podposlounost (n_k) tak, že $|\eta_j^{n_k}| = 1$ pro všechna k, což je spor. □

Důsledek: Konvergence v normovaném lineárním prostoru konečné dimenze nezávisí na volbě normy.

3.2. **Limita a spojitost funkce více proměnných.** Buď $D \subseteq \mathbb{R}^m$ a $f : D \to \mathbb{R}^n$ zobrazení.

Definice 3.4. Je-li $a \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$, nazýváme množinu $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - a\| < \varepsilon\}$ ε-okolím bodu a, a množinu $P_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 < \|x - a\| < \varepsilon\}$ prstencovým ε-okolím bodu a. Nechť definiční obor D zobrazení f obsahuje nějaké prstencové okolí bodu a. Řekneme, že $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^n$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : 0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Řekneme, že zobrazení f je spojité v bodě $a \in D$, jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Pozn.: Zobrazení f můžeme psát "po souřadnicích" ve tvaru

$$f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x)),$$

kde $f^1, \cdots, f^n$ jsou funkce z D do $\mathbb{R}$. Zřejmě pro $a \in \mathbb{R}^m$ a $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} f^i(x) = b_i \quad \forall i \le n.$$

Příklad:

(1) Funkce dvou proměnných je dána vztahem $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Pak neexistuje $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.
(2) Je-li $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, pak $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
(3) Je-li $f(x, y) = 1$ pro $y = x^2$ a $f(x, y) = 0$ jinak, pak $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje, přestože je limita funkce v počátku rovna nule "po všech přímkách".

Věta 3.7 (Heine). *Nechť funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ (s hodnotami v $\mathbb{R}^k$) a nechť $b \in \mathbb{R}^k$. Pak $\lim_{x\to a} f(x) = b$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \to a$ s vlastností $x_n \neq a$ $\forall n$ platí $f(x_n) \to b$.*

Věta 3.8 (Bolzano-Cauchyho podmínka). *Nechť funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ (s hodnotami v $\mathbb{R}^k$). Pak limita $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje v $\mathbb{R}^k$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in P_\delta(a) : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon).$$

Věta 3.9 (O limitě složené funkce I). *Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to B \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}^k$, nechť $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ a nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \neq b$ pro $x \in P_\delta(a)$. Pak*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c.$$

Věta 3.10 (O limitě složené funkce II). *Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a nechť funkce g je spojitá v bodě b. Pak*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(b).$$

Důsledek: Složení dvou spojitých zobrazení je spojité.

Přednáška 27.3.2020 - nahrána na video

3.3. **Derivace funkcí více proměnných.**

Definice 3.5. Nechť funkce F s hodnotami v $\mathbb{R}^k$ je definována na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Pak definujeme *$i$-tou parciální derivaci funkce F* v bodě a $(i = 1, \dots, m)$ jako

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_m) - F(a_1, \dots, a_m)}{t},$$

jestliže limita existuje.

Pozn.: (i) Je-li $F(x) = (f^1(x), \dots, f^k(x))$, platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f^k}{\partial x_i}(a) \right).$$

(ii) Pro *reálnou* funkci f je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (g_i)'(a_i),$$

kde

$$g_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m).$$

Je-li i-tá parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ definovaná na okolí bodu a, pak pro $j \le m$ definujeme *parciální derivaci druhého řádu*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \right).$$

Indukcí definujeme parciální derivace r-tého řádu

$$\frac{\partial^r F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\frac{\partial^{r-1} F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{r-1}}}(a) \right).$$

Věta 3.11 (Záměnnost smíšených parciálních derivací)**.** *Nechť pro dané $i, j \le m$ existují parciální derivace prvního a druhého řádu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ reálné funkce f na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ a nechť jsou spojité v bodě a. Pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

[Bez důkazu]

Důsledek: Má-li funkce f spojité parciální derivace v bodě a až do řádu r, pak tyto nezávisí na pořadí derivování.

Příklad: Je-li $f(x, y) = xy$ pro $|x| \ge |y|$ a $f(x, y) = 0$ pro $|x| < |y|$, pak $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$, ale $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$.

Definice 3.6. Nechť funkce F s hodnotami v $\mathbb{R}^k$ je definována na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. Pak pro libovolný nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^m$ definujeme *derivaci funkce F v bodě a a ve směru v* jako

$$d_v F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t},$$

pokud limita existuje.

Pozn.: Platí $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = d_{e_i}F(a)$, kde $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ je i-tý vektor kanonické báze $\mathbb{R}^m$.

Jsou-li $a = (a_1, \dots, a_m)$ a $b = (b_1, \dots, b_m)$ body v $\mathbb{R}^m$, budeme značit

$$[a, b] = \prod_{i=1}^{m} [\min\{a_i, b_i\}, \max\{a_i, b_i\}]$$

m-rozměrný interval určený body a, b.

Věta 3.12 (Věta o přírůstku funkce více proměnných)**.** *Nechť reálná funkce f má parciální derivace v každém bodě m-rozměrného intervalu $[a, b]$. Pak existují body $c_1, \dots, c_m \in [a, b]$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Vyjádříme

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \left(f(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \right)$$

a použijeme Lanrangeovu větu přírůstku funkce pro každou z funkcí

$$g_i(t) = f(b_1, \dots, b_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m), \quad i = 1, \dots, m.$$

□

Věta 3.13. *Nechť funkce F má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ omezené parciální derivace prvního řádu. Pak F je spojitá v bodě a.*

Důkaz. Větu stačí dokázat pro *reálnou* funkci f. Podle předpokladu existují $\delta_0 > 0$ a $K < \infty$ takové, že

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K, \quad x \in U_{\delta_0}(a).$$

Použitím Věty 3.12 pak dostaneme pro libovolné $x \in U_{\delta_0}(a)$ odhad

$$|f(x) - f(a)| \leq K \sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i| \leq Km\|x - a\|,$$

z čehož už snadno plyne spojitost funkce f v bodě a. □

Pozn.:

(1) Z předpokladů plyne, že f je spojitá dokonce na okolí bodu a.
(2) Nestačí předpokládat existenci parciálních derivací v bodě a (Př.: funkce $f(x, y) = 0$ pro $xy = 0$ a $f(x, y) = 1$ jinak má parciální derivace v počátku, ale je zde nespojitá.

