

**NMAG204 GEOMETRIE**  
**LS 2017/18**

JAN RATAJ

1. ÚVOD

1.1. Eukleidovský prostor.

**Definice 1.1.**  $n$ -rozměrný eukleidovský prostor je čtveřice  $(E_n, V_n, \cdot, +)$ , kde  $E_n$  je neprázdná množina (množina bodů prostoru),  $V_n$  je vektorový prostor dimenze  $n$  nad  $\mathbb{R}$  se skalárním součinem  $\cdot$  a  $+$  je zobrazení  $E_n \times V_n$  do  $E_n$  s vlastnostmi

- (1)  $a + (u + v) = (a + u) + v$ ,  $a \in E_n$ ,  $u, v \in V_n$ ,
- (2)  $a + o = a$ ,  $a \in E_n$ ,
- (3) pro každou dvojici bodů  $a, b \in E_n$  existuje právě jeden vektor  $u \in V_n$  takový, že  $a + u = b$ . V tom případě značíme  $u = b - a$ .

Budeme pracovat se standardním modelem  $E_n = V_n = \mathbb{R}^n$ , s eukleidovským skalárním součinem

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u^i v^i$$

a s indukovanou normou  $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ , která určuje vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru

$$d(a, b) = \|b - a\|.$$

Shodnost.

**Definice 1.2.** Zobrazení  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *shodnost (izometrie)*, jestliže

$$\|S(y) - S(x)\| = \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Věta 1.1.** Zobrazení  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je shodnost právě tehdy, když

- (1)  $S$  je *afinní* (tzn.  $S(x) = Ax + b$ , kde  $A$  je matice typu  $n \times n$  a  $b \in \mathbb{R}^n$ ,
- (2)  $A$  je *unitární* ( $A^T A = I$ ).

*Poznámky k důkazu.* Je snadné ověřit, že zobrazení s vlastnostmi (1) a (2) je shodností. Obráceně, je-li  $S$  shodnost, lze snadno ukázat, že zobrazuje přímky na přímky a zachovává dělicí poměr na přímkách. Z toho už pak snadno lze vyvodit, že zobrazení  $S_0(x) := S(x) - S(o)$  je lineární, a zbývá dokázat jeho ortogonalitu. Větu s důkazem lze nalézt v textu k přednášce Lineární algebra a geometrie II kolegů L. Barto a J. Tůmy, viz

[http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~barto/linalg1213/skripta\\_la3.pdf](http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~barto/linalg1213/skripta_la3.pdf).  $\square$

Shodnost  $S$  je *přímá (nepřímá)*, jestliže  $\det A = 1$  ( $\det A = -1$ ).

**1.2. Vektorový součin v  $\mathbb{R}^3$ .** Bud'  $\{e_1, \dots, e_3\}$  kanonická báze  $\mathbb{R}^3$  (tedy  $(e_i)^j = \delta_{ij}$ ). *Orientovaný objem* vektorů  $u_1, \dots, u_3 \in \mathbb{R}^3$  je číslo

$$\det(u_1, \dots, u_3) = \det(e_i \cdot u_j)_{i,j=1}^3.$$

Orientovaný objem je lineární v každé složce, antisymetrický a platí

$$|\det(u_1, \dots, u_3)| = \lambda^3 \left( \left\{ \sum_1^3 t_i u_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\} \right), \quad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3.$$

**Definice 1.3.** *Vektorový součin*  $u \times v \in \mathbb{R}^3$  vektorů  $u, v \in \mathbb{R}^3$  je definován vztahem

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w), \quad w \in \mathbb{R}^3.$$

**Věta 1.2** (Vlastnosti vektorového součinu). *Pro libovolné dva vektory  $u, v \in \mathbb{R}^3$  platí*

- (1) *zobrazení  $(u, v) \mapsto u \times v$  je bilineární,*
- (2)  *$u \times v = 0 \iff u, v$  jsou lineárně závislé,*
- (3)  *$(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0,$*
- (4)  *$\|u \times v\| = \lambda^2(\{su + tv : 0 \leq s, t \leq 1\}).$*

Cvičení:

- (1) Pro  $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$  je

$$(u \times v) \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix},$$

tedy speciálně

$$\|u \times v\| = \sqrt{\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}}.$$

- (2) Pro  $u = (u^1, u^2, u^3)^T, v = (v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$  je

$$u \times v = \left( \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T.$$

**1.3. Diferenciál zobrazení.** Bud'  $F$  zobrazení z otevřené množiny  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  do  $\mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $F$  je diferencovatelné, je-li třídy  $\mathcal{C}^\infty$  na  $G$ , tj. má-li spojité parciální derivace všech řádů na  $G$ . *Diferenciál*  $F$  v bodě  $x \in G$  je lineární zobrazení

$$dF_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

určené podmínkou

$$\|F(x + \xi) - F(x) - dF_x(\xi)\| = o(\|\xi\|), \quad \|\xi\| \rightarrow 0.$$

Hodnota  $dF_x(\xi)$  se též nazývá derivací ve směru  $\xi$  a speciálně  $dF_x(e_i) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$  je parciální derivace  $F$  podle  $x^i$ . Lineární zobrazení  $dF_x$  je určeno svou maticí

$$\left( \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i=1, j=1}^{m, n}.$$

Je-li  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , značíme  $F'(t) = dF_t(1)$ .

Diferenciál druhého řádu  $d^2F$  chápeme jako (obyčejný) diferenciál zobrazení

$$dF : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

tedy  $d^2F_x = d(dF)_x$  je lineární zobrazení z  $\mathbb{R}^m$  do  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , neboli (ekvivalentně) bilineární zobrazení z  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  do  $\mathbb{R}^n$ . Toto zobrazení je symetrické (záměnnost smíšených derivací) a speciálně platí  $d^2F_x(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x)$ .

**Věta 1.3** (Diferenciál složeného zobrazení). *Jsou-li  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $F : V \rightarrow U$  diferencovatelné,  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  otevřené, pak pro  $x \in V$  platí*

$$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x.$$

*Jsou-li  $F, G$  dvakrát diferencovatelné, pak*

$$d^2(G \circ F)_x(u, v) = d^2G_{F(x)}(dF_x(u), dF_x(v)) + dG_{F(x)}(d^2F_x(u, v)).$$

Cvičení:

- (1) Pro afinní zobrazení  $S : x \mapsto Ax + b$  je  $dF_x = A$  pro všechna  $x$ .
- (2)  $F : (x, y) \mapsto x \cdot y \implies dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \cdot \eta + \xi \cdot y$
- (3)  $F(x) = \|x\| \implies dF_x(\xi) = \frac{x \cdot \xi}{\|x\|}$
- (4)  $F : (x, y) \mapsto x \times y \implies dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \times \eta + \xi \times y$
- (5)  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bilineární forma,  $Q(x) = B(x, x)$  příslušná kvadratická forma, pak  $dQ_x(\xi) = B(x, \xi) + B(\xi, x)$ .

## 2. KŘIVKY

### 2.1. Základní pojmy.

**Definice 2.1.** Buď  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy  $C^\infty$ )  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá *parametrizovaná křivka* v  $\mathbb{R}^n$ . Množina  $\langle c \rangle := c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$  se nazývá *obraz křivky*.

Pozn.: Je-li  $I$  uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na  $I$  restrikcí na  $I$  diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím  $I$ .

Příklad:  $c(t) = (t, t)^T$  je parametrizace přímky,  $c(t) = (\cos t, \sin t)^T$  parametrizace jednotkové kružnice v  $\mathbb{R}^2$  ( $I = \mathbb{R}$ ).

Pozn.: Obraz křivky nemusí mít tečnu v každém svém bodě, viz např.  $c(t) = (t^3, t^2)^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definice 2.2.** Parametrizovaná křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *regulární*, jestliže  $c'(t) \neq 0$  pro každé  $t \in I$ . Vektor

$$\mathbf{t}(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

nazýváme (*jednotkovým*) *tečným vektorem* křivky v bodě  $t$ .

Pozn.: Zobrazení  $c$  nemusí být prosté, bod  $x \in c(I)$  obrazu křivky tedy nemusí mít jednoznačně určenou tečnu (př. -  $c(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)^T$ ). Je-li  $c$  prosté, říkáme, že parametrizovaná křivka je jednoduchá.

Příklad: Zobrazení  $c(t) = (t, t)^T$  ( $t > 0$ ) a  $\tilde{c}(t) = (e^t, e^t)^T$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) mají stejný obraz, tedy ‘parametrizují tutéž křivku’.

**Definice 2.3.** Je-li  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulární parametrizovaná křivka a  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  difeomorfismus intervalu  $\tilde{I}$  na  $I$ , je  $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako  $c$ . Difeomorfismus  $\phi$  pak nazýváme *změnou parametru* (reparametrizací) křivky  $c$ . Je-li navíc  $\phi' > 0$  na  $\tilde{I}$ , nazveme  $\phi$  *změnou parametru* (reparametrizací) *zachovávající orientaci*.

**Definice 2.4.** Na množině všech regulárních parametrizovaných křivek v  $\mathbb{R}^n$  definujeme ekvivalenci  $\sim$  takto:  $c \sim \tilde{c}$ , jestliže  $\tilde{c}$  je reparametrizací  $c$ . Křivkou v  $\mathbb{R}^n$  pak rozumíme třídu ekvivalence  $\sim$ . Podobně definujeme ekvivalenci  $\sim'$ :  $c \sim' \tilde{c}$ , jestliže  $\tilde{c}$  je reparametrizací  $c$  se zachováním orientace. Orientovanou křivkou v  $\mathbb{R}^n$  rozumíme třídu ekvivalence  $\sim'$ .

