Přednáška 15.5.2020 (nahrána na video)

Definice 4.7. Buď (X,d) metrický prostor a $A \subseteq X$ neprázdná. Položme

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= \bigcup\{G \subset A : G \text{ otevřená}\} \quad \text{(vnitřek } A),\\ \overline{A} &= \bigcap\{F \supset A : F \text{ uzavřená}\} \quad \text{(uzávěr } A),\\ \partial A &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \quad \text{(hranice } A). \end{aligned}$$

Pozn.: Zřejmě platí $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Tvrzení 4.7. (i) $\operatorname{int} A$ *je otevřená množina.* $\overline{A}$ *a* ∂A *jsou uzavřené množiny.*
(ii) $\operatorname{int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.
(iii) $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.
(iv) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne přímo z Věty 4.5. Tvrzení (ii) lze odvodit takto:

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= \bigcup\{G \subset A : G \text{ otevřená}\}\\ &= \bigcup\{X \setminus F : F \supset X \setminus A,\, F \text{ uzavřená}\}\\ &= X \setminus \bigcap\{F \supset X \setminus A : F \text{ uzavřená}\}\\ &= X \setminus \overline{X \setminus A}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že z (ii) plyne (dosazením $X \setminus A$ za A)

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A.$$

Proto podle definice

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A,$$

tedy platí (iii). □

Příklady: $\operatorname{int}[a,b] = (a,b)$, $\overline{(a,b)} = [a,b]$, $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Cvičení:

$$x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 : \Big(U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\Big).$$

Zobrazení mezi metrickými prostory. Uvažujme dva metrické prostory: (X,d) a $Y,\rho)$, a zobrazení $f : X \to Y$.
Definice: Zobrazení $f : X \to Y$ je

(1) *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \ f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x));$$

(2) *spojité*, jestliže je spojité v každém bodě $x \in X$.

Tvrzení 4.8. *Nechť* $f : X \to Y$ *je spojité v bodě* $x \in X$. *Pak pro každou posloupnost bodů* (x_n) *z* X *platí:*

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x).$$

Důkaz. Nechť $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x \in X$ a $x_n \to x$, $x_n, x \in X$. Budeme značit d_X, d_Y metriky v X, Y. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice spojitosti existuje $\delta > 0$ takové, že $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Dále podle předpokladu $x_n \to x$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $d_X(x_n, x) < \delta$, tedy $x_n \in U_\delta(x)$. Pak ale podle výše uvedeného platí $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x))$, neboli $d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že $f(x_n) \to f(x)$ v Y. □

Věta 4.9. *Buď $f : X \to Y$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojité.*
(ii) *$\forall G \subset Y$ otevřenou, $f^{-1}(G)$ je otevřená v X.*
(iii) *$\forall F \subset Y$ uzavřenou, $f^{-1}(F)$ je uzavřená v X.*

Důkaz. Vzhledem k dualitě otevřených a uzavřených množin jsou zřejmě výroky (ii) a (iii) ekvivalentní. Stačí tedy ukázat, že (i) $\iff$ (ii).

(i) $\implies$ (ii). Nechť f je spojité a $G \subset Y$ je otevřená. Ukážeme, že $f^{-1}(G) \subset X$ je rovněž otevřená. Nechť $x \in f^{-1}(G)$ (tedy $f(x) \in G$). Protože G je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\varepsilon(f(x)) \subset G$. Ze spojitosti f existuje $\delta > 0$ takové, že $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$, a tedy

$$U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(G).$$

Tedy množina $f^{-1}(G)$ je otevřená.

(ii) $\implies$ (i). Nechť vzory otevřených množin při zobrazení f jsou otevřené. Ukážeme, že f je spojité. Buď $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Protože $U_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ je otevřená množina, také $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subset X$ je otevřená. Zřejmě $x \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, a tedy

$$f(U_\delta(x)) \subset f\left(f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))\right) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Tedy f je spojité v x. □

Pozn.: Spojitost lze charakterizovat bez metriky, jen pomocí systému otevřených množin (*topologie*).

Podprostory. Je-li (X, d) metrický prostor a $\emptyset \neq A \subseteq X$, pak restrikce $d|_{A\times A}$ je metrika na A. Prostor A s touto metrikou nazýváme podprostorem prostoru X.
Pozn.: Zřejmě pro $x \in A$ a $\varepsilon > 0$ platí $U_\varepsilon^{(A)}(x) = U_\varepsilon^{(X)}(x) \cap A$ (horní index u U značí, v kterém metrickém prostoru okolí uvažujeme).

