# MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 PRO BIOINFORMATIKY
# LS 2019/20

## Přednáška 21.2.2020

### 1. Primitivní funkce a Newtonův integrál

**Definice 1.1.** *Řekneme, že funkce $F$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na intervalu $I$, jestliže $F' = f$ na $I$. (V případě uzavřeného či polouzavřeného intervalu $I$ uvažujeme v krajních bodech jednostranné derivace.)*

Pozn.: Je-li $F$ primitivní funkce k funkci $f$ na $I$, pak rovněž $F + C$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na $I$, pro každou konstantu $C \in \mathbb{R}$.

**Věta 1.1.** *Jsou-li $F_1, F_2$ dvě primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $I$, pak $F_1 - F_2$ je konstantní funkce na $I$.*

[Důkaz]

Značení: Je-li $F' = f$ na $I$, píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Pozn.

(1) Ne každá funkce má primitivní funkci (př. - funkce $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, nemá primitivní funkci na $\mathbb{R}$).
(2) Každá spojitá funkce na $I$ má na $I$ primitivní funkci (bude později).
(3) I nespojitá funkce může mít primitivní funkci (př. - $F(0) = 0$, $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $F'(x)$ existuje vlastní na $\mathbb{R}$ a je nespojitá v 0).
(4) Derivace funkce má vždy Darbouxovu vlastnost (tzn. jestliže existuje vlastní $F' = f$ na $I$ a $f(x) < u < f(y)$, resp. $f(x) > u > f(y)$, pro nějaké body $x < y$ z $I$, pak existuje $c \in (x, y)$ takový, že $f(c) = u$).

**Věta 1.2** (Linearita primitivní funkce). *Jsou-li $F, G$ primitivní funkce k funkcím $f, g$ na intervalu $I$ a jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ na $\mathbb{R}$.*

[Důkaz]

**Věta 1.3** (Integrace per partes). *Nechť funkce $f, g$ mají vlastní derivace na intervalu $I$ a nechť $F$ je primitivní funkcí k funkci $f'g$ na $I$. Pak $G = fg - F$ je primitivní funkcí k funkci $fg'$ na $I$.*

[Důkaz]

**Věta 1.4** (První věta o substituci). *Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $I$ a nechť funkce $\varphi : J \to I$ má vlastní derivaci na intervalu $J$. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu $J$.*

[Důkaz]

**Věta 1.5** (Druhá věta o substituci)**.** *Nechť zobrazení $\varphi : J \to I$ intervalu $J$ na interval $I$ je surjektivní a nechť má vlatní nenulovou derivaci na $J$. Je-li $G$ primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu $J$, pak $G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na $I$.*

[Důkaz]
Pozn.: Z předpokladů plyne, že funkce $\varphi$ je buď rostoucí, nebo klesající na intervalu $J$.
Primitivní funkce k racionální funkci. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

(1) Částečně vydělíme na tvar $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde stupeň polynomu $P_2$ je menší než stupeň $Q$.
(2) Rozložíme polynom $Q$ na polynomy stupně jedna a polynomy stupně dva bez reálných kořenů:
$$Q(x) = c \prod_{i=1}^{m} (x - r_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{n} (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}.$$
(3) Provedeme rozklad na parciální zlomky:
$$\frac{P_2(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{k_i} \frac{A_i^p}{(x - r_i)^p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{l_j} \frac{B_j^q x + C_j^q}{(x^2 + b_j x + c_j)^q}.$$
(4) Najdeme primitivní funkce k parciálním zlomkům.

Příklady substitucí vedoucích na racionální funkci.

(1) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, kde $R$ je racionální funkce dvou proměnných: $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, někdy lze též použít $y = \operatorname{tg} x$ nebo $y = \sin x$ či $y = \cos x$.
(2) $\int R(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx$: $y = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (Eulerova substituce prvního typu).
(3) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, přitom $ax^2+bx+c$ nemá reálné kořeny: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x + t$ (Eulerova substituce druhého typu).

Definice: Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $F$ na $(a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$. Nechť existují vlastní limity $F(b_-) = \lim_{x \to b_-} F(x)$ a $F(a_+) = \lim_{x \to a_+} F(x)$. Pak definujeme *Newtonův integrál* z funkce $f$ na intervalu $(a, b)$ jako
$$(\mathrm{N}) \int_a^b f = (\mathrm{N}) \int_a^b f(x)\, dx = F(b_-) - F(a_+).$$
Je-li $a > b$, klademe $(\mathrm{N}) \int_a^b f = -(\mathrm{N}) \int_b^a f$. Pro $a = b$ definujeme $(\mathrm{N}) \int_a^a f = 0$. Je-li zřejmé, že se jedná o Newtonův integrál, vynecháváme symbol (N). Rovněž používáme zkráceného značení $[F]_a^b = F(b_-) - F(a_+)$.
Pozn.:

(1) Hodnota Newtonova integrálu je zřejmě jednoznačně určena, pokud existuje.
(2) Je-li $F$ primitivní funkcí k funkci $f$ na omezeném intervalu $[a, b]$, pak $(\mathrm{N}) \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

**Věta 1.6** (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce $f$ a $g$ mají vlastní derivace na intervalu $(a, b)$. Pak*
$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx,$$

*je-li pravá strana definována (konečná).*

**Věta 1.7** (První věta o substituci pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce* $\varphi : (\alpha, \beta) \to I$ *má vlastní derivaci na intervalu* $(\alpha, \beta)$ *a nechť funkce* $f$ *je definována na intervalu* $I$*. Pak*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha_+)}^{\varphi(\beta_-)} f(x)\,dx,$$

*je-li pravá strana definována.*

**Věta 1.8** (Druhá věta o substituci pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce* $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ *je na, má vlastní nenulovou derivaci na intervalu* $(\alpha, \beta)$ *a nechť funkce* $f$ *je definována na intervalu* $(a, b)$*. Pak*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

*je-li pravá strana definována.*