Definice 3.7. Nechť funkce F s hodnotami v $\mathbb{R}^k$ je definována na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. *Totální diferenciál* funkce F v bodě a je lineární zobrazení $dF(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(a + h) - F(a) - dF(a)h\|}{\|h\|} = 0,$$

pokud limita existuje (zde $h \in \mathbb{R}^m$).

Pozn.:

(1) Existuje-li $dF(a)$, pak pro každý nenulový vektor v existuje derivace ve směru $d_vF(a)$ a platí

$$d_vF(a) = dF(a)v.$$

Speciálně tedy

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = dF(a)e_i.$$

Totální diferenciál je tedy jednoznačně určen.

(2) Lineární zobrazení $dF(a)$ má matici vzhledem ke kanonickým bázím

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,j=1}^{k,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f^1}{\partial x_m}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial f^k}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f^k}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix},$$

přitom $F = (f^1, \dots, f^k)$.

(3) Ekvivalentně lze $dF(a)$ definovat vztahem

$$\|F(a+h) - F(a) - dF(a)h\| = o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

(4) Funkce $F = (f^1, \dots, f^k)$ má totální diferenciál v bodě a právě tehdy, když každá komponenta f^i má totální diferenciálv bodě a, a platí

$$dF(a) = (df^1(a), \dots, df^m(a)).$$

Definice 3.8. *Normu* lineárního zobrazení $L : U \to V$ mezi normovanými lineárnímu prostory U, V definujeme vztahem

$$\|L\| := \sup\{\|Lu\| : u \in U, \|u\| \leq 1\}.$$

Zřejmě platí nerovnost $\|Lu\| \leq \|L\|\|u\|$ pro každé $u \in U$.

Věta 3.14. *Má-li funkce F v bodě a totální diferenciál, je v bodě a spojitá.*

Důkaz. Z definice totálního diferenciálu plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro všechna $x \in U_\delta(a)$

$$\|f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\| \leq \|x - a\|$$

(volbou $\varepsilon = 1$ v definici limity). Využitím trojúhelníkové nerovnosti a normy totálního diferenciálu můžeme pak odhadnout

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|x - a\| + \|df(a)(x-a)\| \leq (1 + \|df(a)\|)\|x - a\|,$$

z čehož již spojitost F v bodě a snadno plyne. □

Příklad: Funkce $f(x,y) = 1$ pro $x \neq 0, y = x^2$, $f(x,y) = 0$ jinak, má všechny směrové derivace v počátku rovny nule, ale funkce není v počátku spojitá, a tudíž zde nemá totální diferenciál.

Věta 3.15. *Má-li funkce f v bodě a spojité parciální derivace prvního řádu, má v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Opět stačí důkaz provést pro *reálnou* funkci f. Funkce f má dle předpokladu parciální derivace na nějakém okolí $U_{\delta_0}(a)$, tedy podle Věty 3.12 ke každému $x \in U_{\delta_0}(a)$ existují $c_1, \dots, c_m \in [a, x]$ takové, že

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)(x_i - a_i).$$

Ukážeme, že lineární zobrazení

$$L : (h_1, \dots, h_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

je totálním diferenciálem f v bodě a. Podle výše uvedené rovnosti je

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} &= \frac{\left|\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)(x_i - a_i)\right|}{\|x-a\|} \\ &\le \frac{\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| |x_i - a_i|}{\|x-a\|} \end{aligned}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Z předpokladu spojitosti parciálních derivací existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in U_\delta(a)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m.$$

Dosazením do odhadu výše dostaneme pro stejná x

$$\frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} \le \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|}{\|x-a\|} \le m\varepsilon,$$

čímž je limitní vztah ověřen a platí $L = df(a)$. $\square$

Přednáška 3.4.2020 - nahrána na video

Definice 3.9. Má-li funkce f s hodnotami v $\mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^m$, pak vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

nazýváme *gradientem* funkce f v bodě a.

Pozn.:

(1) Gradient udává "směr a velikost největšího růstu" funkce f v bodě a.
(2) Vektor $n(a) = (\nabla f(a), -1) \in \mathbb{R}^{m+1}$ je normálový vektor ke grafu f v bodě $(a, f(a))$ (tedy je kolmý k tečné nadrovině ke grafu procházející tímto bodem).
(3) Rovnice tečné nadroviny ge grafu funkce f procházející bodem $(a, f(a))$ má tvar

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) = x_{m+1} - f(a).$$

Věta 3.16. *Existují-li totální diferenciály $df(a)$, $dg(a)$ funkcí f, g v bodě a, pak existuje i totální diferenciál součtu $f + g$ a je roven*

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a).$$

Věta 3.17 (Totální diferenciál složeného zobrazení)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $f : U(a) \to \mathbb{R}^n$, $g : U(f(a)) \to \mathbb{R}^k$, a nechť existují totální diferenciály $df(a)$ a $dg(f(a))$. Pak existuje totální diferenciál $d(g \circ f)(a)$ a je roven*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Pozn.: Pro parciální derivace složeného zobrazení z předchozí věty plyne vztah

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_r}(f(a)) \frac{\partial f^r}{\partial x_j}(a),$$

jestliže $f(a) = (f^1(a), \dots, f^n(a))$.

