Přednáška 3.4.2020 - nahrána na video

Definice 3.9. Má-li funkce f s hodnotami v $\mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^m$, pak vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)$$

nazýváme *gradientem* funkce f v bodě a.

Pozn.:

(1) Gradient udává "směr a velikost největšího růstu" funkce f v bodě a.
(2) Vektor $n(a) = (\nabla f(a), -1) \in \mathbb{R}^{m+1}$ je normálový vektor ke grafu f v bodě $(a, f(a))$ (tedy je kolmý k tečné nadrovině ke grafu procházející tímto bodem).
(3) Rovnice tečné nadroviny ge grafu funkce f procházející bodem $(a, f(a))$ má tvar

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) = x_{m+1} - f(a).$$

Věta 3.16. *Existují-li totální diferenciály $df(a)$, $dg(a)$ funkcí f, g v bodě a, pak existuje i totální diferenciál součtu $f + g$ a je roven*

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a).$$

Věta 3.17 (Totální diferenciál složeného zobrazení)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^m$, $f : U(a) \to \mathbb{R}^n$, $g : U(f(a)) \to \mathbb{R}^k$, a nechť existují totální diferenciály $df(a)$ a $dg(f(a))$. Pak existuje totální diferenciál $d(g \circ f)(a)$ a je roven*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Pozn.: Pro parciální derivace složeného zobrazení z předchozí věty plyne vztah

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_r}(f(a)) \frac{\partial f^r}{\partial x_j}(a),$$

jestliže $f(a) = (f^1(a), \ldots, f^n(a))$.

Důsledek 3.18. *Nechť funkce f s hodnotami v $\mathbb{R}^m$ má totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^m$, nechť existuje inverzní funkce f^{-1} definovaná na okolí $U(f(a))$, a nechť existuje $df^{-1}(f(a))$. Pak*

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

3.4. **Implicitní funkce.** Uvažujme soustavu n rovnic o $m + n$ neznámých

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) &= 0, \end{aligned}$$

kde $f_1, \ldots, f_n$ jsou reálné funkce. Tato soustava za určitých předpokladů lokálně určuje "implicitní" funkci $y = y(x)$.

Věta 3.19 (Věta o implicitních funkcích)**.** *Buďte $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, a zobrazení f definované na okolí bodu $(a, b) \in \mathbb{R}^{m+n}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Předpokládejme dále, že*

(a) *$f(a, b) = 0$,*
(b) *f má spojité parciální derivace řádu $k \geq 1$ na okolí bodu (a, b),*

(c) $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \neq 0$,

kde $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}$. *Pak existují* $\delta, \Delta > 0$ *tak, že pro každý bod* $x \in U_\delta(a)$ *existuje právě jeden bod* $y = y(x) \in U_\Delta(b)$ *s vlastností* $f(x, y(x)) = 0$. *Zobrazení* $x \mapsto y(x)$ *má spojité parciální derivace řádu* k *na* $U_\delta(a)$.

Pozn.: Parciální derivace prvního řádu $dy(a) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,j=1}^{n,m}$ implicitně zadané funkce $y(x)$ můžeme spočítat následovně. Označme $\phi : x \mapsto (x, y(x))$. Pak

$$d\phi(a) = \begin{pmatrix} I_m \\ dy(a) \end{pmatrix}$$

a $f \circ \phi = 0$ na $U_\delta(a)$, tedy

$$0 = d(f \circ \phi)(a) = df(\phi(a)) \circ d\phi(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy(a),$$

tudíž

$$dy(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Důkaz pro případ $k = m = n = 1$. BÚNO nechť $(a,b) = (0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$. Z předpokladu spojitosti parciálních derivací existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ na $U_\varepsilon(0,0)$. Pro $\Delta := \frac{\varepsilon}{2}$ je

$$f(0, -\Delta) < f(0,0) = 0 < f(0, \Delta)$$

(funkce jedné proměnné s kladnou derivací musí být rostoucí). Protože f je spojitá (podle vět 3.15 a 3.14), existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (-\delta, \delta)$ platí $f(x, -\Delta) < 0$ a $f(x, \Delta) > 0$, přitom funkce $f(x, \cdot)$ je rostoucí na $[-\Delta, \Delta]$. Podle věty o nabývání mezihodnot pak existuje právě jedno $y(x) \in (-\Delta, \Delta)$ takové, že $f(x, y(x)) = 0$.

Ukážeme, že funkce $x \mapsto y(x)$ je diferencovatelná na $(-\delta, \delta)$. Zvolme x a h tak, aby $x, x+h \in (-\delta, \delta)$. Podle věty o přírůstku funkce více proměnných (Věta 3.12) existují body $c(h), d(h)$ v obdélníku $[(x+h, y(x+h)), (x, y(x))]$ takové, že

$$0 = f(x+h, y(x+h)) - f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(d(h))(y(x+h) - y(x)).$$

Po vydělení kladným výrazem $\frac{\partial f}{\partial y}(d(h))$ dostaneme

$$y(x+h) - y(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c(h))}{\frac{\partial f}{\partial y}(d(h))}h.$$

Ze spojitosti parciálních derivací plyne jejich omezenost na $U_\varepsilon(0,0)$, limitním přechodem tedy dostaneme $\lim_{h\to 0} y(x+h) = y(x)$, a tudíž

$$\lim_{h\to 0} c(h) = \lim_{h\to 0} d(h) = (x, y(x)).$$

Použitím věty o limitě složené funkce pak dostaneme

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(c(h))}{\frac{\partial f}{\partial y}(d(h))} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.$$

Derivace y' je spojitá, protože parciální derivace f jsou spojité. □

Příklad: Rovnice

$$x^5 - 2xy^3 + y = 0$$

má na okolí bodu $x_0 = y_0 = 1$ řešení $y = y(x)$ s $y'(1) = \frac{3}{5}$, $y''(1) = \frac{212}{125}$.

Věta 3.20 (O inverzním zobrazení)**.** *Nechť zobrazení F je definované na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a nabývá hodnot v $\mathbb{R}^n$. Nechť F má spojité parciální derivace prvního řádu na okolí bodu a a nechť je totální diferenciál $dF(a)$ prosté zobrazení. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že F je prosté na $U := F^{-1}(U_\delta(F(a)))$, $F(U) = U_\delta(F(a))$, inverzní zobrazení F^{-1} je diferencovatelné na $U_\delta(F(a))$ a platí*

$$dF^{-1}(y) = (dF(F^{-1}(y)))^{-1}, \quad y \in U_\delta(F(a)).$$

Důkaz. Pro zobrazení

$$G : (y, x) \mapsto y - F(x), \quad (y, x) \in \mathbb{R}^n \times U_\varepsilon(a),$$

platí $G(F(a), a)) = 0$ a

$$\frac{\partial G}{\partial x}(F(a), a) = dF(a)$$

je podle předpokladu regulární zobrazení. Jsou tedy splněny předpoklady věty o implicitních funkcích a existují tedy $\delta, \Delta > 0$ a diferencovatelné zobrazení $\varphi : U_\delta(F(a)) \to U_\Delta(a)$ takové, že $G(y, \varphi(y)) = 0$, tedy $F \circ \varphi(y) = y$. Zúžíme-li F na množinu $U := F^{-1}(U_\delta(F(a)))$, je tedy $\varphi = F^{-1}$ a vzorec pro diferenciál plyne z Důsledku 3.18. $\square$