**Věta 2.1** (Implicitně zadaná křivka). *Bud'  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  otevřená a  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  diferencovatelné. Označme  $\Gamma = \{x \in G : F(x) = 0\}$  a bud'  $x_0 \in \Gamma$  takový, že zobrazení  $dF_{x_0}$  je na  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Pak existuje okolí  $U$  bodu  $x_0$  v  $\mathbb{R}^n$ , otevřený interval  $I \subseteq \mathbb{R}$  a regulární parametrizovaná křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  taková, že  $c(I) = \Gamma \cap U$ .*

*Důkaz.* Protože  $dF_{x_0}$  je na, je po eventuálním přechíslování proměnných determinant matice  $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{n-1}$  různý od nuly. Podle věty o implicitních funkcích tedy existuje otevřený interval  $I$  obsahující  $x_0^n$ , okolí  $V$  bodu  $(x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$  a diferencovatelné zobrazení  $g : I \rightarrow V$  takové, že  $g(x_0^n) = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$  a  $F(g(x_n), x_n) = 0$  na  $I$ . Zobrazení  $c : x_n \mapsto (g(x_n), x_n)$  je pak hledanou regulární parametrizovanou křivkou.  $\square$

## 2.2. Délka křivky.

**Definice 2.5.** *Délka parametrizované křivky  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je definována jako*

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| : m \in \mathbb{N}, t_0 < t_1 < \dots < t_m \in I \right\}.$$

**Věta 2.2.** *Pro parametrizovanou křivku  $c$  platí*

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt.$$

*Důkaz.* Přednáška Matematická analýza.  $\square$

**Definice 2.6.** Křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *parametrizována obloukem*, jestliže  $\|c'(s)\| = 1$  pro všechna  $s \in I$ .

Pozn.: V geometrii se obvykle parametr oblouku značí symbolem  $s$ . Někdy se též používá značení  $\frac{dc}{ds}(\cdot) =: c'(\cdot)$  pro derivaci podle parametru oblouku, kdežto  $\frac{dc}{dt}(\cdot) =: \dot{c}(\cdot)$  pro derivaci podle obecného parametru.

**Věta 2.3.** *Ke každé regulární parametrizované křivce  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  existuje změna parametru  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  zachovávající orientaci a taková, že  $\tilde{c} = c \circ \phi$  je parametrizace obloukem.*

*Důkaz.* Zvolme  $t_0 \in I$  a položme

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\tau)\| d\tau, \quad t \in I$$

(délka křivky  $c$  |  $(t_0, t)$ ) a označme  $\tilde{I} = \ell(I)$  obraz intervalu  $I$  ( $\tilde{I}$  je opět interval). Funkce  $\ell : I \rightarrow \tilde{I}$  je rostoucí a  $\ell'(t) = \|c'(t)\|$ ,  $t \in I$ . Položme  $\phi = \ell^{-1}$ , pak  $\phi'(s) = \|c'(\phi(s))\|^{-1}$ , a tedy parametrizace  $\tilde{c} = c \circ \phi$  splňuje  $\|\tilde{c}'(s)\| = \|c'(\phi(s))\phi'(s)\| = 1$ .  $\square$

Příklad: Regulární parametrizovaná křivka  $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$ ,  $t \in (0, 2\pi)$  má parametrizaci obloukem  $\tilde{c}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})^T$ ,  $s \in (0, 2\pi r)$ .

### 2.3. Křivost.

**Definice 2.7.** Buď  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulární parametrizovaná křivka. Její *křivost* v bodě  $t \in I$  je definována vztahem

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|c'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Body s nulovou křivostí nazýváme *inflexními body* křivky.

Pozn.: Je-li  $\phi$  změna parametru, pak tečný vektor reparametrizované křivky zřejmě splňuje  $\tilde{\mathbf{t}}(s) = \pm \mathbf{t}(\phi(s))$ , a tedy

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\|\tilde{\mathbf{t}}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|} = \frac{\|\mathbf{t}'(\phi(s))\phi'(s)\|}{\|c'(\phi(s))\phi'(s)\|} = \kappa(\phi(s)).$$

Křivost křivky v bodě je tedy invariantní vzhledem k reparametrizaci.

**Věta 2.4.** Pro regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  platí

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

*Důkaz.* Protože  $\mathbf{t} = c'/\|c'\|$ , platí

$$\mathbf{t}' = \left( \frac{c'}{\|c'\|} \right)' = \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'}{\|c'\|^3}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \|\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'\|^2 &= \|c'\|^4 \|c''\|^2 - \|c'\|^2 (c' \cdot c'')^2 \\ &= \|c'\|^2 \det \begin{pmatrix} c' \cdot c' & c' \cdot c'' \\ c' \cdot c'' & c'' \cdot c'' \end{pmatrix} \\ &= \|c'\|^2 \|c' \times c''\|^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro normu vektorového součinu z kapitoly 1.2. Dokazovaný vztah pak plyne z definice  $\kappa = \|\mathbf{t}'\|/\|c'\|$ .  $\square$

### 2.4. Frenetův repér křivky v $\mathbb{R}^3$ .

**Definice 2.8.** Buď  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulární parametrizovaná křivka. V neinflexním bodě  $t \in I$  definujeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= c'(t)/\|c'(t)\| && \text{tečný vektor} \\ \mathbf{n}(t) &= \mathbf{t}'(t)/\|\mathbf{t}'(t)\| && \text{normálový vektor} \\ \mathbf{b}(t) &= \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) && \text{binormálový vektor} \\ \tau(t) &= \mathbf{n}'(t) \cdot \mathbf{b}(t)/\|c'(t)\| && \text{torze} \\ &c(t) + \text{Lin}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\} && \text{oskulační rovina} \\ &c(t) + \text{Lin}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\} && \text{rektifikační rovina} \\ &c(t) + \text{Lin}\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\} && \text{normálová rovina} \end{aligned}$$

**Věta 2.5** (Frenetovy rovnosti). Pro regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  a každý její neinflexní bod platí:

- (i)  $E(t) := \{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$  je kladně orientovaná ortonormální báze  $\mathbb{R}^3$ .

(ii)  $\mathbf{t}'(t) = \|c'(t)\|\kappa(t)\mathbf{n}(t)$ ,  $\mathbf{n}'(t) = \|c'(t)\|(-\kappa(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)\mathbf{b}(t))$  a  $\mathbf{b}'(t) = -\|c'(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t)$ , v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

*Důkaz.* (i). Zřejmě  $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$ . Dále derivováním vztahu  $\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t) = 1$  dostaneme  $2\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}'(t) = 0$ , tedy  $\mathbf{n}(t) \perp \mathbf{t}(t)$  a z definice též  $\|\mathbf{n}(t)\| = 1$ . Z vlastností vektorového součinu pak plyne, že  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)\}$  je kladně orientovaná ortonormální báze.

(ii). První vztah plyne přímo z definic  $\mathbf{n}(t)$  a  $\kappa(t)$ . Vyjádřeme dále vektor  $\mathbf{n}'$  v souřadnicích vůči bázi  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ :

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Derivováním vztahu  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$  dostaneme  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$ , což je rovno  $-\|c'\|\kappa$  dle první rovnosti. Dále opět z  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  plyne  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$ . Konečně  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \|c'\|\tau$  z definice torze, čímž dostáváme druhou rovnost. Využitím obou již dokázaných vztahů dále dostaneme pro  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= \|c'\|(\kappa\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})) \\ &= \|c'\|\tau(\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = -\|c'\|\tau\mathbf{n} \end{aligned}$$

(rovnost  $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$  se snadno ověří z definice vektorového součinu), což dává třetí Frenetovu rovnost.  $\square$

**Poznámka 2.6.** Z definice je zřejmé, že je-li  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulární parametrizovaná křivka a  $\phi : J \rightarrow I$  změna parametru zachovávající orientaci, pak tečna, hlavní normála a binormála reparametrizované křivky  $\tilde{c} = c \circ \phi$  splňují v neinflexním bodě  $s \in J$

$$\tilde{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(\phi(s)), \quad \tilde{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(\phi(s)), \quad \tilde{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(\phi(s)),$$

tedy vektory Frenetova repéru nezávisí na parametrizaci křivky. Derivováním pak dostaneme

$$\tilde{\mathbf{t}}'(s) = \mathbf{t}'(\phi(s))\phi'(s), \quad \tilde{\mathbf{n}}'(s) = \mathbf{n}'(\phi(s))\phi'(s), \quad \tilde{\mathbf{b}}'(s) = \mathbf{b}'(\phi(s))\phi'(s),$$

a protože také  $\tilde{c}'(s) = c'(\phi(s))\phi'(s)$  a  $\phi'(s) > 0$  pro změnu parametru zachovávající orientaci, dostaneme

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(\phi(s)) \quad \text{a} \quad \tilde{\tau}(s) = \tau(\phi(s)),$$

tedy ani křivost a torze nezávisí na parametrizaci křivky zachovávající orientaci. Není těžké ověřit, že při změně orientace křivky vektory  $\mathbf{t}$  a  $\mathbf{b}$  a torze  $\tau$  mění znaménko, vektor  $\mathbf{n}$  a křivost  $\kappa$  se nemění.

**Věta 2.7.** Pro libovolnou regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  a neinflexní bod  $t \in I$  platí

$$\mathbf{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}$$

a

$$\tau(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}.$$

*Důkaz.* První rovnost plyne z toho, že vektory  $c', c''$  určují stejný podprostor jako  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  a báze  $\{c', c''\}$  a  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$  jsou shodně orientovány. Pro ověření druhé rovnosti vyjádříme

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|} = \left( \frac{c'}{\|c'\|} \right)' \frac{1}{\|c'\|\kappa} = \frac{c''\|c'\|^2 - c'(c' \cdot c'')}{\|c'\|^3} \frac{\|c'\|^2}{\|c' \times c''\|}$$

(použili jsme definici křivosti a vzorec z Věty 2.4). Derivováním uvedené rovnosti dostaneme vztah

$$\mathbf{n}' = \alpha c' + \beta c'' + \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c'''$$

pro nějaké (skalární) funkce  $\alpha, \beta$ . Z definice torze a vlastností vektorového součinu pak dostaneme

$$\tau = \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b}}{\|c'\|} = \frac{1}{\|c'\|} \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c''' \cdot \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

□

**Věta 2.8.** *Pro regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  bez inflexních bodů platí*

$$\tau(t) = 0, t \in I \iff \text{křivka leží v rovině.}$$

*Důkaz.* Je snadné ukázat, že rovinná křivka má nulovou torzi. Předpokládejme tedy naopak, že  $\tau = 0$ . Z Frenetových vzorců pak  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}$  je konstantní na  $I$ . Zvolme  $t_0 \in I$  a položme

$$g(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{b}, \quad t \in I.$$

Platí

$$g'(t) = c'(t) \cdot \mathbf{b} = \|c'(t)\| \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{b} = 0,$$

tedy funkce  $g$  je konstantní na  $I$ . Protože však  $g(t_0) = 0$ , je  $g = 0$  a křivka leží v rovině  $\{x : (x - c(t_0)) \cdot \mathbf{b} = 0\}$ . □