Důsledek 3.18. *Nechť funkce f s hodnotami v $\mathbb{R}^m$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^m$, nechť existuje inverzní funkce f^{-1} definovaná na okolí $U(f(a))$, a nechť existuje $df^{-1}(f(a))$. Pak*

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

3.4. **Implicitní funkce.** Uvažujme soustavu n rovnic o $m + n$ neznámých

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= 0, \end{aligned}$$

kde $f_1, \dots, f_n$ jsou reálné funkce. Tato soustava za určitých předpokladů lokálně určuje "implicitní" funkci $y = y(x)$.

Věta 3.19 (Věta o implicitních funkcích)**.** *Buďte $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, a zobrazení f definované na okolí bodu $(a, b) \in \mathbb{R}^{m+n}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Předpokládejme dále, že*

(a) *$f(a, b) = 0$,*
(b) *f má spojité parciální derivace řádu $k \geq 1$ na okolí bodu (a, b),*

(c) $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \neq 0$,

kde $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}$. *Pak existují* $\delta, \Delta > 0$ *tak, že pro každý bod* $x \in U_\delta(a)$ *existuje právě jeden bod* $y = y(x) \in U_\Delta(b)$ *s vlastností* $f(x, y(x)) = 0$. *Zobrazení* $x \mapsto y(x)$ *má spojité parciální derivace řádu* k *na* $U_\delta(a)$.

Pozn.: Parciální derivace prvního řádu $dy(a) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,j=1}^{n,m}$ implicitně zadané funkce $y(x)$ můžeme spočítat následovně. Označme $\phi : x \mapsto (x, y(x))$. Pak

$$d\phi(a) = \begin{pmatrix} I_m \\ dy(a) \end{pmatrix}$$

a $f \circ \phi = 0$ na $U_\delta(a)$, tedy

$$0 = d(f \circ \phi)(a) = df(\phi(a)) \circ d\phi(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy(a),$$

tudíž

$$dy(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Důkaz pro případ $k = m = n = 1$. BÚNO nechť $(a,b) = (0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$. Z předpokladu spojitosti parciálních derivací existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ na $U_\varepsilon(0,0)$. Pro $\Delta := \frac{\varepsilon}{2}$ je

$$f(0, -\Delta) < f(0,0) = 0 < f(0, \Delta)$$

(funkce jedné proměnné s kladnou derivací musí být rostoucí). Protože f je spojitá (podle vět 3.15 a 3.14), existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (-\delta, \delta)$ platí $f(x, -\Delta) < 0$ a $f(x, \Delta) > 0$, přitom funkce $f(x, \cdot)$ je rostoucí na $[-\Delta, \Delta]$. Podle věty o nabývání mezihodnot pak existuje právě jedno $y(x) \in (-\Delta, \Delta)$ takové, že $f(x, y(x)) = 0$.

Ukážeme, že funkce $x \mapsto y(x)$ je diferencovatelná na $(-\delta, \delta)$. Zvolme x a h tak, aby $x, x+h \in (-\delta, \delta)$. Podle věty o přírůstku funkce více proměnných (Věta 3.12) existují body $c(h), d(h)$ v obdélníku $[(x+h, y(x+h)), (x, y(x))]$ takové, že

$$0 = f(x+h, y(x+h)) - f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(d(h))(y(x+h) - y(x)).$$

Po vydělení kladným výrazem $\frac{\partial f}{\partial y}(d(h))$ dostaneme

$$y(x+h) - y(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c(h))}{\frac{\partial f}{\partial y}(d(h))}h.$$

Ze spojitosti parciálních derivací plyne jejich omezenost na $U_\varepsilon(0,0)$, limitním přechodem tedy dostaneme $\lim_{h\to 0} y(x+h) = y(x)$, a tudíž

$$\lim_{h\to 0} c(h) = \lim_{h\to 0} d(h) = (x, y(x)).$$

Použitím věty o limitě složené funkce pak dostaneme

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c(h))}{\frac{\partial f}{\partial y}(d(h))} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.$$

Derivace y' je spojitá, protože parciální derivace f jsou spojité. $\square$

Příklad: Rovnice

$$x^5 - 2xy^3 + y = 0$$

má na okolí bodu $x_0 = y_0 = 1$ řešení $y = y(x)$ s $y'(1) = \frac{3}{5}$, $y''(1) = \frac{212}{125}$.

Věta 3.20 (O inverzním zobrazení)**.** *Nechť zobrazení F je definované na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a nabývá hodnot v $\mathbb{R}^n$. Nechť F má spojité parciální derivace prvního řádu na okolí bodu a a nechť je totální diferenciál $dF(a)$ prosté zobrazení. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že F je prosté na $U := F^{-1}(U_\delta(F(a)))$, $F(U) = U_\delta(F(a))$, inverzní zobrazení F^{-1} je diferencovatelné na $U_\delta(F(a))$ a platí*

$$dF^{-1}(y) = (dF(F^{-1}(y)))^{-1}, \quad y \in U_\delta(F(a)).$$

Důkaz. Pro zobrazení

$$G : (y, x) \mapsto y - F(x), \quad (y, x) \in \mathbb{R}^n \times U_\varepsilon(a),$$

platí $G(F(a), a)) = 0$ a

$$\frac{\partial G}{\partial x}(F(a), a) = dF(a)$$

je podle předpokladu regulární zobrazení. Jsou tedy splněny předpoklady věty o implicitních funkcích a existují tedy $\delta, \Delta > 0$ a diferencovatelné zobrazení $\varphi : U_\delta(F(a)) \to U_\Delta(a)$ takové, že $G(y, \varphi(y)) = 0$, tedy $F \circ \varphi(y) = y$. Zúžíme-li F na množinu $U := F^{-1}(U_\delta(F(a)))$, je tedy $\varphi = F^{-1}$ a vzorec pro diferenciál plyne z Důsledku 3.18. $\square$

Přednáška 17.4.2020 - nahrána na video

3.5. Extrémy funkcí více proměnných.

Definice 3.10. Buď $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Řekneme, že f nabývá v bodě $a \in A$ lokálního maxima (minima), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$) pro všechny body $x \in U_\varepsilon(a) \cap A$.

