Přednáška 27.3.2020 - nahrána na video

3.3. Derivace funkcí více proměnných.

Definice 3.5. Nechť funkce F s hodnotami v $\mathbb{R}^k$ je definována na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Pak definujeme *$i$-tou parciální derivaci funkce F* v bodě a $(i = 1, \dots, m)$ jako

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_m) - F(a_1, \dots, a_m)}{t},$$

jestliže limita existuje.

Pozn.: (i) Je-li $F(x) = (f^1(x), \dots, f^k(x))$, platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f^k}{\partial x_i}(a) \right).$$

(ii) Pro *reálnou* funkci f je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (g_i)'(a_i),$$

kde

$$g_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m).$$

Je-li i-tá parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ definovaná na okolí bodu a, pak pro $j \leq m$ definujeme *parciální derivaci druhého řádu*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \right).$$

Indukcí definujeme parciální derivace r-tého řádu

$$\frac{\partial^r F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\frac{\partial^{r-1} F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{r-1}}}(a) \right).$$

Věta 3.11 (Záměnnost smíšených parciálních derivací)**.** *Nechť pro dané $i, j \leq m$ existují parciální derivace prvního a druhého řádu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ reálné funkce f na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ a nechť jsou spojité v bodě a. Pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

[Bez důkazu]

Důsledek: Má-li funkce f spojité parciální derivace v bodě a až do řádu r, pak tyto nezávisí na pořadí derivování.

Příklad: Je-li $f(x, y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x, y) = 0$ pro $|x| < |y|$, pak $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$, ale $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$.

Definice 3.6. Nechť funkce F s hodnotami v $\mathbb{R}^k$ je definována na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. Pak pro libovolný nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^m$ definujeme *derivaci funkce F v bodě a a ve směru v* jako

$$d_v F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t},$$

pokud limita existuje.

Pozn.: Platí $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = d_{e_i}F(a)$, kde $e_i = (0,\dots,1,0,\dots,0)$ je i-tý vektor kanonické báze $\mathbb{R}^m$.

Jsou-li $a = (a_1,\dots,a_m)$ a $b = (b_1,\dots,b_m)$ body v $\mathbb{R}^m$, budeme značit

$$[a,b] = \prod_{i=1}^{m}[\min\{a_i,b_i\},\max\{a_i,b_i\}]$$

m-rozměrný interval určený body a, b.

Věta 3.12 (Věta o přírůstku funkce více proměnných). *Nechť reálná funkce f má parciální derivace v každém bodě m-rozměrného intervalu $[a,b]$. Pak existují body $c_1,\dots,c_m \in [a,b]$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)(b_i - a_i).$$

Důkaz. Vyjádříme

$$f(b)-f(a) = \sum_{i=1}^{m} \left(f(b_1,\dots,b_{i-1},b_i,a_{i+1},\dots,a_m) - f(b_1,\dots,b_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_m)\right)$$

a použijeme Lanrangeovu větu přírůstku funkce pro každou z funkcí

$$g_i(t) = f(b_1,\dots,b_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_m), \quad i = 1,\dots,m.$$

□

Věta 3.13. *Nechť funkce F má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ omezené parciální derivace prvního řádu. Pak F je spojitá v bodě a.*

Důkaz. Větu stačí dokázat pro *reálnou* funkci f. Podle předpokladu existují $\delta_0 > 0$ a $K < \infty$ takové, že

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \le K, \quad x \in U_{\delta_0}(a).$$

Použitím Věty 3.12 pak dostaneme pro libovolné $x \in U_{\delta_0}(a)$ odhad

$$|f(x) - f(a)| \le K\sum_{i=1}^{m}|x_i - a_i| \le Km\|x - a\|,$$

z čehož už snadno plyne spojitost funkce f v bodě a. □

Pozn.:

(1) Z předpokladů plyne, že f je spojitá dokonce na okolí bodu a.
(2) Nestačí předpokládat existenci parciálních derivací v bodě a (Př.: funkce $f(x,y) = 0$ pro $xy = 0$ a $f(x,y) = 1$ jinak má parciální derivace v počátku, ale je zde nespojitá.

