Přednáška 22.5.2020 (nahrána na video)

Důsledek 4.16. *Podmnožina konečněrozměrného normovaného lineárního prostoru je kompaktní právě tehdy, když je omezená i uzavřená.*

Důkaz. Je-li V m-rozměrný normovaný lineárního prostor, pak libovolná jeho pevně zvolená báze určuje bijekci V na $\mathbb{R}^m$, a snadno se ověří, že tato bijekce převádí omezené množiny na omezené, uzavřené na uzavřené a kompaktní na kompaktní. □

Příklad:

$$\ell_2 := \{(a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}, \quad \|(a_n)\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}, \quad (a_n) \in \ell_2,$$

$d((a_n),(b_n)) := \|(a_n - b_n)_n\|_2$. Jednotková koule v ℓ_2, $B = \{(a_n) \in \ell_2 : \|(a_n)\|_2 \leq 1\}$ je uzavřená a omezená, ale není kompaktní.

Věta 4.17 (Spojitý obraz kompaktu je kompakt)**.** *Je-li $f : X \to Y$ spojité a $K \subseteq X$ kompaktní, je i $f(K)$ kompaktní.*

Důkaz. Nechť je dána posloupnost $(y_n) \subset f(K)$. Zřejmě $y_n = f(x_n)$ pro nějaké $x_n \in K$ a protože K je kompaktní, existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) konvergující k nějakému $x \in K$. Ze spojitosti f pak ale máme

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K),$$

tedy množina $f(K)$ je kompaktní. □

Věta 4.18. *Nechť K je kompakt a $f : K \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak f nabývá na K svého minima a maxima.*

Důkaz. Označme $S := \sup_{x \in K} f(x)$. Z definice suprema existuje posloupnost $(x_n) \subset K$ taková, že $f(x_n) \to S$. Z kompaktnosti K existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}), která konverguje k nějakému $x \in K$. Protože f je spojité, platí $f(x_{n_k}) \to f(x)$, a z jednoznačnosti limity plyne $f(x) = S \in \mathbb{R}$. Nabývání minima se dokáže analogicky. □

Definice 4.9. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na množině $A \subset X$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)(d_X(x-y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Pozn.: Stejnoměrně spojitá funce je zřejmě spojitá v každém bodě. Spojitá funkce nemusí být stejnoměrně spojitá (př. - funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na intervalu $(0, \infty)$).

Věta 4.19. *Je-li funkce $f : X \to \mathbb{R}$ na kompaktním metrickém prostoru X spojitá, pak je i stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\delta > 0$ existují body $x, y \in X$ s $d_X(x,y) < \delta$ a zároveň $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Pro zvolenou posloupnost $\delta_n = \frac{1}{n}$ tedy najdeme dvojice bodů $x_n, y_n \in X$ s $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Protože X je kompaktní, existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) z (x_n) konvergující k nějakému $x \in X$. Protože $d_X(x_n, y_n) \to 0$, platí také $y_{n_k} \to x$. Ze spojitosti f pak dostáváme $f(x_{n_k}) \to f(x)$ a $f(y_{n_k}) \to f(x)$, což je spor, protože $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, a posloupnosti tedy nemohou mít stejnou limitu. □

Z Věty 4.19 snadno dokážeme klíčovou větu o Riemannově integrálu (Věta 2.11) o existenci Riemannova integrálu spojité funkce. Víme totiž, že uzavřený a omezený interval $[a, b]$ je kompaktní, a každá spojitá funkce na $[a, b]$ je tedy i stejnoměrně spojitá. Pak již stačí použít následující tvrzení:

Tvrzení 4.20. *Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje* (R) $\int_a^b f$.

Důkaz. Podle Věty 2.3 (R) $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathcal{D}):\ S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože f je stejnoměrně spojitá, existuje $\delta > 0$ takové, že jestliže $|y - x| < \delta$, pak $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$. Zvolme dělení $\mathcal{D} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že jeho norma (maximální délka dělícího interválku) je menší než δ. Pak platí

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) - \min_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) \right) (t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podmínka existence Riemannova integrálu je tedy splněna. □

Zcela na závěr ještě doplníme důkaz Tvrzení 3.24. Je-li $B : V \times V \to \mathbb{R}$ pozitivně definitní bilineární forma na m-rozměrném normovaném lineárním prostoru V, pak je příslušná kvadratická forma

$$Q : v \mapsto B(v, v), \quad v \in V,$$

spojitá na V. Skutečně, z bilinearity B dostaneme

$$\begin{aligned} |Q(v) - Q(u)| &= |B(v, v) - B(u, u)| \leq |B(v, v) - B(v, u)| + |B(v, u) - B(u, u)| \\ &= |B(v, v - u)| + |B(v - u, u)| \leq \|B\| \|v\| \|v - u\| + \|B\| \|u\| \|v - u\|, \end{aligned}$$

jestliže $\|B\| = \sup_{\|u\|=1} \|Bu\|$ značí funkcionální normu (matice) B. Jednotková sféra

$$S_1 := \{u \in V :\ \|u\| = 1\}$$

je kompaktní podmnožina V (je to omezená a uzavřená podmnožina), Q je spojitá na S_1 a nabývá zde tedy svého minima, které ovšem musí být kladné, protože Q nenabývá nulové hodnoty mimo počátek. Důkaz pro případ negativně definitní bilineární formy je analogický.