Věta 3.21 (Nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Nechť reálná funkce f nabývá lokálního extrému v bodě $a \in \mathbb{R}^m$. Existuje-li pro $o \neq v \in \mathbb{R}^m$ směrová derivace $d_v f(a)$, pak je rovna nule.*

Důkaz. Má-li f směrovou derivaci v bodě a, musí být definovaná na nějakém okolí $U_\delta(a)$ bodu a. Položme

$$g : t \mapsto f(a + tv), \quad t \in (-\delta/\|v\|, \delta/\|v\|).$$

Pak i funkce g nabývá lokálního extrému v 0 a protože $g'(0) = d_v f(a)$, musí být podle Fermatovy věty $d_v f(a) = 0$. $\square$

Důsledek 3.22. *Má-li funkce f v bodě a totální diferenciál a nabývá-li f v bodě a lokálního extrému, pak je $df(a) = 0$.*

Definice 3.11. Nechť reálná funkce f má spojité parciální derivace prvního a druhého řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. *Diferenciálem druhého řádu* funkce f v bodě a rozumíme bilineární formu $d^2 f(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$d^2 f(a)(u, v) = d_v(d_u f)(a) = d_u(d_v f)(a), \quad u, v \in \mathbb{R}^m,$$

ekvivalentně ($u = (u_1, \dots, u_m), v = (v_1, \dots, v_m)$)

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i v_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i u_j.$$

Věta 3.23 (Taylorův polynom druhého řádu funkce více proměnných)**.** *Nechť reálná funkce f má spojité parciální derivace prvního a druhého řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. Pak*

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(x - a, x - a) + o(\|x - a\|^2), \quad x \to a.$$

Ekvivalentně ($x = (x_1, \dots, x_m), a = (a_1, \dots, a_m)$),

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + o(\|x - a\|^2).$$

Definice 3.12. Bilineární forma B na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$ je

(1) pozitivně definitní, jestliže $B(v, v) > 0$ pro všechny $o \neq v \in V$;
(2) negativně definitní, jestliže $B(v, v) < 0$ pro všechny $o \neq v \in V$;
(3) pozitivně semidefinitní, jestliže $B(v, v) \ge 0$ pro všechny vektory $v \in V$;
(4) negativně semidefinitní, jestliže $B(v, v) \le 0$ pro všechny vektory $v \in V$;
(5) indefinitní, jestliže existují $u, v \in V$, $B(u, u) < 0 < B(v, v)$.

Tvrzení 3.24. *Je-li bilineární forma B na normovaném vektorovém prostoru V pozitivně (resp. negativně) definitní, existuje číslo $c > 0$ takové, že $B(u, u) \ge c\|u\|^2$ pro všechna $u \in V$ (resp. $B(u, u) \le -c\|u\|^2$ pro všechna $u \in V$).*

[Důkaz bude později]

Věta 3.25. *Nechť reálná funkce f má spojité parciální derivace prvního a druhého řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ a nechť $df(a) = 0$.*

(1) *Je-li $d^2f(a)$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě a lokálního minima.*
(2) *Je-li $d^2f(a)$ negativně definitní, nabývá f v bodě a lokálního maxima.*
(3) *Je-li $d^2f(a)$ indefinitní, nenabývá f v bodě a lokálního extrému.*

Důkaz. Použijeme Taylorův polynom druhého řádu v bodě a:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a, x-a) + o(\|x-a\|^2).$$

Je-li $d^2f(a)$ pozitivně definitní, pak podle předchozího tvrzení existuje $c > 0$ takové, že

$$d^2f(a)(x-a, x-a) \geq c\|x-a\|^2,$$

tedy

$$f(x) \geq f(a) + \frac{c}{2}\|x-a\|^2 + o(\|x-a\|^2),$$

a z definice symbolu o plyne existence $\delta > 0$ takového, že $f(x) > f(a)$ pro $\|x-a\| < \delta$. Případ, kdy je $d^2f(a)$ negativně definitní, se ukáže podobně. Je-li $d^2f(a)$ indefinitní, existují podle definice jednotkové vektory u, v takové, že $\alpha := d^2f(a)(u,u) > 0$ a $\beta := d^2f(a)(v,v) < 0$. Pak platí pro nějaké $\delta > 0$

$$f(a+tu) = f(a) + \frac{1}{2}t^2\alpha + o(t^2) > f(a), \quad |t| < \delta,$$
$$f(a+tv) = f(a) + \frac{1}{2}t^2\beta + o(t^2) < f(a), \quad |t| < \delta,$$

a tedy f nenabývá v bodě a lokálního extrému. □

Pozn.: Je-li $d^2f(a)$ pozitivně nebo negativně semidefinitní, nelze o lokálním extrému v bodě a nic říci.

Definice 3.13. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : G \to \mathbb{R}$, $M \subseteq G$. Řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$ maxima (minima) *vzhledem k množině M*, jestliže $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) pro všechny body $x \in M$.