Pozn.: Je-li  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizace obloukem a  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  shodnost, pak  $\bar{c} := S \circ c$  je rovněž parametrizace obloukem a pro tuto křivku platí:

$$\bar{c} = S_0 \circ c, \quad \bar{\mathbf{t}} = S_0 \circ \mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{n}} = S_0 \circ \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \pm S_0 \circ \mathbf{b},$$

kde  $S_0$  je lineární složka  $S$  a  $\pm$  je znaménko  $\det S_0$ . Z těchto vztahů snadno plyne:  $\bar{\kappa} = \kappa$ ,  $\bar{\tau} = \pm\tau$ . Následující věta říká, že tento vztah lze i obrátit:

**Věta 2.9.** *Bud'te  $c, \bar{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dvě křivky parametrizované obloukem bez inflexních bodů a takové, že jejich funkce křivosti a torze splývají, tedy  $\bar{\kappa} = \kappa$  a  $\bar{\tau} = \tau$  na  $I$ . Pak existuje shodnost  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  taková, že  $\bar{c} = S \circ c$ .*

*Důkaz.* Zvolme  $s_0 \in I$ . Existuje právě jedna shodnost  $S : x \mapsto Ax + x_0$  na  $\mathbb{R}^3$  splňující

$$c(s_0) + x_0 = \bar{c}(s_0), \quad A\mathbf{t}(s_0) = \bar{\mathbf{t}}(s_0), \quad A\mathbf{n}(s_0) = \bar{\mathbf{n}}(s_0), \quad A\mathbf{b}(s_0) = \bar{\mathbf{b}}(s_0),$$

kde  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  je Frenetův repér křivky  $c$  a  $\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}\}$  Frenetův repér křivky  $\bar{c}$ . (Protože oba Frenetovy repéry jsou kladně orientovány, je  $S$  přímá shodnost, neboli  $\det A = 1$ ).

Obě křivky jsou parametrizovány obloukem, proto Frenetovy rovnice mají tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}' \\ \bar{\mathbf{n}}' \\ \bar{\mathbf{b}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix}.$$

Aplikujeme-li na první z uvedených soustav rovnic lineární transformaci  $A$ , dostaneme

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{t}' \\ A\mathbf{n}' \\ A\mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\mathbf{t} \\ A\mathbf{n} \\ A\mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Z posledních dvou soustav rovnic je zřejmé, že trojice vektorových funkcí  $(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}})$  a  $(A\mathbf{t}, A\mathbf{n}, A\mathbf{b})$  vyhovují stejné soustavě lineárních diferenciálních rovnic na intervalu  $I$ , a navíc se vzhledem k volbě  $A$  shodují v bodě  $s_0 \in I$ . Podle věty o jednoznačnosti řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic tedy musí platit

$$\bar{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{n}} = A\mathbf{n} \quad \text{a} \quad \bar{\mathbf{b}} = A\mathbf{b} \quad \text{na } I.$$

Speciálně máme  $\bar{c}' = Ac'$ , tudíž

$$S(c(s)) - S(c(s_0)) = \int_{s_0}^s Ac'(t)dt = \int_{s_0}^s \bar{c}'(t)dt = \bar{c}(s) - \bar{c}(s_0),$$

z čehož plyne  $S(c(s)) = \bar{c}(s)$ ,  $s \in I$ .  $\square$

**Věta 2.10.** *Bud'te  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  dvě diferencovatelné funkce na intervalu  $I$ , a necht' navíc  $\kappa > 0$  na  $I$ . Pak existuje křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizovaná obloukem a taková, že její křivost je  $\kappa$  a torze  $\tau$ .*

*Důkaz.* Frenetovy rovnice (viz důkaz Věty 2.9) udávají soustavu lineárních diferenciálních rovnic pro trojici vektorových funkcí  $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ ,  $s \in I$ . (Vyjádříme-li si vektory po souřadnicích, dostaneme soustavu devíti rovnic pro devět reálných funkcí; matici soustavy je pak třeba chápat tak, že symboly  $\kappa$  a  $\tau$  reprezentují matice  $\kappa I_3$ ,  $\tau I_3$ , kde  $I_3$  je jednotková matice v  $\mathbb{R}^3$ .) Předepíšeme-li počáteční podmínky ve vybraném bodě  $s_0 \in I$  například jako

$$\mathbf{t}(s_0) = e_1, \quad \mathbf{n}(s_0) = e_2, \quad \mathbf{b}(s_0) = e_3$$

(s vektory kanonické báze  $e_1, e_2, e_3$ ), z teorie lineárních diferenciálních rovnic víme, že soustava má řešení na intervalu  $I$ . Ukážeme nejprve, že vektory  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{R}^3$  pro každé  $s \in I$ . Šestice reálných funkcí

$$(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b})$$

splňuje podle Frenetových rovnic diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} h_1' &= 2\kappa h_4, \\ h_2' &= -2\kappa h_4 + \tau h_6, \\ h_3' &= -2\tau h_6, \\ h_4' &= -\kappa h_1 + \kappa h_2 + \tau h_5, \\ h_5' &= -\tau h_4 + \kappa h_6, \\ h_6' &= -\tau h_2 + \tau h_3 - \kappa h_5. \end{aligned}$$

Konstantní šestice funkcí  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$  vyhovuje této soustavě a splňuje počáteční podmínku v bodě  $s_0$ . Z věty o jednoznačnosti řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic je to jediné řešení, a tedy vektory  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{R}^3$  pro každé  $s \in I$ .



Položme dále

$$c(s_0) := o, \quad c(s) := \int_{s_0}^s \mathbf{t}(t) dt, \quad s \in I.$$

Zřejmě platí  $c'(s) = \mathbf{t}(s)$ ,  $c$  je tedy křivka parametrizovaná obloukem a  $\mathbf{t}$  je její tečný vektor. Z první Frenetovy rovnice máme  $\|\mathbf{t}'\| = \kappa\|n\| = \kappa$ , tedy  $\kappa$  je křivostí křivky  $c$ . Rovněž z první Frenetovy rovnice pak plyne  $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/\kappa$ , tedy  $\mathbf{n}$  je vektor hlavní normály křivky  $c$ . Vektor  $\mathbf{b}$  pak nutně musí být binormálovým vektorem a  $\tau$  je torze křivky  $c$ , z druhé (nebo třetí) Frenetovy rovnice.  $\square$

**2.5. Křivky v rovině.** Na parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  můžeme nahlížet jako na křivku v prostoru, doplníme-li třetí souřadnici nulou. V neinflexních bodech lze definovat vektory tečny a (hlavní) normály jako v Definicí 2.8, vektor binormály bude identicky roven (až na znaménko) třetímu vektoru kanonické báze  $e_3$ . Báze  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$  může být kladně nebo záporně orientována vůči kanonické bázi.

**Definice 2.9.** Pro regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definujeme znaménkovou křivost v bodě  $t$  vztahem

$$\kappa_z(t) := \sigma(t)\kappa(t), \quad t \in I,$$

kde  $\sigma(t) := \text{sgn det}(c'(t), c''(t))$  (klademe  $\text{sgn } 0 = 0$ ). Dále definujeme jednotkový vektor  $\mathbf{n}_*(t)$  tak, aby  $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t))$  byla kladně orientovaná ortonormální báze  $\mathbb{R}^2$ .

Pozn.:

- (1) Zřejmě platí  $|\kappa_z| = \kappa$ .
- (2) V neinflexních bodech křivky zřejmě platí  $\mathbf{n}_*(t) = \sigma(t)\mathbf{n}(t)$ .
- (3) V každém bodě  $t \in I$  regulární parametrizované křivky platí tato varianta Frenetových vzorců:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(t) &= \|c'(t)\|\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t), \\ \mathbf{n}'_*(t) &= -\|c'(t)\|\kappa_z(t)\mathbf{t}(t). \end{aligned}$$

**Tvrzení 2.11.** Pro regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

*Důkaz.* Vztah plyne z definice  $\kappa_z$  a ze vzorce pro  $\kappa(t)$  ve větě 2.4, neboť zřejmě platí

$$\det(c'(t), c''(t)) = \sigma(t)\|c'(t) \times c''(t)\|$$

(chápeme-li vektory na pravé straně jako vnořené do  $\mathbb{R}^3$ ).  $\square$

**Věta 2.12.** Bud'  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka. Pak platí:

- (1)  $\kappa(t) = 0$ ,  $t \in I$ , právě když  $c(I)$  je část přímky,
- (2)  $\kappa(t) = \kappa \neq 0$ ,  $t \in I$ , právě když  $c(I)$  je část kružnice o poloměru  $\kappa^{-1}$ .

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že křivka je parametrizována obloukem. V obou tvrzeních jsou implikace  $\Leftarrow$  zřejmé, dokážeme  $\Rightarrow$ .

- (1). Je-li  $\kappa = 0$ , z Frenetových vzorců dostaneme  $0 = \mathbf{t}' = c''$ , tedy  $c(s) = as + b$ .
- (2). Bud'  $\kappa(s) = \kappa$  konstantní. Položíme  $p(s) = c(s) + \kappa^{-1}\mathbf{n}(s)$ ; platí  $p'(s) = \mathbf{t}(s) + \kappa^{-1}\mathbf{n}'(s)$  a opět z Frenetových vzorců máme  $p'(s) = 0$ , tedy  $p(s) = p$  a  $\|c(s) - p\| = |\kappa|^{-1}$ .  $\square$

**Definice 2.10.** Je-li  $t$  neinflexním bodem křivky  $c$  v  $\mathbb{R}^2$ , nazýváme číslo  $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$  *poloměrem křivosti* a kružnici se středem  $p(t) = c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t)$  a poloměrem  $\rho(t)$  *oskulační kružnicí* křivky  $c$  v bodě  $t$ .

Pozn.: Křivka  $c$  a její oskulační kružnice mají v bodě  $c(t)$  ‘dotyk druhého řádu’, tj. mají v tomto bodě společnou tečnu i křivost.

**Definice 2.11.** Bud’  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka s nenulovou křivostí. Parametrizovaná křivka

$$\tilde{c} : t \mapsto c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t), \quad t \in I,$$

se nazývá *evoloutou křivky*  $c$ . Původní křivka  $c$  se naopak nazývá *evolventou křivky*  $\tilde{c}$ .

