Přednáška 17.4.2020 - nahrána na video

3.5. Extrémy funkcí více proměnných.

Definice 3.10. Buď $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Řekneme, že f nabývá v bodě $a \in A$ lokálního maxima (minima), jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) pro všechny body $x \in U_\varepsilon(a) \cap A$.

Věta 3.21 (Nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Nechť reálná funkce f nabývá lokálního extrému v bodě $a \in \mathbb{R}^m$. Existuje-li pro $o \neq v \in \mathbb{R}^m$ směrová derivace $d_v f(a)$, pak je rovna nule.*

Důkaz. Má-li f směrovou derivaci v bodě a, musí být definovaná na nějakém okolí $U_\delta(a)$ bodu a. Položme

$$g : t \mapsto f(a + tv), \quad t \in (-\delta/\|v\|, \delta/\|v\|).$$

Pak i funkce g nabývá lokálního extrému v 0 a protože $g'(0) = d_v f(a)$, musí být podle Fermatovy věty $d_v f(a) = 0$. □

Důsledek 3.22. *Má-li funkce f v bodě a totální diferenciál a nabývá-li f v bodě a lokálního extrému, pak je $df(a) = 0$.*

Definice 3.11. Nechť reálná funkce f má spojité parciální derivace prvního a druhého řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. *Diferenciálem druhého řádu* funkce f v bodě a rozumíme bilineární formu $d^2 f(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$d^2 f(a)(u, v) = d_v(d_u f)(a) = d_u(d_v f)(a), \quad u, v \in \mathbb{R}^m,$$

ekvivalentně ($u = (u_1, \dots, u_m), v = (v_1, \dots, v_m)$)

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i v_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i u_j.$$

Věta 3.23 (Taylorův polynom druhého řádu funkce více proměnných)**.** *Nechť reálná funkce f má spojité parciální derivace prvního a druhého řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. Pak*

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(x - a, x - a) + o(\|x - a\|^2), \quad x \to a.$$

Ekvivalentně ($x = (x_1, \dots, x_m), a = (a_1, \dots, a_m)$),

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + o(\|x - a\|^2).$$

Definice 3.12. Bilineární forma B na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$ je

(1) pozitivně definitní, jestliže $B(v, v) > 0$ pro všechny $o \neq v \in V$;
(2) negativně definitní, jestliže $B(v, v) < 0$ pro všechny $o \neq v \in V$;
(3) pozitivně semidefinitní, jestliže $B(v, v) \geq 0$ pro všechny vektory $v \in V$;
(4) negativně semidefinitní, jestliže $B(v, v) \leq 0$ pro všechny vektory $v \in V$;
(5) indefinitní, jestliže existují $u, v \in V$, $B(u, u) < 0 < B(v, v)$.

Tvrzení 3.24. *Je-li bilineární forma B na normovaném vektorovém prostoru V pozitivně (resp. negativně) definitní, existuje číslo $c > 0$ takové, že $B(u, u) \geq c\|u\|^2$ pro všechna $u \in V$ (resp. $B(u, u) \leq -c\|u\|^2$ pro všechna $u \in V$).*

[Důkaz bude později]

Věta 3.25. *Nechť reálná funkce f má spojité parciální derivace prvního a druhého řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ a nechť $df(a) = 0$.*

(1) *Je-li $d^2f(a)$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě a lokálního minima.*
(2) *Je-li $d^2f(a)$ negativně definitní, nabývá f v bodě a lokálního maxima.*
(3) *Je-li $d^2f(a)$ indefinitní, nenabývá f v bodě a lokálního extrému.*

Důkaz. Použijeme Taylorův polynom druhého řádu v bodě a:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a, x-a) + o(\|x-a\|^2).$$

Je-li $d^2f(a)$ pozitivně definitní, pak podle předchozího tvrzení existuje $c > 0$ takové, že

$$d^2f(a)(x-a, x-a) \geq c\|x-a\|^2,$$

tedy

$$f(x) \geq f(a) + \frac{c}{2}\|x-a\|^2 + o(\|x-a\|^2),$$

a z definice symbolu o plyne existence $\delta > 0$ takového, že $f(x) > f(a)$ pro $\|x-a\| < \delta$. Případ, kdy je $d^2f(a)$ negativně definitní, se ukáže podobně. Je-li $d^2f(a)$ indefinitní, existují podle definice jednotkové vektory u, v takové, že $\alpha := d^2f(a)(u,u) > 0$ a $\beta := d^2f(a)(v,v) < 0$. Pak platí pro nějaké $\delta > 0$

$$f(a+tu) = f(a) + \frac{1}{2}t^2\alpha + o(t^2) > f(a), \quad |t| < \delta,$$
$$f(a+tv) = f(a) + \frac{1}{2}t^2\beta + o(t^2) < f(a), \quad |t| < \delta,$$

a tedy f nenabývá v bodě a lokálního extrému. □

Pozn.: Je-li $d^2f(a)$ pozitivně nebo negativně semidefinitní, nelze o lokálním extrému v bodě a nic říci.

Definice 3.13. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : G \to \mathbb{R}$, $M \subseteq G$. Řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$ maxima (minima) *vzhledem k množině M*, jestliže $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) pro všechny body $x \in M$.

Věta 3.26 (Metoda Lagrangeových multiplikátorů)**.** *Nechť U je okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, a buďte $f : U \to \mathbb{R}$ a $G = (g_1, \dots, g_k) : U \to \mathbb{R}^k$ funkce se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu na U. Označme $M = \{x \in U : G(x) = 0\}$. Nechť matice diferenciálu $dG(x)$ má hodnost k pro všechna $x \in U$. Nabývá-li f v bodě $a \in M$ lokálního extrému vzhledem k množině M, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Pozn.: Poslední soustava rovnic říká, že $\nabla f(a)$ leží v lineárním obalu vektorů $\nabla g_1(a)$ $,\dots,\nabla g_k(a)$. Podle předpokladu jsou $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$ lineárně nezávislé, tedy koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (Lagrangeovy multiplikátory) jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Protože $dG(a) \neq 0$, tedy matice $dG(a)$ typu $m \times k$ má plnou hodnost, musí některá její čtvercová podmatice typu $k \times k$ být regulární. Předpokládejme BÚNO, že je to matice

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k}.$$

Dále budeme psát $x = (y, z) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^{m-k}$, a použijeme Větu o implicitních funkcích pro zobrazení

$$\Phi : (y, z) \mapsto G(y, z)$$

v bodě $a = (y_0, z_0)$. Podle této věty existují U okolí y_0 a V okolí z_0 takové, že ke každému $z \in V$ existuje právě jedno $y = y(z) \in U$ tak, že $G(y, z) = 0$. Dále platí

$$\frac{\partial y}{\partial z}(z_0) = -\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(a).$$

Dále funkce $h : z \mapsto f(y(z), z)$ nabývá v bodě z_0 lokálního extrému, musí tedy být $dh(z_0) = 0$. Podle pravidla o diferenciálu složeného zobrazení je

$$0 = dh(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\frac{\partial y}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a),$$

a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(a).$$

Zároveň samozřejmě platí

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial y}(a),$$

a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \Lambda \frac{\partial G}{\partial x}(a),$$

kde

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(a)\right)^{-1}.$$

□

Příklad: Funkce $f(x, y) = xy$ nabývá vzhledem k množině $\{x^2 + y^2 = 1\}$ minima v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, maxima v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.