Tvrzení 4.10. *$G \subseteq A$ je otevřená v A právě tehdy, když $G = U \cap A$ pro nějakou $U \subseteq X$ otevřenou.*

Důkaz. Pro $x \in A \subset X$ a $\varepsilon > 0$ budeme značit $U_\varepsilon(x)$ ε-ové okolí bodu x v X, a $U_\varepsilon^{(A)}(x)$ ε-ové okolí bodu x v podprostoru A. Zřejmě $U_\varepsilon^{(A)}(x) = A \cap U_\varepsilon(x)$.

Buď $G \subseteq A$ otevřená v A. Tedy ke každému bodu $x \in G$ existuje $\varepsilon(x) > 0$ takové, že $U_{\varepsilon(x)}^{(A)}(x) = A \cap U_{\varepsilon(x)}(x) \subset G$. Pak množina $U := \bigcup_{x\in G} U_{\varepsilon(x)}(x)$ je otevřená a splňuje

$$A \cap U = A \cap \bigcup_{x\in G} U_{\varepsilon(x)}(x) = \bigcup_{x\in G} (A \cap U_{\varepsilon(x)}(x)) = \bigcup_{x\in G} U_{\varepsilon(x)}^{(A)}(x) = G.$$

Obrácená implikace je ponechána za cvičení. □

Věta 4.11. *Je-li $f : X \to Y$ spojité a $\emptyset \neq A \subseteq X$, pak i restrikce $f|_A : A \to Y$ je spojitá.*

Důkaz. Ukážeme spojitost $f|_A$ podle kriteria z Věty 4.9. Buď $G \subset Y$ otevřená. Pak množina

$$(f|_A)^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap A$$

je podle předchozího tvrzení otevřená v A, a tedy $f|_A$ je spojité. □

Kompaktní prostory.

Definice 4.8. (1) Metrický prostor (X, d) je *kompaktní*, jestliže z každé jeho posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.
(2) Množina $A \subseteq X$ je kompaktní, je-li prázdná, nebo je-li podprostor $(A, d|_{A\times A})$ kompaktní.

Příklady: Uzavřený omezený interval $[a, b]$ je kompaktní. V diskrétním prostoru jsou kompaktní pouze konečné podmnožiny.

Věta 4.12. *$K \subseteq X$ je kompaktní $\implies$ K je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Nejprve dokážeme uzavřenost K podle Věty 4.6. Mějme posloupnost bodů $(x_n) \subset K$ takovou, že $x_n \to x \in X$. Z kompaktnosti K existuje vybraná podposloupnost (x_{n_k}) konvergující k nějakému $y \in K$. Pak ale musí být $x = y$, a tedy i $x \in K$. Tedy K je uzavřená.

Nyní ukážeme omezenost K. Kdyby množina K byla neomezená, mohli bychom z ní (indukcí) vybrat posloupnost prvků (x_n) s vlastností

$$d(x_n, x_m) > n, \quad 1 \le m < n.$$

Zřejmě i každá podposloupnost posloupnosti (x_n) bude mít tuto vlastnost, tedy bude neomezená a nemůže tedy konvergovat, což je spor s kompaktností K. □

Tvrzení 4.13. *Je-li X kompaktní a $A \subseteq X$ uzavřená, je i A kompaktní.*

Důkaz. Plyne snadno z Věty 4.6. □

Věta 4.14. *Kvádr $\prod_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní.*

Důkaz. Mějme posloupnost $(x_n) \subset \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$. Posloupnost prvních souřadnic, $(x_n^{(1)})$, je omezená, a tedy podle Weierstrassovy věty existuje podposloupnost konvergující k nějaké hodnotě $x^{(1)} \in [a_1, b_1]$. Podobnou úvahu provedeme nyní pro posloupnost druhých souřadnic této podposloupnosti, a pokračujeme dále, až nakonec vybereme podposloupnost původní posloupnosti x_{n_k} takovou, že $x_{n_k}^{(i)} \to x^{(i)} \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, m$. Pak ale podle Věty 3.6 podposloupnost x_{n_k} konverguje k bodu $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$. Tím je kompaktnost dokázána. □

Důsledek 4.15. *$A \subseteq \mathbb{R}^m$ je kompaktní $\iff$ A je uzavřená a omezená.*