Věta 3.26 (Metoda Lagrangeových multiplikátorů)**.** *Nechť U je okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, a buďte $f : U \to \mathbb{R}$ a $G = (g_1, \ldots, g_k) : U \to \mathbb{R}^k$ funkce se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu na U. Označme $M = \{x \in U : G(x) = 0\}$. Nechť matice diferenciálu $dG(x)$ má hodnost k pro všechna $x \in U$. Nabývá-li f v bodě $a \in M$ lokálního extrému vzhledem k množině M, pak existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Pozn.: Poslední soustava rovnic říká, že $\nabla f(a)$ leží v lineárním obalu vektorů $\nabla g_1(a)$,...,$\nabla g_k(a)$. Podle předpokladu jsou $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_k(a)$ lineárně nezávislé, tedy koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (Lagrangeovy multiplikátory) jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Protože $dG(a) \neq 0$, tedy matice $dG(a)$ typu $m \times k$ má plnou hodnost, musí některá její čtvercová podmatice typu $k \times k$ být regulární. Předpokládejme BÚNO, že je to matice

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k}.$$

Dále budeme psát $x = (y, z) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^{m-k}$, a použijeme Větu o implicitních funkcích pro zobrazení

$$\Phi : (y, z) \mapsto G(y, z)$$

v bodě $a = (y_0, z_0)$. Podle této věty existují U okolí y_0 a V okolí z_0 takové, že ke každému $z \in V$ existuje právě jedno $y = y(z) \in U$ tak, že $G(y, z) = 0$. Dále platí

$$\frac{\partial y}{\partial z}(z_0) = -\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(a) = 0.$$

Dále funkce $h : z \mapsto f(y(z), z)$ nabývá v bodě z_0 lokálního extrému, musí tedy být $dh(z_0) = 0$. Podle pravidla o diferenciálu složeného zobrazení je

$$0 = dh(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\frac{\partial y}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a),$$

a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(a).$$

Zároveň samozřejmě platí

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial y}(a),$$

a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \Lambda \frac{\partial G}{\partial x}(a),$$

kde

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1}.$$

$\square$

Příklad: Funkce $f(x, y) = xy$ nabývá vzhledem k množině $\{x^2 + y^2 = 1\}$ minima v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, maxima v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Přednáška 24.4.2020 (nahrána na video)

4. Metrické prostory

Definice 4.1. *Metrický prostor* je uspořádaná dvojice (X, d), kde X je neprázdná množina a $d : X \times X \to [0, \infty)$ (*metrika*) je zobrazení s vlastnostmi:

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(2) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$;
(3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Příklady:

(1) $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
(2) $(V, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, $d(x, y) = \|x - y\|$.
(3) $X \neq \emptyset$, $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, y) = 0$ pro $x = y$ - *diskrétní metrika.*
(4) $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ spoj.}\}$, $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$.
(5) $d(x, y) = (x - y)^2$ *není* metrika na $\mathbb{R}$.

Definice 4.2. Metriky d_1 a d_2 na X jsou *ekvivalentní*, jestliže existují čísla $C_1, C_2 > 0$ taková, že

$$C_1 d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le C_2 d_2(x, y), \quad x, y \in X.$$

Pozn.: Relace "býti ekvivalentní" je ekvivalence na množině všech metrik na X.

Definice 4.3. Nechť $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $x_n \to x$ v (X, d), jestliže $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Pozn.: Každá posloupnost v metrickém prostoru má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení 4.1. *Jsou-li d_1, d_2 dvě ekvivalentní metriky na X a $x_n, x \in X$, platí*

$$x_n \to x \ v\ (X, d_1) \iff x_n \to x \ v\ (X, d_2).$$

Důkaz. Nechť $x_n \to x$ v (X, d_1). Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \ge n_0$ je $d_1(x_n, x) < \varepsilon$. Z ekvivalence metrik plyne, že pak také $d_2(x, x_n) < C_1^{-1} d_1(x, x_n) < C_1^{-1}\varepsilon$, a tedy $x_n \to x$ i v (X, d_2). Obrácená implikace se dokáže symetrickým způsobem. □

Tvrzení 4.2. *V metrickém prostoru platí:*

$$x_n \to x, y_n \to y \implies d(x_n, y_n) \to d(x, y).$$

Důkaz. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &= (d(x_n, y_n) - d(x_n, y)) + (d(x_n, y) - d(x, y)) \\ &\le d(y_n, y) + d(x_n, x) \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Podobným způsobem ukážeme, že také $d(x, y) - d(x_n, y_n) \to 0$, a tedy $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. □

Definice 4.4. Podmnožina M metrického prostoru (X, d) je *omezená*, jestliže existuje $x_0 \in X$ tak, že $\sup_{x \in M} d(x, x_0) < \infty$.

Tvrzení 4.3. $x_n \to x \implies$ *$\{x_n\}$ je omezená.*

Důkaz. Jestliže $x_n \to x$, pak podle definic existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je $d(x_n, x) < 1$. Pak ale platí

$$\sup_n d(x_n, x) \le \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x), 1\} < \infty,$$

tedy množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená. □

Definice 4.5. Pro $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ značíme $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ *ε-ové okolí bodu x* v (X,d).

Definice 4.6. Množina $A \subseteq X$ je *otevřená*, jestliže pro každý $a \in A$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(a) \subseteq A$. Množina $A \subseteq X$ je *uzavřená*, jestliže $X \setminus A$ je otevřená.

Příklady:

(1) otevřený (uzavřený) interval je otevřená (uzavřená) množina v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
(2) $\emptyset$ a X jsou současně otevřené a uzavřené v (X,d).
(3) V diskrétním metrickém prostoru jsou všechny množiny současně otevřené i uzavřené.