Pozn.: Evoluta je tvořena středy oskulačních kružnic dané křivky. Evoluta nemusí být regulární parametrizovaná křivka (např. evoluta kružnice je tvořena jen jedním bodem).

**Tvrzení 2.13.** *Nechť je křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizovaná obloukem,  $s_0 \in I$ , a nechť je křivost  $\kappa(s)$  křivky  $c$  nenulová na  $I$ . Pak parametrizovaná křivka*

$$\bar{c} : s \mapsto c(s) - (s - s_0)c'(s), \quad s \in I \setminus \{s_0\},$$

*je její evolventou.*

*Důkaz.* Derivováním a užitím Frenetových vzorců spočteme

$$\begin{aligned} \bar{c}'(s) &= -(s - s_0)\kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \bar{c}''(s) &= (s - s_0)\kappa(s)^2\mathbf{t}(s) - (\kappa(s) + (s - s_0)\kappa'(s))\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

( $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \kappa$  značí po řadě tečnu, normálu a křivost křivky  $c$ ). Tečna, normála a křivost křivky  $\bar{c}$  splňují:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}(s) &= -\operatorname{sgn}(s - s_0)\mathbf{n}(s), \\ \bar{\mathbf{n}}(s) &= \operatorname{sgn}(s - s_0)\mathbf{t}(s), \\ \bar{\kappa}(s) &= |s - s_0|^{-1}. \end{aligned}$$

Evoluta křivky  $\bar{c}$  má tedy parametrizaci

$$\bar{p}(s) = \bar{c}(s) + \bar{\kappa}(s)^{-1}\bar{\mathbf{n}}(s) = c(s),$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

## 2.6. Globální teorie rovinných křivek.

**Věta 2.14.** *Bud’  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  křivka parametrizovaná obloukem. Pak existuje diferencovatelná funkce  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  splňující*

$$\mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad s \in I.$$

*Funkce  $\theta$  není určena jednoznačně, ale rozdíly  $\theta(t_2) - \theta(t_1)$  nezávisí na volbě  $\theta$ . Navíc platí*

$$\kappa_z(s) = \theta'(s), \quad s \in I.$$

*Důkaz.* Funkce  $\theta$  je spojitou verzí argumentu funkce  $\mathbf{t}(t)$  (chápeme-li ji jako komplexní funkci) a její existence a diferencovatelnost je známa z komplexní analýzy. (Idea důkazu: Je-li tečna  $\mathbf{t}(t) = (x(t), y(t))$  obsažena v polorovině  $\{x > 0\}$ , můžeme funkci  $\theta$  definovat vztahem  $\theta(t) := \arctg \frac{y(t)}{x(t)}$ . Pro danou křivku pak definujeme  $\theta(t)$  postupně na podintervalech, na nichž je obraz tečny obsažen v nějaké otevřené polorovině, přitom musíme hlídat “navazování” na již definované hodnoty.)

Zderivováním rovnice dostaneme

$$\mathbf{t}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}_*(s).$$

Zároveň však platí  $\mathbf{t}'(s) = \kappa_z(s)\mathbf{n}_*(s)$ , tedy dostáváme  $\theta'(s) = \kappa_z(s)$ ,  $s \in I$ . Nezávislost přírůstků funkce  $\theta$  na volbě  $\theta$  plyne z rovnosti

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \kappa_z(s) ds.$$

□

**Definice 2.12.** Parametrizovaná křivka  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je *uzavřená*, jestliže  $c(a) = c(b)$  a  $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ . Uzavřená křivka je *jednoduchá*, je-li  $c$  prosté na  $[a, b)$ . *Jordanova křivka* je jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka.

**Definice 2.13.** Buď  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uzavřená křivka parametrizovaná obloukem. Číslo

$$n_c = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

se nazývá *rotační index* křivky  $c$ .

**Lemma 2.15.** *Rotační index je celé číslo a platí*

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_z(s) ds.$$

*Důkaz.* Z definice uzavřené křivky máme  $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$ , tedy  $\theta(b) - \theta(a)$  je celým násobkem  $2\pi$ . Poslední rovnost plyne z vlastnosti  $\theta'(s) = \kappa_z(s)$  (Věta 2.14). □

Následující dvě věty jsou sice intuitivně zřejmé, jejich formální důkaz však není triviální.

**Věta 2.16** (Jordanova). *Je-li  $c$  Jordanova křivka, pak existují otevřené souvislé množiny  $\text{Int } c$  (vnitřek  $c$ ),  $\text{Ext } c$  (vnějšek  $c$ ) takové, že  $\text{Int } c$  je omezená,  $\text{Ext } c$  neomezená a*

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int } c \cup \langle c \rangle \cup \text{Ext } c$$

*je disjunktní rozklad.*

Řekneme, že Jordanova křivka  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je *kladně orientovaná*, jestliže pro každé  $t$ ,  $c(t) + \varepsilon\mathbf{n}_*(t) \in \text{Int } c$  pro dostatečně malá  $\varepsilon$ . V opačném případě je křivka *záporně orientovaná*. (Při obvyklé orientaci roviny to znamená, že při průběhu křivky leží vnitřek oblasti “po levé ruce”.)

**Věta 2.17** (Umlaufsatz). *Je-li  $c$  Jordanova křivka s kladnou (zápornou) orientací, pak  $n_c = 1$  ( $n_c = -1$ ).*

*Myšlenka důkazu.* Bud'  $c = (x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  kladně orientovaná Jordanova křivka parametrizovaná obloukem. Označme  $\Delta := \{(s, t) : a \leq s \leq t \leq b\}$  a definujme funkci  $h : \Delta \rightarrow S^1$  předpisem

$$h(s, t) := \begin{cases} \mathbf{t}(s) & \text{pro } s = t, \\ -\mathbf{t}(a) & \text{pro } (s, t) = (a, b), \\ \frac{c(t) - c(s)}{\|c(t) - c(s)\|} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Lze ukázat, že  $h$  je spojitá na  $\Delta$ . Podle věty o existenci spojitě větve argumentu z komplexní analýzy existuje spojitá funkce  $\vartheta : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že

$$h(s, t) = (\cos \vartheta(s, t), \sin \vartheta(s, t)), \quad (s, t) \in \Delta.$$

Platí tedy

$$\int_a^b \kappa_z(s) ds = \theta(b) - \theta(a) = \vartheta(b, b) - \vartheta(a, a) = (\vartheta(a, b) - \vartheta(a, a)) + (\vartheta(b, b) - \vartheta(a, b)).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $y(a) = \min\{y(s) : s \in [a, b]\}$ . Pak  $y'(a) = 0$  a  $\mathbf{t}(a) = e_1$ ; BÚNO nechť  $\vartheta(a, a) = 0$ . Pak platí  $h(a, s) \cdot e_2 \geq 0$  pro každé  $s$ , tedy  $\vartheta(a, b) = \pi$ . Podobně se ukáže, že  $\vartheta(b, b) = 2\pi$ .  $\square$

**Lemma 2.18.** *Bud'  $c = (x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  kladně orientovaná Jordanova křivka. Pak plošný obsah oblasti  $\text{Int } c$  je roven*

$$(1) \quad A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y)dt.$$

*Důkaz.* Jedná se o velmi speciální případ Greenovy věty pro rovinné křivky, která je součástí přednášky Matematická analýza 4. Greenova věta říká, že je-li  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  Jordanova křivka parametrizovaná obloukem a  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferencovatelné vektorové pole, pak

$$\int_a^b F(c(s)) \cdot \mathbf{t}(s) ds = \int_{\text{Int } c} \left( \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Volbou  $F(x, y) = (-y, 0)$  dostaneme první vzorec, volbou  $F(x, y) = (0, x)$  druhý vzorec, třetí je jejich aritmetickým průměrem. Při reparametrizaci zachovávající orientaci  $\tilde{c} = c \circ \phi$ ,  $\phi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ , se hodnota integrálů ve vzorcích nezmění, což plyne snadno se substitučního vzorce ( $t = \phi(s)$ ,  $d\phi(s) = \phi'(s)ds$ ).  $\square$

Pozn.: Je-li  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  diferencovatelná funkce (ne nutně prostá) splňující  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$ , pak vzorec (1) platí i pro reparametrizaci Jordanovy křivky  $\tilde{x}(s) = x(\phi(s))$ ,  $\tilde{y}(s) = y(\phi(s))$ ,  $s \in I$ . (Ukáže se jednoduchou substitucí v integrálech.)

**Věta 2.19** (Isoperimetrická nerovnost). *Bud'  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  Jordanova křivka délky  $L$  a bud'  $A$  plošný obsah vnitřku  $\text{Int } c$ . Pak*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

*přitom rovnost nastane, právě když  $c[a, b]$  je kružnice.*

*Důkaz.* Mějme Jordanovu křivku parametrizovanou obloukem  $c(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in [0, L]$ , umístěnou tak, že její kolmá projekce na osu  $x$  je  $[-r, r]$  a  $x(0) = r$ ,  $x(s_1) = -r$ . Dále označme

$$\bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [0, s_1], \\ -\sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [s_1, L]. \end{cases}$$

$(x(s), \bar{y}(s))$  je parametrizace kružnice se středem v počátku a poloměrem  $r$ . (Diferencovatelnost funkce  $\bar{y}$  v bodech, kde  $|x| = r$ , je třeba ověřit z definice.) Podle předchozího Lemmatu (a poznámky za ním) máme

$$A = \int_0^L xy' ds, \quad \pi r^2 = - \int_0^L \bar{y}x' ds,$$

tudíž

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - \bar{y}x') ds.$$

Podle Schwartzovy nerovnosti

$$xy' - \bar{y}x' = \begin{pmatrix} x \\ -\bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \leq \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} = r,$$

máme tedy odhad

$$A + \pi r^2 \leq Lr.$$

Podle známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr,$$

a tedy  $4\pi Ar^2 \leq L^2 r^2$ , čímž je nerovnost dokázána.

