Přednáška 28.2.2020

2. Riemannův integrál

Definice: *Dělením* uzavřeného intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou množinu bodů

$$\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Norma dělení $\mathcal{D}$ je definována jako

$$\nu(\mathcal{D}) = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Dělení $\mathcal{D}'$ nazveme *zjemněním* dělení $\mathcal{D}$, jestliže každý dělící bod dělení $\mathcal{D}$ je rovněž dělícím bodem dělení $\mathcal{D}$.
Definice: Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce a $\mathcal{D}$ dělení $[a, b]$ ve tvaru (1). *Dolní* a *horní Riemannův součet* funkce f odpovídající dělení $\mathcal{D}$ je (po řadě)

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \\ S(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x). \end{aligned}$$

Dolní a *horní Riemannův integrál* funkce f přes interval $[a, b]$ je definován po řadě jako

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\mathcal{D}} s(f, \mathcal{D}), \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D}).$$

Jsou-li si horní a dolní Riemannův integrál rovny, nazýváme jejich společnou hodnotu *Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $[a, b]$, a značíme (R) $\int_a^b f$ nebo (R) $\int_a^b f(x)\,dx$. V této kapitole budeme symbol (R) často vynechávat a integrál pak vždy budeme chápat jako Riemannův.
Pozn.: Zřejmě platí

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \le s(f, \mathcal{D}) \le S(f, \mathcal{D}) \le (b - a) \sup_{[a,b]} f$$

pro každé dělení $\mathcal{D}$, tedy

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \le \underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \le (b - a) \sup_{[a,b]} f.$$

Tvrzení 2.1. *Je-li $\mathcal{D}'$ zjemněním dělení $\mathcal{D}$, platí $s(f, \mathcal{D}) \le s(f, \mathcal{D}')$ a $S(f, \mathcal{D}) \ge S(f, \mathcal{D}')$.*

[Důkaz]

Důsledek 2.2. (1) *Pro libovolná dvě dělení $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ platí $s(f, \mathcal{D}) \le S(f, \mathcal{D}')$.*
(2) $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

[Důkaz]

Věta 2.3 (Nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu)**.** *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak* (R) $\int_a^b f$ *existuje právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \text{ dělení } \mathcal{D}) : S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Příklady:

(1) (R) $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

(2) Dirichletova funkce f je definována jako $f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Platí $\underline{\int_a^b} f = 0$ a $\overline{\int_a^b} f = 1$, tedy (R) $\int_0^1 f$ neexistuje.

Věta 2.4. *Nechť existují Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ a platí*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

[Důkaz]

Tvrzení 2.5. *Je-li $f \leq g$ na $[a, b]$ a existují-li Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$, platí $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Důsledek: Je-li $f \geq 0$ na $[a, b]$, pak $\int_a^b f \geq 0$, pokud existuje.

Tvrzení 2.6. *Nechť existují Riemannovy integrály $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^c f$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Tvrzení 2.7. *Nechť existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. Pak existuje $\int_\alpha^\beta f$ pro všechna $a \leq \alpha < \beta \leq b$.*

Tvrzení 2.8. *Riemannův integrál se nezmění, předefinujeme-li funkci v konečně mnoha bodech.*

[Důkaz]

Tvrzení 2.9. *Existuje-li Riemannův integrál z funkce f na intervalu $[a, b]$, existují i Riemannovy integrály z kladná a záporné části f^+ a f^-, a z absolutní hodnoty $|f|$, a platí $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

[Důkaz]