Tvrzení 4.4. *$U_\varepsilon(x)$ je otevřená množina ($x \in X$, $\varepsilon > 0$).*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $a \in U_\varepsilon(x)$ a označme $\delta := d(x,a) < \varepsilon$. Pak $U_{\varepsilon-\delta}(a) \subset U_\varepsilon(x)$, a tedy $U_\varepsilon(x)$ je otevřená. (Skutečně, je-li $y \in U_{\varepsilon-\delta}(a)$, pak z trojúhelníkové nerovnosti $d(y,x) \le d(y,a) + d(a,x) < \varepsilon$.) □

Věta 4.5. *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.*

Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

Důkaz. Dokážeme trvzení pro otevřené množiny. Tvrzení pro uzavřené množiny pak plyne použitím de Morganových pravidel.

Buď tedy $(G_\alpha : \alpha \in I)$ libovolný systém otevřených podmnožin metrického prostoru X, a buď $x \in \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ libovolný. Z definice sjednocení existuje $\alpha \in I$ takové, že $x \in G_\alpha$, a protože G_α je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset G_\alpha$. Pak ale také $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Tím je dokázáno, že $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ je otevřená množina.

Mějme nyní otevřené množiny $G_1, \dots, G_k \subset X$ a $x \in G_1 \cap \dots \cap G_k$. Protože všechny G_i jsou otevřené, existují $\varepsilon_i > 0$ takové, že $U_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$, $i = 1, \dots, k$. Pak pro $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ platí $U_\varepsilon(x) \subset G_1 \cap \dots \cap G_k$, a tedy $G_1 \cap \dots \cap G_k$ je otevřená množina. □

Pozn.: Sjednocení ve větě může být i nespočetné. Naopak, průnik spočetného systému otevřených množin nemusí být otevřený (např. $\bigcap_{i=1}^\infty (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) = \{0\}$).

Věta 4.6. *Množina $A \subseteq X$ je uzavřená právě tehdy, když A obsahuje limity všech svých konvergentních posloupností.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $A \subset X$ je uzavřená, $x_n \in A$, $x_n \to x$, a nechť pro spor $x \notin A$. Protože množina $X \setminus A$ je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. Z definice konvergence ale musí být $d(x_n, x) < \varepsilon$ pro dostatečně velká n, tedy $x_n \in X \setminus A$, což je spor.

Nechť nyní naopak $A \subset X$ není uzavřená, tedy $X \setminus A$ není otevřená, a tedy existuje $x \in X \setminus A$ takový, že $U_\varepsilon(x) \cap A \ne \emptyset$ pro všechna $\varepsilon > 0$. Vybereme-li posloupnost $x_n \in U_{1/n}(x) \cap A$, pak zřejmě $x_n \to x$, $x_n \in A$, ale $x \notin A$. □

Přednáška 15.5.2020 (nahrána na video)

Definice 4.7. Buď (X, d) metrický prostor a $A \subseteq X$ neprázdná. Položme

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= \bigcup\{G \subset A : G \text{ otevřená}\} \quad (\text{vnitřek } A), \\ \overline{A} &= \bigcap\{F \supset A : F \text{ uzavřená}\} \quad (\text{uzávěr } A), \\ \partial A &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \quad (\text{hranice } A). \end{aligned}$$

Pozn.: Zřejmě platí $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Tvrzení 4.7. (i) $\operatorname{int} A$ *je otevřená množina.* $\overline{A}$ *a* ∂A *jsou uzavřené množiny.*
(ii) $\operatorname{int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.
(iii) $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.
(iv) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne přímo z Věty 4.5. Tvrzení (ii) lze odvodit takto:

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= \bigcup\{G \subset A : G \text{ otevřená}\} \\ &= \bigcup\{X \setminus F : F \supset X \setminus A, F \text{ uzavřená}\} \\ &= X \setminus \bigcap\{F \supset X \setminus A : F \text{ uzavřená}\} \\ &= X \setminus \overline{X \setminus A}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že z (ii) plyne (dosazením $X \setminus A$ za A)

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A.$$

Proto podle definice

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A,$$

tedy platí (iii). □

Příklady: $\operatorname{int}[a, b] = (a, b)$, $\overline{(a, b)} = [a, b]$, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Cvičení:

$$x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 : \Big(U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\Big).$$

Zobrazení mezi metrickými prostory. Uvažujme dva metrické prostory: (X, d) a $Y, \rho)$, a zobrazení $f : X \to Y$.
Definice: Zobrazení $f : X \to Y$ je

(1) *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \ f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x));$$

(2) *spojité*, jestliže je spojité v každém bodě $x \in X$.

Tvrzení 4.8. *Nechť* $f : X \to Y$ *je spojité v bodě* $x \in X$. *Pak pro každou posloupnost bodů* (x_n) *z* X *platí:*

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x).$$

Důkaz. Nechť $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x \in X$ a $x_n \to x$, $x_n, x \in X$. Budeme značit d_X, d_Y metriky v X, Y. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice spojitosti existuje $\delta > 0$ takové, že $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Dále podle předpokladu $x_n \to x$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $d_X(x_n, x) < \delta$, tedy $x_n \in U_\delta(x)$. Pak ale podle výše uvedeného platí $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x))$, neboli $d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že $f(x_n) \to f(x)$ v Y. □

Věta 4.9. *Buď $f : X \to Y$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojité.*
(ii) *$\forall G \subset Y$ otevřenou, $f^{-1}(G)$ je otevřená v X.*
(iii) *$\forall F \subset Y$ uzavřenou, $f^{-1}(F)$ je uzavřená v X.*

Důkaz. Vzhledem k dualitě otevřených a uzavřených množin jsou zřejmě výroky (ii) a (iii) ekvivalentní. Stačí tedy ukázat, že (i) $\iff$ (ii).