Předpokládejme nyní, že nastal případ  $L^2 = 4\pi A$ . Z postupu důkazu je zřejmé, že musí být  $A = \pi r^2$  (rovnost v AG-nerovnosti); pak ale  $L = 2\pi r$  a tedy délka průmětu  $2r$  nezávisí na směru promítání. Dále musí platit rovnost ve Schwartzově nerovnosti pro vektory  $(x, -\bar{y})^T$ ,  $(y', x')^T$ , tedy  $(x, -\bar{y})^T = \alpha(y', x')^T$  pro nějaké  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Porovnáním délek obou vektorů dostaneme  $\alpha = \pm r$ , a tedy  $x = \pm r y'$ . Protože  $r$  nezávisí na směru promítání, můžeme zaměnit proměnné a platí též  $y = \pm r x'$ , z čehož plyne

$$x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2,$$

tedy obraz  $c$  je kružnice. □

### 2.6.1. Konvexní křivky (obvykle se nepřednáší).

**Definice 2.14.** Jordanova křivka  $c$  je *konvexní*, jestliže pro každé  $t_0 \in [a, b]$  platí buď  $(c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{n}_*(t_0) \leq 0$  pro všechna  $t$ , nebo  $(c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{n}_*(t_0) \geq 0$  pro všechna  $t$  (neboli celý obraz křivky leží v jedné polorovině určené tečnou ke křivce v daném bodě).

**Poznámka 2.20.** Pro konvexní uzavřenou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  nastává právě jedna z následujících možností:

- (1)  $(c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{n}_*(t_0) \leq 0$  pro všechna  $t_0, t \in I$ ,
- (2)  $(c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{n}_*(t_0) \geq 0$  pro všechna  $t_0, t \in I$ .

Podle definice sice typ nerovnosti ( $\leq, \geq$ ) může záviset na  $t_0$ , jednoduchým použitím argumentu spojitosti ale nahlédneme, že se typ nerovnosti měnit nemůže.

**Lemma 2.21.** *Jednoduchá regulární uzavřená parametrizovaná křivka je konvexní, právě když její křivost nemění znaménko (tzn. je všude nezáporná nebo všude nekladná).*

Pozn.: Podmínka “ $\kappa_z \geq 0$  nebo  $\kappa_z \leq 0$  na  $I$ ” je zřejmě ekvivalentní podmínce monotonie funkce  $\theta$  z Věty 2.14.

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizována obloukem. Bud’  $\theta$  funkce z Věty 2.14.

Předpokládejme nejprve, že  $c$  je konvexní, nechť platí třeba podmínka (1) z poznámky výše. Ukážeme, že je-li pro  $t_1 < t_2$  splněna podmínka  $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ , musí být  $\theta$  konstantní na celém intervalu  $[t_1, t_2]$ . Z této vlastnosti již plyne, že  $\theta$  je monotónní na  $[a, b]$ , a tedy že křivost nemění znaménko. Nechť tedy  $\theta(t_1) = \theta(t_2)$  a označme  $p_1 = c(u_1)$ ,  $p_2 = c(u_2)$ . Z definice konvexnosti křivky (a poznámky za ní) musí být úsečka  $[p_1, p_2]$  kolmá na vektor  $\mathbf{n}_* := \mathbf{n}_*(t_1) = \mathbf{n}_*(t_2)$  a celý obraz křivky  $c$  leží v jedné polorovině vymezené přímkou určenou body  $p_1, p_2$ . Ukážeme, že  $c([t_1, t_2]) \cap P = [p_1, p_2]$ , kde  $P$  je pás v rovině šířky  $\|p_1 - p_2\|$  a s body  $p_1, p_2$  na hranici. (Z toho už snadno plyne, že  $c([t_1, t_2]) = [p_1, p_2]$  a  $\mathbf{n}_*(t) = \mathbf{n}_*$  pro každé  $t \in [t_1, t_2]$ .) Nechť (bez újmy na obecnosti) je  $\mathbf{t}(t_1) = \mathbf{t}(t_2)$  kladným násobkem vektoru  $p_2 - p_1$ , a bud’  $L$  přímka ležící v pásu  $P$  (a tedy kolmá k  $[p_1, p_2]$ ). Ze souvislosti musí  $c([t_1, t_2])$  protínat  $L$ . Je-li  $t > t_1$  nejmenší parametr, pro nějž  $c(t) \in L$ , pak zřejmě  $\mathbf{t}(t) \cdot (p_2 - p_1) \geq 0$ , a tedy  $\mathbf{n}_*(t) \cdot \mathbf{n}_* \geq 0$ . Kdyby  $(c(t) - p_1) \cdot \mathbf{n}_* < 0$ , pak by nemohlo platit současně  $(p_1 - c(t)) \cdot \mathbf{n}_*(t) \leq 0$  a  $(p_2 - c(t)) \cdot \mathbf{n}_*(t) \leq 0$  (nakreslete si obrázek), což by bylo ve sporu s konvexitou křivky. Musí tedy  $c(t)$  ležet na úsečce  $[p_1, p_2]$ .

Nechť naopak  $c$  není konvexní, tedy existuje  $t_0 \in I$  tak, že funkce  $\phi(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{n}_*(t_0)$  mění znaménko. Označme  $t_+, t_-$  body (jistě různé od  $t_0$ ), kde  $\phi$  nabývá maxima a minima. Je  $\phi'(t_+) = \phi'(t_-) = \phi'(t_0) = 0$ , tedy všechny tři vektory  $\mathbf{t}(t_+), \mathbf{t}(t_-), \mathbf{t}(t_0)$  jsou kolmé k  $\mathbf{n}_*(t_0)$ , tudíž aspoň dva z nich se shodují. Označme  $t_1, t_2$  tyto dva různé body, pro něž  $\mathbf{t}(t_1) = \mathbf{t}(t_2)$ ; změnou parametru můžeme dosáhnout toho, že  $t_1 = a$  (a pak  $a < t_2 < b$ ). Pak máme  $\theta(t_2) - \theta(a) = 2m_1\pi$  a  $\theta(b) - \theta(t_2) = 2m_2\pi$  pro nějaká celá čísla  $m_1, m_2$ . Pokud by  $\theta$  byla monotónní, muselo by být  $m_1 m_2 > 0$  ( $\theta$  je nekonstantní na  $[a, t_2]$  i na  $[t_2, b]$ ). Pak by ale nemohlo být  $m_1 + m_2 = \pm 1$ , což je důsledek Věty 2.17. Funkce  $\theta$  tedy není monotónní a křivost mění znaménko.  $\square$

### 3. SFÉRICKÁ GEOMETRIE

V této kapitole se budeme zabývat geometrií na jednotkové sféře v prostoru

$$\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

**Definice 3.1.** *Hlavní kružnice* na sféře je libovolná kružnice  $\ell \subset \mathbb{S}^2$  jednotkového poloměru (lze ji tedy vyjádřit jako průnik  $\mathbb{S}^2$  s rovinou procházející počátkem). Hlavní kružnice se nazývají též *přímkami* na sféře. *Úsečkou* na sféře rozumíme libovolný oblouk hlavní kružnice délky nejvýše rovné  $\pi$ .

Pozn.: Je zřejmé, že pro každou dvojici  $A, B \in \mathbb{S}^2$  různých bodů na sféře, které nejsou *antipodální* (tedy  $A \neq \pm B$ ) existuje právě jedna úsečka na sféře spojující  $A, B$  (leží v hlavní kružnici dané průnikem sféry s rovinou určenou body  $A, B$  a počátkem).

**Definice 3.2.** *Vzdálenost* bodů  $A, B \in \mathbb{S}^2$  definujeme jako délku úsečky spojující tyto body.

Pozn.: Lze ukázat, že délka libovolné křivky na sféře spojující dva body je větší nebo rovna vzdálenosti těchto bodů, přitom rovnost nastává právě tehdy, když se jedná o úsečku. Toto bude později vyplývat z teorie geodetických křivek.

**Definice 3.3.** Buďte  $AB$  a  $AC$  dvě úsečky na sféře s délkami z intervalu  $(0, \pi)$ . Úhel sevřený těmito úsečkami definujeme jako úhel sevřený rovinami  $OAB$  a  $OAC$  (tedy rovinami vytínajícími příslušné hlavní kružnice). (Ekvivalentně jej lze definovat jako úhel (v  $\mathbb{R}^3$ ) sevřený tečnami k příslušným hlavním kružnicím v bodě  $A$ .)

Pro výpočet plošného obsahu oblasti na sféře můžeme použít standardní sférické souřadnice, tedy prosté zobrazení

$$\phi : \begin{cases} x(\varphi, \psi) &= \cos(\varphi) \cos(\psi), \\ y(\varphi, \psi) &= \sin(\varphi) \cos(\psi), \\ z(\varphi, \psi) &= \sin(\psi) \end{cases} \quad \varphi \in (-\pi, \pi), \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Jakobián  $\phi(\varphi, \psi)$  je roven  $\cos \psi$ , takže pro Borelovskou podmnožinu  $U \subset \mathbb{S}^2$  máme

$$S(U) = \iint_{\phi^{-1}(U)} \cos \psi \, d\varphi \, d\psi.$$

**Definice 3.4.** Buďte dány tři různé body  $A, B, C \in \mathbb{S}^2$  takové, že vektory (z počátku)  $A, B, C$  jsou lineárně nezávislé. Úsečky  $AB$ ,  $AC$  a  $BC$  (délky v  $(0, \pi)$ ) vymezují dvě souvislé oblasti na sféře, z nichž tu o menším obsahu nazýváme sférickým trojúhelníkem a značíme  $\Delta_{ABC}$ . (Formálně lze sférický trojúhelník definovat jako průnik tři polosfér s hranicemi tvořenými hlavními kružnicemi obsahujícími příslušné úsečky.)

**Věta 3.1.** *Plošný obsah sférického trojúhelníka  $\Delta_{ABC}$  je roven*

$$S(\Delta_{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou velikosti úhlů trojúhelníka u vrcholů  $A, B, C$ .

*Důkaz.* Označme  $A' = -A$ ,  $B' = -B$  a  $C' = -C$  body protilehlé bodům  $A, B, C$ . Celou sféru lze pokrýt osmi trojúhelníky s disjunktními vnitřky

$$\mathbb{S}^2 = \Delta_{ABC} \cup \Delta_{ABC'} \cup \Delta_{AB'C} \cup \Delta_{A'BC} \cup \Delta_{AB'C'} \cup \Delta_{A'BC'} \cup \Delta_{A'B'C} \cup \Delta_{A'B'C'},$$

přítom těchto osm trojúhelníků je tvořeno čtyřmi páry vzájemně izometrických trojúhelníků (např.  $\Delta_{ABC} \approx \Delta_{A'B'C'}$ ,  $\Delta_{ABC'} \approx \Delta_{A'B'C}$ ). Protože celá sféra má plošný obsah  $4\pi$  dostaneme rovnost

$$2\pi = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{ABC'}) + S(\Delta_{AB'C}) + S(\Delta_{A'BC}).$$

Dále si všimneme, že dvojice trojúhelníků  $\Delta_{ABC} \cup \Delta_{A'BC}$  pokrývá oblast vymezenou dvěma polosférami s hraničními hlavními kružnicemi obsahujícími úsečky  $AB$  a  $AC$ , tedy svírajícími úhel  $\alpha$ . Tato oblast má plošný obsah  $2\alpha$ , máme tedy rovnost

$$2\alpha = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{A'BC}).$$

Podobnou úvahou dostaneme

$$2\beta = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{AB'C}),$$

$$2\gamma = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{ABC'}).$$

Sečteme-li poslední tři rovnosti a odečteme od ní tu předcházející, dostaneme požadovaný vzorec.  $\square$

Ve sférické geometrii platí sinová věta jako v euklidovském případě.

