Přednáška 24.4.2020 (nahrána na video)

4. Metrické prostory

Definice 4.1. *Metrický prostor* je uspořádaná dvojice (X, d), kde X je neprázdná množina a $d : X \times X \to [0, \infty)$ (*metrika*) je zobrazení s vlastnostmi:

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(2) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$;
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Příklady:

(1) $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
(2) $(V, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, $d(x, y) = \|x - y\|$.
(3) $X \neq \emptyset$, $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, y) = 0$ pro $x = y$ - *diskrétní metrika.*
(4) $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ spoj.}\}$, $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$.
(5) $d(x, y) = (x - y)^2$ *není* metrika na $\mathbb{R}$.

Definice 4.2. Metriky d_1 a d_2 na X jsou *ekvivalentní*, jestliže existují čísla $C_1, C_2 > 0$ taková, že

$$C_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C_2 d_2(x, y), \quad x, y \in X.$$

Pozn.: Relace "býti ekvivalentní" je ekvivalence na množině všech metrik na X.

Definice 4.3. Nechť $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $x_n \to x$ v (X, d), jestliže $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Pozn.: Každá posloupnost v metrickém prostoru má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení 4.1. *Jsou-li d_1, d_2 dvě ekvivalentní metriky na X a $x_n, x \in X$, platí*

$$x_n \to x \text{ v } (X, d_1) \iff x_n \to x \text{ v } (X, d_2).$$

Důkaz. Nechť $x_n \to x$ v (X, d_1). Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \varepsilon$. Z ekvivalence metrik plyne, že pak také $d_2(x, x_n) < C_1^{-1} d_1(x, x_n) < C_1^{-1}\varepsilon$, a tedy $x_n \to x$ i v (X, d_2). Obrácená implikace se dokáže symetrickým způsobem. □

Tvrzení 4.2. *V metrickém prostoru platí:*

$$x_n \to x, y_n \to y \implies d(x_n, y_n) \to d(x, y).$$

Důkaz. S využitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &= (d(x_n, y_n) - d(x_n, y)) + (d(x_n, y) - d(x, y)) \\ &\leq d(y_n, y) + d(x_n, x) \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Podobným způsobem ukážeme, že také $d(x, y) - d(x_n, y_n) \to 0$, a tedy $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. □

Definice 4.4. Podmnožina M metrického prostoru (X, d) je *omezená*, jestliže existuje $x_0 \in X$ tak, že $\sup_{x \in M} d(x, x_0) < \infty$.

Tvrzení 4.3. $x_n \to x \implies \{x_n\}$ *je omezená.*

Důkaz. Jestliže $x_n \to x$, pak podle definic existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je $d(x_n, x) < 1$. Pak ale platí

$$\sup_n d(x_n, x) \leq \max\{d(x_1, x), \ldots, d(x_{n_0}, x), 1\} < \infty,$$

tedy množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená. □

Definice 4.5. Pro $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ značíme $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ *ε-ové okolí bodu x* v (X,d).

Definice 4.6. Množina $A \subseteq X$ je *otevřená*, jestliže pro každý $a \in A$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(a) \subseteq A$. Množina $A \subseteq X$ je *uzavřená*, jestliže $X \setminus A$ je otevřená.

Příklady:

(1) otevřený (uzavřený) interval je otevřená (uzavřená) množina v $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
(2) $\emptyset$ a X jsou současně otevřené a uzavřené v (X,d).
(3) V diskrétním metrickém prostoru jsou všechny množiny současně otevřené i uzavřené.

Tvrzení 4.4. *$U_\varepsilon(x)$ je otevřená množina ($x \in X$, $\varepsilon > 0$).*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $a \in U_\varepsilon(x)$ a označme $\delta := d(x,a) < \varepsilon$. Pak $U_{\varepsilon-\delta}(a) \subset U_\varepsilon(x)$, a tedy $U_\varepsilon(x)$ je otevřená. (Skutečně, je-li $y \in U_{\varepsilon-\delta}(a)$, pak z trojúhelníkové nerovnosti $d(y,x) \leq d(y,a) + d(a,x) < \varepsilon$.) $\square$

Věta 4.5. *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.*

Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

Důkaz. Dokážeme trvzení pro otevřené množiny. Tvrzení pro uzavřené množiny pak plyne použitím de Morganových pravidel.

Buď tedy $(G_\alpha : \alpha \in I)$ libovolný systém otevřených podmnožin metrického prostoru X, a buď $x \in \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ libovolný. Z definice sjednocení existuje $\alpha \in I$ takové, že $x \in G_\alpha$, a protože G_α je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset G_\alpha$. Pak ale také $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Tím je dokázáno, že $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ je otevřená množina.

Mějme nyní otevřené množiny $G_1, \ldots, G_k \subset X$ a $x \in G_1 \cap \cdots \cap G_k$. Protože všechny G_i jsou otevřené, existují $\varepsilon_i > 0$ takové, že $U_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$, $i = 1, \ldots, k$. Pak pro $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ platí $U_\varepsilon(x) \subset G_1 \cap \cdots \cap G_k$, a tedy $G_1 \cap \cdots \cap G_k$ je otevřená množina. $\square$

Pozn.: Sjednocení ve větě může být i nespočetné. Naopak, průnik spočetného systému otevřených množin nemusí být otevřený (např. $\bigcap_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) = \{0\}$).

Věta 4.6. *Množina $A \subseteq X$ je uzavřená právě tehdy, když A obsahuje limity všech svých konvergentních posloupností.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $A \subset X$ je uzavřená, $x_n \in A$, $x_n \to x$, a nechť pro spor $x \notin A$. Protože množina $X \setminus A$ je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. Z definice konvergence ale musí být $d(x_n, x) < \varepsilon$ pro dostatečně velká n, tedy $x_n \in X \setminus A$, což je spor.

Nechť nyní naopak $A \subset X$ není uzavřená, tedy $X \setminus A$ není otevřená, a tedy existuje $x \in X \setminus A$ takový, že $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ pro všechna $\varepsilon > 0$. Vybereme-li posloupnost $x_n \in U_{1/n}(x) \cap A$, pak zřejmě $x_n \to x$, $x_n \in A$, ale $x \notin A$. $\square$