Přednáška 13.3.2020 (distanční forma)

Následující věta dává do přímé souvislosti konvergenci integrálu a řady.

Věta 2.18 (Integrální kriterium konvergence řady)**.** *Buď funkce f spojitá, nezáporná a nerostoucí na intervalu* $[1,\infty)$*. Pak*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konverguje } \iff \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konverguje }.$$

Důkaz. Funkce f je spojitá na $[1,\infty)$, má tedy promitivní funkci F. Můžeme bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládat, že $F(1)=0$.

Označíme-li f_n restrikci f na interval $[1,n]$ a $\mathcal{D}_n$ dělení $\{1<2<3\cdots<n-1<n\}$, platí pro dolní a horní Riemannův součet

$$s(f_n,\mathcal{D}_n)=f(2)+f(3)+\cdots+f(n),\quad S(f_n,\mathcal{D}_n)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

(využíváme monotonie funkce f). Riemannův integrál z f_n existuje a musí tedy splňovat

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\le\int_1^n f(x)\,dx=F(n)\le f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1).$$

V důsledku toho platí ($n\to\infty$)

$$\sum_{k=2}^\infty f(k)\le\lim_{n\to\infty}F(n)\le\sum_{k=1}^\infty f(k),$$

z čehož už plyne dokazovaná ekvivalence. □

Příklad: $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$ diverguje, ale $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^2}$ konverguje. Skutečně, použitím substituce $y=\log x$, $dy=x^{-1}dx$ dostaneme

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}=\int_{\log 2}^\infty \frac{dy}{y}=\infty,$$

ale

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log^2 x}=\int_{\log 2}^\infty \frac{dy}{y^2}<\infty.$$

Aplikace integrálu.

Délka křivky. Parametrizovanou křivkou rozumíme zobrazení

$$\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):I\to\mathbb{R}^n$$

z intervalu I do $\mathbb{R}^n$ takové, že jednotlivá zobrazení φ_j (souřadnice) jsou spojitá na I. Je-li

$$\mathcal{D}=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b\}$$

dělení intervalu $[a,b]$, značíme

$$\ell(\varphi,\mathcal{D})=\sum_{i=1}^k\|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\|$$

délku lomené čáry procházející body $\varphi(t_0)$, $\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_k)$ na křivce, přitom

$$\|u\|=\sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}$$

značí euklidovskou normu vektoru $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Délku křivky φ definujeme jako

$$\ell(\varphi) = \sup_{\mathcal{D}} \ell(\varphi, \mathcal{D}).$$

Věta 2.19. *Existují-li spojité derivace φ_j' na $[a, b]$, $j = 1, \dots, n$, platí*

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n \varphi_j'(t)^2} \, dt.$$

[Bez důkazu]

Plocha mezi grafy funkcí. Je-li množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ dána předpisem

$$M = \{(x, y) : x \in [a, b], \ f(x) \le y \le g(x)\},$$

kde f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$, přitom $f \le g$, pak plošný obsah množiny M je roven

$$A(M) = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

Objem rotačního tělesa. Buď $f : [a, b] \to [0, \infty)$ nezáporná spojitá funkce a množina $T \subseteq \mathbb{R}^3$ buď dána předpisem

$$T = \{(x, y, z) : x \in [a, b], \ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}$$

(T vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x). Pak objem tělesa T je roven

$$V(T) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Povrch rotačního tělesa. Počítá se podle vzorce

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx,$$

za předpokladu existence spojité derivace funkce f na $[a, b]$.