(i) $\implies$ (ii). Nechť f je spojité a $G \subset Y$ je otevřená. Ukážeme, že $f^{-1}(G) \subset X$ je rovněž otevřená. Nechť $x \in f^{-1}(G)$ (tedy $f(x) \in G$). Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(f(x)) \subset G$. Ze spojitosti f existuje $\delta > 0$ takové, že $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$, a tedy

$$U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(G).$$

Tedy množina $f^{-1}(G)$ je otevřená.

(ii) $\implies$ (i). Nechť vzory otevřených množin při zobrazení f jsou otevřené. Ukážeme, že f je spojité. Buď $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Protože $U_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ je otevřená množina, také $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subset X$ je otevřená. Zřejmě $x \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, a tedy

$$f(U_\delta(x)) \subset f\left(f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))\right) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Tedy f je spojité v x. □

Pozn.: Spojitost lze charakterizovat bez metriky, jen pomocí systému otevřených množin (*topologie*).

Podprostory. Je-li (X, d) metrický prostor a $\emptyset \neq A \subseteq X$, pak restrikce $d|_{A\times A}$ je metrika na A. Prostor A s touto metrikou nazýváme podprostorem prostoru X.
Pozn.: Zřejmě pro $x \in A$ a $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon^{(A)}(x) = U_\varepsilon^{(X)}(x) \cap A$ (horní index u U značí, v kterém metrickém prostoru okolí uvažujeme).

Tvrzení 4.10. *$G \subseteq A$ je otevřená v A právě tehdy, když $G = U \cap A$ pro nějakou $U \subseteq X$ otevřenou.*

Důkaz. Pro $x \in A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ budeme značit $U_\varepsilon(x)$ ε-ové okolí bodu x v X, a $U_\varepsilon^{(A)}(x)$ ε-ové okolí bodu x v podprostoru A. Zřejmě $U_\varepsilon^{(A)}(x) = A \cap U_\varepsilon(x)$.

Buď $G \subseteq A$ otevřená v A. Tedy ke každému bodu $x \in G$ existuje $\varepsilon(x) > 0$ takové, že $U_{\varepsilon(x)}^{(A)}(x) = A \cap U_{\varepsilon(x)}(x) \subset G$. Pak množina $U := \bigcup_{x\in G} U_{\varepsilon(x)}(x)$ je otevřená a splňuje

$$A \cap U = A \cap \bigcup_{x\in G} U_{\varepsilon(x)}(x) = \bigcup_{x\in G} (A \cap U_{\varepsilon(x)}(x)) = \bigcup_{x\in G} U_{\varepsilon(x)}^{(A)}(x) = G.$$

Obrácená implikace je ponechána za cvičení. □

Věta 4.11. *Je-li $f : X \to Y$ spojité a $\emptyset \neq A \subseteq X$, pak i restrikce $f|_A : A \to Y$ je spojitá.*

Důkaz. Ukážeme spojitost $f|_A$ podle kriteria z Věty 4.9. Buď $G \subset Y$ otevřená. Pak množina

$$(f|_A)^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap A$$

je podle předchozího tvrzení otevřená v A, a tedy $f|_A$ je spojité. □

Kompaktní prostory.

Definice 4.8. (1) Metrický prostor (X, d) je *kompaktní*, jestliže z každé jeho posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.
(2) Množina $A \subseteq X$ je kompaktní, je-li prázdná, nebo je-li podprostor $(A, d|_{A\times A})$ kompaktní.

Příklady: Uzavřený omezený interval $[a, b]$ je kompaktní. V diskrétním prostoru jsou kompaktní pouze konečné podmnožiny.

Věta 4.12. *$K \subseteq X$ je kompaktní $\implies$ K je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Nejprve dokážeme uzavřenost K podle Věty 4.6. Mějme posloupnost bodů $(x_n) \subset K$ takovou, že $x_n \to x \in X$. Z kompaktnosti K existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) konvergující k nějakému $y \in K$. Pak ale musí být $x = y$, a tedy i $x \in K$. Tedy K je uzavřená.

Nyní ukážeme omezenost K. Kdyby množina K byla neomezená, mohli bychom z ní (indukcí) vybrat posloupnost prvků (x_n) s vlastností

$$d(x_n, x_m) > n, \quad 1 \leq m < n.$$

Zřejmě i každá podposloupnost posloupnosti (x_n) bude mít tuto vlastnost, tedy bude neomezená a nemůže tedy konvergovat, což je spor s kompaktností K. □

Tvrzení 4.13. *Je-li X kompaktní a $A \subseteq X$ uzavřená, je i A kompaktní.*

Důkaz. Plyne snadno z Věty 4.6. □

Věta 4.14. *Kvádr $\prod_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní.*

Důkaz. Mějme posloupnost $(x_n) \subset \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$. Posloupnost prvních souřadnic, $(x_n^{(1)})$, je omezená, a tedy podle Weierstrassovy věty existuje podposloupnost konvergující k nějaké hodnotě $x^{(1)} \in [a_1, b_1]$. Podobnou úvahu provedeme nyní pro posloupnost druhých souřadnic této podposloupnosti, a pokračujeme dále, až nakonec vybereme podposloupnost původní posloupnosti x_{n_k} takovou, že $x_{n_k}^{(i)} \to x^{(i)} \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, m$. Pak ale podle Věty 3.6 podposloupnost x_{n_k} konverguje k bodu $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) \in \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$. Tím je kompaktnost dokázána. □