**Věta 3.2** (Sinová věta ve sférické geometrii). *Pro sférický trojúhelník  $\Delta_{ABC}$  se stranami délek  $a, b, c$  a velikostmi protilehlých úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  platí*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

*Důkaz.* Použijeme následující identitu, která platí pro libovolné tři vektory  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ :

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$

(Vzhledem k linearitě stačí identitu ověřit pro vektory kanonické báze, což je snadné.)

Použijeme-li identitu pro vektory  $B \times C, C \times A$  a  $A$  (body  $A, B, C$  jednotkové sféry můžeme chápat též jako vektory z počátku), dostaneme

$$(B \times C) \times (C \times A) = ((B \times C) \cdot A)C$$

(protože  $(A \times B) \cdot B = 0$ ). Označme

$$\mathbf{n}_a := (\sin a)^{-1} B \times C, \quad \mathbf{n}_b := (\sin b)^{-1} C \times A, \quad \mathbf{n}_c := (\sin c)^{-1} A \times B.$$

Jsou to jednotkové vektory, kolmé k rovinám (po řadě)  $OBC, OAC, OAB$ , a jejich úhly jsou

$$\angle(\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b) = \pi - \gamma, \quad \angle(\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_c) = \pi - \beta, \quad \angle(\mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c) = \pi - \alpha.$$

Po dosazení do výše uvedené rovnosti máme

$$(\sin a \sin b) \mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_b = \det(A, B, C) C.$$

Opět z vlastností vektorového součinu je zřejmé, že  $\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_b = (\pm \sin \gamma) C$ , a tedy, dosazením a porovnáním velikosti dostáváme (siny všech uvažovaných úhlů jsou kladné)

$$\sin a \sin b \sin \gamma = |\det(A, B, C)|.$$

Protože výraz vpravo se nemění při kladné permutaci vrcholů trojúhelníka, platí rovnost

$$\sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta,$$

a vydělením výrazem  $\sin a \sin b \sin c$  dostaneme kýženou rovnost.  $\square$

Cosinová věta má ve sférické geometrii odlišnou podobu.

**Věta 3.3** (Cosinová věta ve sférické geometrii). *Za předpokladů věty 3.2 platí*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

*Důkaz.* Použijeme identitu

$$(B \times C) \cdot (C \times A) = (B \cdot C)(C \cdot A) - (B \cdot A)(C \cdot C) = (B \cdot C)(C \cdot A) - (B \cdot A).$$

S využitím normál z důkazu předchozí věty pak dostaneme

$$(\sin a \sin b) \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = \cos b \cos a - \cos c,$$

a protože zřejmě je  $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$ , máme

$$-(\sin a \sin b) \cos \gamma = \cos b \cos a - \cos c.$$

$\square$



**Důsledek 3.4** (Pythagorova věta ve sférické geometrii). *Pro pravouhlý sférický trojúhelník ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ) platí*

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

#### 4. PLOCHY

##### 4.1. Základní pojmy.

**Definice 4.1.** *Parametrizovaná plocha v  $\mathbb{R}^3$  je diferencovatelné zobrazení*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

kde  $U$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^2$  a  $df_u$  je prosté pro každé  $u \in U$ . Množina  $f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$  se nazývá *obraz* parametrizované plochy  $f$ . Je-li navíc zobrazení  $f : U \rightarrow f(U)$  homeomorfismus, nazýváme  $f$  *mapou*.

Pozn.: Vektory parciálních derivací

$$f_{u^1}(u) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(u), \quad f_{u^2}(u) = \frac{\partial f}{\partial u^2}(u)$$

parametrizované plochy  $f$  v bodě  $u$  jsou dle předpokladu lineárně nezávislé.

**Věta 4.1.** *Bud'  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizovaná plocha,  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  otevřená a  $\phi : V \rightarrow U$  difeomorfismus  $V$  na  $U$ . Pak  $\tilde{f} = f \circ \phi$  je parametrizovaná plocha se stejným obrazem jako  $f$ .*

*Důkaz.* Podle pravidla o diferenciálu složeného zobrazení platí

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

Podle předpokladů mají obě lineární zobrazení na pravé straně hodnotu 2, a tedy i  $d\tilde{f}_v$  má hodnotu 2 pro každé  $v \in V$ .  $\square$

**Definice 4.2.** Zobrazení  $\phi$  z předchozí věty se nazývá *změna parametru* plochy  $f$ . Je-li  $\det d\phi > 0$  na  $V$ , nazývá se *změnou parametru zachovávající orientaci*.

Pozn.: Záměna souřadnic  $(v^1, v^2)^T \mapsto (v^2, v^1)^T$  je změnou parametru, která nezachovává orientaci.

Příklady:

- (1)  $f(u^1, u^2) = \mathbf{a} + u^1 \mathbf{b} + u^2 \mathbf{c}$ ,  $U = \mathbb{R}^2$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ) - rovina,
- (2)  $f(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^2)^T$ ,  $U = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  - jednotková sféra bez pólů,
- (3)  $f(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2})^T$ ,  $U = \{(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$  - otevřená polosféra,
- (4)  $f(u^1, u^2) = (p(u^1) \cos u^2, p(u^1) \sin u^2, q(u^1))^T$ ,  $U = I \times \mathbb{R}$  - rotační plocha (vznikne rotací regulární parametrizované křivky  $u^1 \mapsto (p(u^1), 0, q(u^1))^T$  ležící v rovině  $\{x^2 = 0\}$  kolem osy  $x^1$ ; předpokládáme  $p \neq 0$  a  $(p')^2 + (q')^2 > 0$ ).

Pozn.: Parametrizovaná plocha nemusí být mapou, ani když je zobrazení  $f$  prosté. Lokálně ale tento výsledek platí:

**Věta 4.2.** *Bud'  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizovaná plocha.*

- (i) *Ke každému bodu  $u \in U$  existuje okolí  $U_0 \subset U$  bodu  $u$  takové, že  $f$  je prosté na  $U_0$ .*

(ii) *Nechť  $f$  je prosté a nechť  $U_0 \subset U$  je omezená otevřená podmnožina s  $\overline{U_0} \subset U$ . Pak restrikce  $f|_{U_0}$  je mapa.*

*Důkaz.* (i): Bud'  $u \in U$ . Protože matice diferenciálu  $df_u$  má hodnost 2, existuje  $\eta > 0$  takové, že

$$\|df_u v\| \geq \eta \|v\| \text{ pro všechny vektory } v \in \mathbb{R}^2.$$

Z definice diferenciálu  $df_u$  dostaneme existenci  $\delta > 0$  takového, že pro všechna  $w \in \mathcal{U}_\delta(u)$  platí

$$\|f(w) - f(u) - df_u(w - u)\| < \frac{\eta}{2} \|w - u\|.$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti je zároveň

$$\|f(w) - f(u) - df_u(w - u)\| \geq \|df_u(w - u)\| - \|f(w) - f(u)\| \geq \eta \|w - u\| - \|f(w) - f(u)\|,$$

a z obou nerovností dostáváme, že  $\|f(w) - f(u)\| \geq \frac{\eta}{2} \|w - u\|$  kdykoliv  $w \in \mathcal{U}_\delta(u)$ , tedy  $f$  je prosté na  $\mathcal{U}_\delta(u)$ .

V důkazu části (ii) potřebujeme ukázat, že  $f$  je homeomorfismus  $U_0$  na  $f(U_0)$ . Protože  $f$  je diferencovatelné, je jistě spojitě. Stačí tedy dokázat, že i  $f^{-1}$  je spojitě na  $f(U_0)$ .

Předpokládejme pro spor, že  $f^{-1}$  není spojitě na  $f(U_0)$ , tedy že existuje posloupnost bodů  $x_n = f(u_n) \in f(U_0)$  takové, že  $x_n \rightarrow x_0 = f(u_0)$ , ale  $f^{-1}(x_n) \not\rightarrow f^{-1}(x_0)$ , tedy  $u_n \not\rightarrow u_0$ . Přejdem k vybrané podposloupnosti zaručíme, že dokonce existuje  $\varepsilon > 0$  takové, že  $\|u_n - u_0\| \geq \varepsilon$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Množina  $\overline{U_0} \subset U$  je kompaktní, podle Weierstrassovy věty tedy existuje podposloupnost posloupnosti  $(u_n)$ , která konverguje k bodu  $u' \in U$ . Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že přímo  $u_n \rightarrow u'$ . Protože  $f$  je spojitě na  $U$ , musí platit  $x_n = f(u_n) \rightarrow f(u')$ . Z jednoznačnosti limity pak máme  $f(u_0) = f(u')$ , a z prostoty  $f$  též  $u_0 = u'$ , což je spor, neboť  $u_n \not\rightarrow u_0$ .  $\square$

**Definice 4.3.** *Plocha v  $\mathbb{R}^3$  je neprázdna podmnožina  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  taková, že ke každému  $x \in S$  existuje otevřené okolí  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  bodu  $x$ , otevřená množina  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  a mapa  $f : U \rightarrow V$  taková, že  $f(U) = S \cap V$ .*

**Lemma 4.3.** *Bud'  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  otevřená a  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovatelná funkce. Pak graf  $h = \{(u, h(u)) : u \in U\}$  je plocha.*

*Důkaz:* Zobrazení  $f : u \mapsto (u, h(u))$  je diferencovatelné a prosté, rovněž  $df_u$  je prosté pro každé  $u \in U$ . Zobrazení  $f^{-1}$  z graf  $h$  na  $U$  je spojitě, neboť je restrikcí spojitěho zobrazení (projekce do prvních dvou souřadnic).