Definice 3.7. Nechť funkce F s hodnotami v $\mathbb{R}^k$ je definována na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$. *Totální diferenciál* funkce F v bodě a je lineární zobrazení $dF(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ takové, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|F(a+h) - F(a) - dF(a)h\|}{\|h\|} = 0,$$

pokud limita existuje (zde $h \in \mathbb{R}^m$).

Pozn.:

(1) Existuje-li $dF(a)$, pak pro každý nenulový vektor v existuje derivace ve směru $d_vF(a)$ a platí
$$d_vF(a) = dF(a)v.$$
Speciálně tedy
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = dF(a)e_i.$$
Totální diferenciál je tedy jednoznačně určen.

(2) Lineární zobrazení $dF(a)$ má matici vzhledem ke kanonickým bázím
$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,j=1}^{k,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f^1}{\partial x_m}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial f^k}{\partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial f^k}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix},$$
přitom $F = (f^1, \dots, f^k)$.

(3) Ekvivalentně lze $dF(a)$ definovat vztahem
$$\|F(a+h) - F(a) - dF(a)h\| = o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

(4) Funkce $F = (f^1, \dots, f^k)$ má totální diferenciál v bodě a právě tehdy, když každá komponenta f^i má totální diferenciálv bodě a, a platí
$$dF(a) = (df^1(a), \dots, df^m(a)).$$

Definice 3.8. *Normu* lineárního zobrazení $L : U \to V$ mezi normovanými lineárnímu prostory U, V definujeme vztahem
$$\|L\| := \sup\{\|Lu\| : \, u \in U, \, \|u\| \leq 1\}.$$
Zřejmě platí nerovnost $\|Lu\| \leq \|L\|\|u\|$ pro každé $u \in U$.

Věta 3.14. *Má-li funkce F v bodě a totální diferenciál, je v bodě a spojitá.*

Důkaz. Z definice totálního diferenciálu plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro všechna $x \in U_\delta(a)$
$$\|f(x) - f(a) - df(a)(x-a)\| \leq \|x - a\|$$
(volbou $\varepsilon = 1$ v definici limity). Využitím trojúhelníkové nerovnosti a normy totálního diferenciálu můžeme pak odhadnout
$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|x-a\| + \|df(a)(x-a)\| \leq (1 + \|df(a)\|)\|x-a\|,$$
z čehož již spojitost F v bodě a snadno plyne. □

Příklad: Funkce $f(x,y) = 1$ pro $x \neq 0, y = x^2$, $f(x,y) = 0$ jinak, má všechny směrové derivace v počátku rovny nule, ale funkce není v počátku spojitá, a tudíž zde nemá totální diferenciál.

Věta 3.15. *Má-li funkce f v bodě a spojité parciální derivace prvního řádu, má v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Opět stačí důkaz provést pro *reálnou* funkci f. Funkce f má dle předpokladu parciální derivace na nějakém okolí $U_{\delta_0}(a)$, tedy podle Věty 3.12 ke každému $x \in U_{\delta_0}(a)$ existují $c_1, \dots, c_m \in [a, x]$ takové, že
$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)(x_i - a_i).$$

Ukážeme, že lineární zobrazení

$$L : (h_1, \ldots, h_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

je totálním diferenciálem f v bodě a. Podle výše uvedené rovnosti je

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} &= \frac{\left|\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)(x_i - a_i)\right|}{\|x-a\|} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| |x_i - a_i|}{\|x-a\|} \end{aligned}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Z předpokladu spojitosti parciálních derivací existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in U_\delta(a)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Dosazením do odhadu výše dostaneme pro stejná x

$$\frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} \leq \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|}{\|x-a\|} \leq m\varepsilon,$$

čímž je limitní vztah ověřen a platí $L = df(a)$. □