Důsledek 4.15. *$A \subseteq \mathbb{R}^m$ je kompaktní $\iff$ A je uzavřená a omezená.*

Přednáška 22.5.2020 (nahrána na video)

Důsledek 4.16. *Podmnožina konečněrozměrného normovaného lineárního prostoru je kompaktní právě tehdy, když je omezená i uzavřená.*

Důkaz. Je-li V m-rozměrný normovaný lineárního prostor, pak libovolná jeho pevně zvolená báze určuje bijekci V na $\mathbb{R}^m$, a snadno se ověří, že tato bijekce převádí omezené množiny na omezené, uzavřené na uzavřené a kompaktní na kompaktní. □

Příklad:

$$\ell_2 := \{(a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}, \quad \|(a_n)\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}, \quad (a_n) \in \ell_2,$$

$d((a_n),(b_n)) := \|(a_n - b_n)_n\|_2$. Jednotková koule v ℓ_2, $B = \{(a_n) \in \ell_2 : \|(a_n)\|_2 \leq 1\}$ je uzavřená a omezená, ale není kompaktní.

Věta 4.17 (Spojitý obraz kompaktu je kompakt)**.** *Je-li $f : X \to Y$ spojité a $K \subseteq X$ kompaktní, je i $f(K)$ kompaktní.*

Důkaz. Nechť je dána posloupnost $(y_n) \subset f(K)$. Zřejmě $y_n = f(x_n)$ pro nějaké $x_n \in K$ a protože K je kompaktní, existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) konvergující k nějakému $x \in K$. Ze spojitosti f pak ale máme

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K),$$

tedy množina $f(K)$ je kompaktní. □

Věta 4.18. *Nechť K je kompakt a $f : K \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak f nabývá na K svého minima a maxima.*

Důkaz. Označme $S := \sup_{x\in K} f(x)$. Z definice suprema existuje posloupnost $(x_n) \subset K$ taková, že $f(x_n) \to S$. Z kompaktnosti K existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}), která konverguje k nějakému $x \in K$. Protože f je spojité, platí $f(x_{n_k}) \to f(x)$, a z jednoznačnosti limity plyne $f(x) = S \in \mathbb{R}$. Nabývání minima se dokáže analogicky. □

Definice 4.9. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na množině $A \subset X$, jestliže

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in A)(d_X(x - y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Pozn.: Stejnoměrně spojitá funce je zřejmě spojitá v každém bodě. Spojitá funkce nemusí být stejnoměrně spojitá (př. - funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na intervalu $(0, \infty)$).

Věta 4.19. *Je-li funkce $f : X \to \mathbb{R}$ na kompaktním metrickém prostoru X spojitá, pak je i stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\delta > 0$ existují body $x, y \in X$ s $d_X(x, y) < \delta$ a zároveň $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Pro zvolenou posloupnost $\delta_n = \frac{1}{n}$ tedy najdeme dvojice bodů $x_n, y_n \in X$ s $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Protože X je kompaktní, existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) z (x_n) konvergující k nějakému $x \in X$. Protože $d_X(x_n, y_n) \to 0$, platí také $y_{n_k} \to x$. Ze spojitosti f pak dostáváme $f(x_{n_k}) \to f(x)$ a $f(y_{n_k}) \to f(x)$, což je spor, protože $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, a posloupnosti tedy nemohou mít stejnou limitu. □

Z Věty 4.19 snadno dokážeme klíčovou větu o Riemannově integrálu (Věta 2.11) o existenci Riemannova integrálu spojité funkce. Víme totiž, že uzavřený a omezený interval $[a,b]$ je kompaktní, a každá spojitá funkce na $[a,b]$ je tedy i stejnoměrně spojitá. Pak již stačí použít následující tvrzení:

Tvrzení 4.20. *Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na intervalu $[a,b]$, pak existuje* (R) $\int_a^b f$.

Důkaz. Podle Věty 2.3 (R) $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathcal{D}) : \; S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože f je stejnoměrně spojitá, existuje $\delta > 0$ takové, že jestliže $|y-x| < \delta$, pak $|f(y)-f(x)| < \varepsilon/(b-a)$. Zvolme dělení $\mathcal{D} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že jeho norma (maximální délka dělícího intervalku) je menší než δ. Pak platí

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) - \min_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) \right) (t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podmínka existence Riemannova integrálu je tedy splněna. □

Zcela na závěr ještě doplníme důkaz Tvrzení 3.24. Je-li $B : V \times V \to \mathbb{R}$ pozitivně definitní bilineární forma na m-rozměrném normovaném lineárním prostoru V, pak je příslušná kvadratická forma

$$Q : v \mapsto B(v,v), \quad v \in V,$$

spojitá na V. Skutečně, z bilinearity B dostaneme

$$\begin{aligned} |Q(v) - Q(u)| &= |B(v,v) - B(u,u)| \leq |B(v,v) - B(v,u)| + |B(v,u) - B(u,u)| \\ &= |B(v,v-u)| + |B(v-u,u)| \leq \|B\|\|v\|\|v-u\| + \|B\|\|u\|\|v-u\|, \end{aligned}$$

jestliže $\|B\| = \sup_{\|u\|=1} \|Bu\|$ značí funkcionální normu (matice) B. Jednotková sféra

$$S_1 := \{u \in V : \; \|u\| = 1\}$$

je kompaktní podmnožina V (je to omezená a uzavřená podmnožina), Q je spojitá na S_1 a nabývá zde tedy svého minima, které ovšem musí být kladné, protože Q nenabývá nulové hodnoty mimo počátek. Důkaz pro případ negativně definitní bilineární formy je analogický.