**Definice 4.4.** *Bud'  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  otevřená a  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovatelná. Bod  $x \in G$  je *kritickým bodem* funkce  $F$ , jestliže  $dF_x = 0$ .  $F(x)$  je pak *kritickou hodnotou* funkce  $F$ .  $a \in F(G)$  je *regulární hodnotou* funkce  $F$ , jestliže  $F^{-1}(a)$  neobsahuje žádný kritický bod  $F$ .*

**Věta 4.4.** *Bud'  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  otevřená,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  diferencovatelná taková, že 0 je regulární hodnota  $F$ . Pak  $F^{-1}(0)$  je plocha.*

*Důkaz.* Bud'  $x_0 \in F^{-1}(0)$ . Podle předpokladu je  $dF_{x_0} \neq 0$ , tedy existuje souřadnice (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $x^3$ ) taková, že  $dF_{x_0}(e_3) = \frac{\partial F}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$ . Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí  $U$  bodu  $(x_0^1, x_0^2)$ , okolí  $V$  bodu  $x_0^3$  a diferencovatelná funkce  $g : U \rightarrow V$  tak, že  $g(x_0^1, x_0^2) = x_0^3$  a pro každé  $(x^1, x^2) \in U$  je  $g(x^1, x^2)$  jediným bodem  $V$ , pro nějž platí  $F(x^1, x^2, g(x^1, x^2)) = 0$ . Z uvedeného

plyne, že  $F^{-1}(0) \cap (U \times V)$  je grafem funkce  $g$ , je tedy plochou podle předchozího Lemmatu. Protože tento postup lze provést pro každý bod  $x \in F^{-1}(0)$ , je  $F^{-1}(0)$  plocha.  $\square$

Příklady: Množiny bodů  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  splňující níže uvedené rovnice jsou plochy v  $\mathbb{R}^3$  ( $a, b, c > 0$  jsou pevné parametry):

- (1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  - sféra,
- (2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  - elipsoid,
- (3)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  - jednodílný hyperboloid,
- (4)  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  - eliptický paraboloid,
- (5)  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  - hyperbolický paraboloid,
- (6)  $z = \frac{x^2}{a^2}$  - parabolický válec,
- (7)  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$  - torus ( $a > b > 0$ ).

Pod uvedenými názvy rozumíme samozřejmě i obrazy výše zadaných ploch při libovolné shodnosti. Plochy 1-6 se nazývají *kvadriky*.

#### 4.2. Křivky na ploše a tečný prostor.

**Definice 4.5.** *Křivkou na ploše  $S \subset \mathbb{R}^3$  rozumíme regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  s vlastností  $\langle c \rangle \subset S$  (obraz křivky leží na ploše  $S$ ).*

**Tvrzení 4.5.** *Leží-li regulární parametrizovaná křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  na části plochy  $S$  pokryté obrazem jedné mapy  $f : U \rightarrow S$ , pak  $u := f^{-1} \circ c : I \rightarrow U$  je regulární parametrizovaná křivka taková, že  $c = f \circ u$ .*

Pozn.: Zřejmě platí

$$c'(t) = df_{u(t)}(u'(t)) = (u^1)'(t)f_{u^1}(u(t)) + (u^2)'(t)f_{u^2}(u(t)), \quad t \in I.$$

*Důkaz.* Funkce  $u = f^{-1} \circ c$  je zřejmě spojitá na  $I$ . Ukážeme, že je diferencovatelná. Zvolme  $t_0 \in I$  a označme  $x_0 := c(t_0)$ ,  $u_0 := f^{-1}(x_0)$  a  $f = (f^1, f^2, f^3)^T$ . Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že matice

$$\left( \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(u_0) \right)_{i,j=1}^2$$

je regulární (značíme (jinak provedeme záměnu souřadnic). Označme  $\Pi : (x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1, x^2)$  projekci do prvních dvou souřadnic a  $v_0 := \Pi(x_0)$ . Zobrazení  $g := \Pi \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  je zřejmě diferencovatelné a má regulární diferenciál

$$dg_{u_0} = \Pi \circ df_{u_0}$$

v bodě  $u_0$ , proto podle věty o inverzním zobrazení existuje inverze  $(\Pi \circ f)^{-1}$  na nějakém okolí  $V$  bodu  $v_0$  a platí

$$d(g^{-1})_{v_0} = (\Pi \circ df_{u_0})^{-1}.$$

Pro body  $t \in I$  takové, že  $\Pi(c(t)) \in V$ , pak zřejmě platí

$$u(t) = f^{-1} \circ c(t) = g^{-1} \circ \Pi \circ c(t),$$

a tedy  $u$  je diferencovatelné v bodě  $t_0$ . Z regularity  $c(t)$  a ze vztahu  $c'(t) = df_{u(t)}(u'(t))$  plyne regularita  $u(t)$ .  $\square$

**Definice 4.6.** Řekneme, že vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  je *tečným vektorem* k ploše  $S$  v bodě  $x \in S$ , jestliže  $v = 0$  nebo existuje regulární parametrizovaná křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  na ploše  $S$  a bod  $t_0 \in I$  takový, že  $c(t_0) = x$  a  $c'(t_0) = v$ . Množinu všech tečných vektorů plochy  $S$  v bodě  $x$  značíme  $T_x S$ .

**Věta 4.6.** Je-li  $S \subset \mathbb{R}^3$  plocha a  $x \in S$ , pak  $T_x S$  je dvourozměrný lineární podprostor v  $\mathbb{R}^3$ . Je-li  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mapa plochy  $S$  s vlastností  $f(u_0) = x$ , pak vektory parciálních derivací  $f_{u^1}(u_0)$ ,  $f_{u^2}(u_0)$  tvoří bázi  $T_x S$  a lineární zobrazení  $df_{u_0}$  je bijekcí  $\mathbb{R}^2$  na  $T_x S$ .

*Důkaz.* Ukážeme, že  $T_x S$  je roven lineárnímu obalu vektorů  $f_{u^1}(u)$  a  $f_{u^2}(u)$ . Protože tyto dva vektory jsou dle předpokladu nezávislé, bude tím důkaz ukončen.

Jsou-li  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  a  $v = \alpha f_{u^1}(u_0) + \beta f_{u^2}(u_0)$ , pak parametrizovaná křivka

$$c : t \mapsto f(u_0^1 + \alpha t, u_0^2 + \beta t), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

(pro dostatečně malé  $\delta > 0$ ) je regulární, leží na ploše  $S$  a platí  $c'(t) = v$ , tedy  $v \in T_x S$ .

Je-li naopak  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulární parametrizovaná křivka ležící v obrazu mapy  $f$  a s vlastností  $c(t_0) = x$ , pak  $c = f \circ u$  pro regulární parametrizovanou křivku  $u : I \rightarrow U$  a platí

$$c'(t_0) = df_{u(t_0)} u'(t_0) = (u^1)'(t_0) f_{u^1}(u_0) + (u^2)'(t_0) f_{u^2}(u_0),$$

tedy  $c'(t_0)$  leží v lineárním obalu vektorů  $f_{u^1}(u)$  a  $f_{u^2}(u)$ .  $\square$

#### 4.3. První fundamentální forma.

**Definice 4.7.** Buď  $S \subset \mathbb{R}^3$  plocha a  $x \in S$ . Bilineární formu

$$I_x(X, Y) := X \cdot Y, \quad X, Y \in T_x S$$

na tečné rovině  $T_x S$  nazveme *první fundamentální formou* plochy  $S$  v bodě  $x$ . Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa plochy  $S$  s  $f(u) = x$ , pak vzor  $I_x$  při  $df_u$  je bilineární forma na  $\mathbb{R}^2$ , kterou budeme značit

$$g_u(\xi, \zeta) = I_x(df_u(\xi), df_u(\zeta)) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

$g_u$  nazveme *první fundamentální formou* plochy v bodě  $u$  a její matici označíme rovněž

$$g_u = \left( g_u(e_i, e_j) \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} f_{u^1} \cdot f_{u^1} & f_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ f_{u^2} \cdot f_{u^1} & f_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn.:  $I_x$  je restrikcí skalárního součinu v  $\mathbb{R}^3$  na  $T_x S$ ,  $I_x$  i  $g_u$  jsou proto symetrické pozitivně definitní bilineární formy. Jak uvidíme dále, první fundamentální forma určuje metrické vlastnosti plochy.

Pozn.: Je zřejmé, že první fundamentální formu můžeme definovat i pro parametrizovanou plochu (neboť každá parametrizovaná plocha je lokálně mapou podle tvrzení 4.2).

**Věta 4.7.** Je-li  $c : I \rightarrow S$  regulární parametrizovaná křivka na ploše  $S \subset \mathbb{R}^3$ , pak její délka je

$$L(c) = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

*Důkaz.* Vzorec plyne přímo z definice první fundamentální formy.  $\square$

Pozn.: Je-li  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizovaná plocha a  $u : I \rightarrow U$  regulární křivka v  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , pak je  $c = f \circ u$  regulární křivka na ploše  $f$  a její délka je

$$L = \int_I \sqrt{g_u(u'(t), u'(t))} dt.$$

**Věta 4.8.** Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa plochy  $S$ , pak plošný obsah borelovské podmnožiny plochy  $W \subset f(U) \subset S$  pokryté mapou  $f$  je roven

$$S(W) = \int_{f^{-1}(W)} \sqrt{\det g_u} du.$$

*Důkaz.* Vztah plyne z věty o substituci, neboť  $\sqrt{\det g_u}$  je Jakobián zobrazení  $f$  v bodě  $u$ . (Viz přednáška Matematická analýza 4.)  $\square$

Pozn.: Je-li  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizovaná plocha s první f.f.  $g$  a  $\phi : V \rightarrow U$  změna parametru, pak pro první f.f.  $\tilde{g}$  parametrizované plochy  $\tilde{f} = f \circ \phi$

$$\tilde{g}_v(\xi, \zeta) = g_{\phi(v)}(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2, \quad v \in V.$$

Rovnost plyne ze vztahu pro diferenciál složeného zobrazení

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

**Věta 4.9.** Bud'  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizovaná plocha a  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  shodnost. Označme  $\tilde{f} = S \circ f$  a  $\tilde{g}$  první fundamentální formu příslušnou  $\tilde{f}$ . Pak pro  $u \in U$  platí

$$\tilde{g}_u = g_u.$$

*Důkaz.* Podle pravidel derivování složeného zobrazení platí  $d\tilde{f}_u = A_0 \circ df_u$ , kde  $A_0(\cdot) = A(\cdot) - A(0)$  je lineární složka afinního zobrazení  $A$ . Protože  $A_0$  zachovává skalární součin, dostaneme

$$\tilde{g}_u(\xi, \zeta) = d\tilde{f}_u(\xi) \cdot d\tilde{f}_u(\zeta) = A_0(df_u(\xi)) \cdot A_0(df_u(\zeta)) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = g_u(\xi, \zeta).$$

$\square$

#### 4.4. Diferencovatelná zobrazení na ploše.

**Tvrzení 4.10.** Bud'te  $f : U \rightarrow S$ ,  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow S$  dvě mapy plochy  $S$  takové, že  $M := f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U}) \neq \emptyset$ . Pak zobrazení

$$\tilde{f}^{-1} \circ f : f^{-1}(M) \rightarrow \tilde{f}^{-1}(M)$$

je difeomorfismus a platí

$$d(\tilde{f}^{-1} \circ f)_u = (d\tilde{f}_{\tilde{u}})^{-1} \circ df_u,$$

jestliže  $f(u) = \tilde{f}(\tilde{u}) \in M$ .

