Přednáška 20.3.2020 - nahrána na video

3. Funkce více proměnných

3.1. **Normovaný lineární prostor konečné dimenze.** Buď V vektorový prostor dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Definice 3.1. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ je *norma* na V, jestliže

(1) $\|v\| \geq 0$ pro všechna $v \in V$ a $\|v\| = 0 \iff v = o$;
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$ a $v \in V$;
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pro všechna $u, v \in V$.

Uspořádáná dvojice $(V, \|\cdot\|)$ se pak nazývá normovaným lineárním prostorem dimenze m.

Příklady:

(1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
(2) na $\mathbb{R}^m$ jsou normy ($u = (u_1, \ldots, u_m)$):

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2}, \quad \|u\|_s = \sum_{j=1}^{m} |u_j|, \quad \|u\|_m = \max_{1 \leq j \leq m} |u_j|.$$

Tvrzení 3.1. *Pro reálná čísla* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *platí:*

(a) $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$;
(b) $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ *(Schwartzova nerovnost);*
(c) $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ *(trojúhelníková nerovnost);*
(d) $\left|\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.

Důkaz. (a) Nerovnost je snadno vidět po umocnění na druhou.

(b) Umocníme-li dokazovanou nerovnost na druhou a odečteme na obou stranách $\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2$, dostaneme

$$2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j \leq \sum_{i<j} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2).$$

Tato nerovnost snadno plyne z nerovnosti $(a_i b_i - a_j b_j)^2 \geq 0$.

(c) Opět umocníme na druhou a využijeme nerovnost (b).

(d) Použijeme nerovnost (c) pro $a_i - b_i$, b_i, resp. pro $b_i - a_i$, a_i, na místě a_i, b_i. $\square$

Důsledek: $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{R}^m$.

Definice 3.2. Posloupnost (v_n) vektorů z V konverguje k vektoru $v \in V$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ nebo $v_n \to v$, $n \to \infty$), jestliže $\|v_n - v\| \to 0$, $n \to \infty$.

Tvrzení 3.2. *V normovaném lineárním prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť $v_n \to v$ a $v_n \to w$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\|v_n - v\| < \varepsilon$ a $\|v_n - w\| < \varepsilon$, a tedy

$$\|v - w\| = \|v - v_n + v_n - w\| \leq \|v - v_n\| + \|v_n - w\| < 2\varepsilon.$$

Protože ε může být libovolně malé, musí platit $\|v - w\| = 0$, a tedy $v = w$. $\square$

Tvrzení 3.3. *Pro vektory* $v_n, v \in V$ *platí:* $v_n \to v \implies \|v_n\| \to \|v\|$.

Důkaz. Tvrzení plyne z nerovnosti

$$|\|v_n\| - \|v\|| \leq \|v_n - v\|,$$

jež je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti pro normu. □

Definice 3.3. Množina $A \subseteq V$ je *omezená*, jestliže je množina $\{\|v\| : v \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ omezená.

Důsledek 3.4. *Každá konvergentní posloupnost vektorů je omezená.*

Důkaz. Plyne snadno z předchozího tvrzení. □

Tvrzení 3.5. *Nechť $u_n \to u$, $v_n \to v$, $u_n, u, v_n, v \in V$, a nechť $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$. Pak*

(1) $u_n + v_n \to u + v$,
(2) $\lambda_n v_n \to \lambda v$, $n \to \infty$.

Důkaz. (1) Plyne snadno z trojůhelníkové nerovnosti:

$$\|(u_n + v_n) - (u + v)\| \leq \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

(2) Použijeme nerovnosti

$$\|\lambda_n v_n - \lambda v\| \leq \|\lambda_n v_n - \lambda_n v\| + \|\lambda_n v - \lambda v\| = |\lambda_n|\|v_n - v\| + |\lambda_n - \lambda|\|v\|$$

a toho, že posloupnost $(|\lambda_n|)$ je omezená, takže pravá strana konverguje k nule. □

Věta 3.6. *Buď $\{e_1, \ldots, e_m\}$ libovolná pevně zvolená báze vektorového prostoru V. Pak pro vektory $v_n, v \in V$ se souřadnicemi $v_n = \xi_1^n e_1 + \cdots + \xi_m^n e_m$, $v = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_m e_m$, platí*

$$v_n \to v \iff \xi_j^n \to \xi_j, \quad n \to \infty, \forall j \leq m.$$

Důkaz. Implikace $\Longleftarrow$ snadno plyne z předchozího tvrzení. Ukážeme implikaci $\Longrightarrow$. Nechť tedy $v_n \to v$ a předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $v = 0$. Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \xi_j^n = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Budeme postupovat sporem, nechť tedy pro spor existuje index $i \leq m$ takový, že $\xi_i^n \not\to 0$.

(i) Předpokládejme nejprve, že posloupnosti (ξ_j^n) jsou omezené pro všechna $j \leq m$. Pak podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost z posloupnosti (ξ_i^n) konvergující k nenulovému číslu $\tilde{\xi}_i$. Postupným vybíráním dalších podposloupností nakonec vybereme podposloupnost (n_k) takovou, že $\xi_j^{n_k} \to \tilde{\xi}_j$ pro nějaká $\tilde{\xi}_j$, $j = 1, \ldots, m$, a tedy $v_{n_k} \to \sum_{j=1}^m \tilde{\xi}_j e_j$ podle obrácené implikace věty. Limitní vektor je ovšem nenulový, neboť má nenulovou $i$tou souřadnici, což je spor s předpokladem.

(ii) Nyní ukážeme omezenost posloupností souřadnic, čímž bude důkaz ukončen. Nechť pro spor (ξ_i^n) není omezená pro některé $i \leq m$. Posloupnost

$$\sigma_n := \max\{1, |\xi_1^n|, \ldots, |\xi_m^n|\} \geq 1$$

je tedy neomezená a vektory $w_n := \frac{v_n}{\sigma_n}$ splňují $\|w_n\| \leq \|v_n\|$, tedy $w_n \to 0$. Souřadnice η_j^n vektorů $w_n = \eta_1^n e_1 + \cdots + \eta_m^n e_m$ jsou z definice omezené jednotkou v absolutní hodnotě, takže podle části (i) důkazu splňují $\eta_j^n \to 0$ pro všechna $j \leq n$. Zároveň ale je z definice σ_n zřejmé, že pro nějaký index j existuje vybraná podposlounost (n_k) tak, že $|\eta_j^{n_k}| = 1$ pro všechna k, což je spor. □

Důsledek: Konvergence v normovaném lineárním prostoru konečné dimenze nezávisí na volbě normy.

3.2. **Limita a spojitost funkce více proměnných.** Buď $D \subseteq \mathbb{R}^m$ a $f : D \to \mathbb{R}^n$ zobrazení.

Definice 3.4. Je-li $a \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$, nazýváme množinu $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - a\| < \varepsilon\}$ ε-okolím bodu a, a množinu $P_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 < \|x - a\| < \varepsilon\}$ prstencovým ε-okolím bodu a. Nechť definiční obor D zobrazení f obsahuje nějaké prstencové okolí bodu a. Řekneme, že $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^n$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) : 0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Řekneme, že zobrazení f je spojité v bodě $a \in D$, jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Pozn.: Zobrazení f můžeme psát "po souřadnicích" ve tvaru

$$f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x)),$$

kde $f^1, \cdots, f^n$ jsou funkce z D do $\mathbb{R}$. Zřejmě pro $a \in \mathbb{R}^m$ a $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} f^i(x) = b_i \quad \forall i \leq n.$$

Příklad:

(1) Funkce dvou proměnných je dána vztahem $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Pak neexistuje $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
(2) Je-li $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$, pak $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
(3) Je-li $f(x,y) = 1$ pro $y = x^2$ a $f(x,y) = 0$ jinak, pak $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje, přestože je limita funkce v počátku rovna nule "po všech přímkách".

Věta 3.7 (Heine). *Nechť funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ (s hodnotami v $\mathbb{R}^k$) a nechť $b \in \mathbb{R}^k$. Pak $\lim_{x\to a} f(x) = b$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \to a$ s vlastností $x_n \neq a$ $\forall n$ platí $f(x_n) \to b$.*

Věta 3.8 (Bolzano-Cauchyho podmínka). *Nechť funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^m$ (s hodnotami v $\mathbb{R}^k$). Pak limita $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje v $\mathbb{R}^k$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in P_\delta(a) : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon).$$

Věta 3.9 (O limitě složené funkce I). *Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to B \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}^k$, nechť $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ a nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) \neq b$ pro $x \in P_\delta(a)$. Pak*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c.$$

Věta 3.10 (O limitě složené funkce II). *Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a nechť funkce g je spojitá v bodě b. Pak*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(b).$$

Důsledek: Složení dvou spojitých zobrazení je spojité.