*Důkaz.* Bud'  $x = f(u) = \tilde{f}(\tilde{u}) \in M$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tečná rovina  $T_x S$  není rovnoběžná s osou  $z$  (jinak provedeme záměnu souřadnic). Označme  $\Pi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$  projekci. Zobrazení  $g := \Pi \circ f$  a  $\tilde{g} := \Pi \circ \tilde{f}$  jsou diferencovatelná a diferenciály  $dg_u, d\tilde{g}_{\tilde{u}}$  jsou regulární, tedy podle věty o inverzním zobrazení je  $g$  ( $\tilde{g}$ ) difeomorfismus na nějakém okolí bodu  $u$  ( $\tilde{u}$ ). Pak ale je  $f^{-1} \circ \tilde{f} = g^{-1} \circ \tilde{g}$  difeomorfismus na nějakém okolí bodu  $u$ . Vztah pro diferenciály plyne z rovnosti  $f = \tilde{f} \circ (\tilde{f}^{-1} \circ f)$  a ze vzorce pro diferenciál složeného zobrazení.  $\square$

**Definice 4.8.** Zobrazení  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^k$  definované na ploše  $S$  je *diferencovatelné*, jestliže  $\Phi \circ f$  je diferencovatelné pro každou mapu  $f$  plochy  $S$ . Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa a  $x = f(u)$ , definujeme diferenciál  $\Phi$  v bodě  $x$  jako

$$d\Phi_x := d(\Phi \circ f)_u \circ (df_u)^{-1} : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Pozn.:

- (1) Diferencovatelnost  $\Phi$  stačí (podle předchozího tvrzení) ověřit jen pro mapy z nějakého atlasu ploch  $S$  (souboru map, jejichž obrazy plochu pokrývají).
- (2) Definice diferenciálu zobrazení na ploše je korektní, protože je-li  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow S$  jiná mapa s  $x = \tilde{f}(\tilde{u})$ , pak platí  $\Phi \circ f = \Phi \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ f$  na okolí bodu  $u$ , a tedy

$$d(\Phi \circ f)_u = d(\Phi \circ \tilde{f})_{\tilde{u}} \circ d(\tilde{f}^{-1} \circ f)_u = d(\Phi \circ \tilde{f})_{\tilde{u}} \circ (d\tilde{f}_{\tilde{u}})^{-1} \circ df_u,$$

$$\text{z čehož plyne } d(\Phi \circ f)_u \circ (df_u)^{-1} = d(\Phi \circ \tilde{f})_{\tilde{u}} \circ (d\tilde{f}_{\tilde{u}})^{-1}.$$

**Definice 4.9.** Diferencovatelné zobrazení  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  mezi dvěma plochami se nazývá *lokální difeomorfismus*, jestliže pro každý bod  $x \in S_1$  má diferenciál  $d\Phi_x$  hodnotu 2.

Pozn.: Lokální difeomorfismus nemusí být prosté zobrazení, ale je vždy “lokálně prosté”.

**Tvrzení 4.11.** *Bud'  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  lokální difeomorfismus.*

- (i) *Je-li  $c : I \rightarrow S_1$  regulární parametrizovaná křivka na ploše  $S_1$ , je  $\Phi \circ c : I \rightarrow S_2$  regulární parametrizovaná křivka na ploše  $S_2$ .*
- (ii) *Pro každý  $x \in S_1$  je  $d\Phi_x : T_x S_1 \rightarrow T_{\Phi(x)} S_2$  (lineární) bijekce.*

*Důkaz.* (i). Zobrazení  $\Phi \circ c$  je zřejmě spojité na  $I$ , dokážeme diferencovatelnost a regularitu. Bud'  $t \in I$  a zvolme mapu  $f$  plochy  $S_1$  tak, aby její obraz obsahoval bod  $c(t)$ . Pak  $c = f \circ u$  podle Tvrzení 4.5 s diferencovatelnou křivkou  $u$  v  $U$ , a tedy  $\Phi \circ c = \Phi \circ f \circ u$  je diferencovatelné na okolí  $t$ , přitom

$$(\Phi \circ c)'(t) = (\Phi \circ f \circ u)'(t) = d\Phi_{c(t)}(c'(t))$$

je nenulový vektor, neboť  $c'(t)$  je nenulový a  $d\Phi_x$  má plnou hodnotu.

(ii). Protože obraz diferenciálu  $d\Phi_x$  je dvourozměrný lineární prostor, stačí ukázat, že  $d\Phi_x(T_x S_1) \subset T_{\Phi(x)} S_2$ . Bud'  $0 \neq v \in T_x S_1$ . Pak existuje regulární parametrizovaná křivka  $c$  na ploše  $S_1$  taková, že  $c(t) = x$  a  $c'(t) = v$  pro nějaký parametr  $t$ . Pak ale

$$d\Phi_x(v) = d\Phi_x(c'(t)) = (\Phi \circ c)'(t) \in T_{\Phi(x)} S_2$$

podle výše ukázaného vztahu.  $\square$

**Definice 4.10.** Lokální difeomorfismus  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  mezi dvěma plochami se nazývá:

- *lokální izometrie*, jestliže zachovává délku křivek (neboli délka libovolné křivky  $c : I \rightarrow S_1$  na ploše  $S_1$  je rovna délce jejího obrazu  $\Phi \circ c(t) : I \rightarrow S_2$  na ploše  $S_2$ );
- *konformní*, jestliže zachovává úhly (neboli pro libovolné dvě křivky  $c : I \rightarrow S_1$  a  $d : J \rightarrow S_1$  na ploše  $S_1$  protínající se v bodě  $x = c(s) = d(t)$  pod úhlem  $\alpha$  (tedy  $\alpha$  je úhel tečných vektorů  $c'(s)$  a  $d'(t)$ ), jejich obrazy  $\Phi \circ c : I \rightarrow S_2$  a  $\Phi \circ d : J \rightarrow S_2$  se protínají v bodě  $\Phi(x) = \Phi(c(s)) = \Phi(d(t))$  rovněž pod úhlem  $\alpha$ );

- zachovává velikosti ploch, jestliže pro libovolnou měřitelnou oblast  $W \subset S_1$ , plošný obsah oblasti  $W$  je roven plošnému obsahu obrazu  $\Phi(W)$ .

Dvě plochy  $S_1, S_2$  nazveme *izometrické*, jestliže existuje lokální izometrie  $S_1$  na  $S_2$ , která je bijekcí.

**Věta 4.12.** *Mějme lokální difeomorfismus  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  mezi dvěma plochami. Je-li  $f : U \rightarrow S_1$  mapa plochy  $S_1$ , pak  $\tilde{f} := \Phi \circ f : U \rightarrow S_2$  je mapa plochy  $S_2$  a platí:*

- $\Phi$  je izometrie právě tehdy, když pro každou mapu  $f$  plochy  $S_1$ , první fundamentální formy map  $f$  a  $\tilde{f}$  splývají:  $g = \tilde{g}$  na  $U$ .
- $\Phi$  je konformní právě tehdy, když pro každou mapu  $f$  plochy  $S_1$ , první fundamentální formy map  $f$  a  $\tilde{f}$  splňují:  $g = \lambda \tilde{g}$  na  $U$  pro nějakou kladnou funkci  $\lambda$  na  $U$ .
- $\Phi$  zachovává velikosti ploch právě tehdy, když pro každou mapu  $f$  plochy  $S_1$ , první fundamentální formy map  $f$  a  $\tilde{f}$  splňují:  $\det g = \det \tilde{g}$  na  $U$ .

Pozn.: Podmínky v (i), (ii) a (iii) výše stačí ověřit pro mapy z nějakého atlasu plochy  $S_1$ .

*Důkaz.* Nechť je splněna podmínka v (i) a nechť  $c = f \circ u$  je křivka na ploše  $S_1$ , jejíž obraz leží v části plochy pokryté mapou  $f$ . Pak podle věty 4.7 je délka křivky  $c$  shodná s délkou obrazu  $\Phi \circ c$  na  $S_2$ . Z toho již zřejmě plyne, že  $\Phi$  zachovává délky (všech) křivek, a tedy je izometrií.

Nechť naopak neplatí podmínka z (i) a nechť  $f : U \rightarrow S_1$  je mapa a  $u_0 \in U$  takový, že  $g_{u_0} \neq \tilde{g}_{u_0}$ . Je známo, že pozitivně definitní bilineární forma je jednoznačně určena svou kvadratickou formou, tedy musí existovat  $\xi \neq 0$  v  $\mathbb{R}^2$  takový, že  $g_{u_0}(\xi, \xi) \neq \tilde{g}_{u_0}(\xi, \xi)$ . Nechť například

$$g_{u_0}(\xi, \xi) < \tilde{g}_{u_0}(\xi, \xi).$$

Ze spojitosti  $g$  a  $\tilde{g}$  musí existovat  $\delta > 0$  takové, že

$$g_{u_0+t\xi}(\xi, \xi) < \tilde{g}_{u_0+t\xi}(\xi, \xi), \quad |t| < \delta,$$

a tedy také

$$\int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{g_{u_0+t\xi}(\xi, \xi)} dt < \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\tilde{g}_{u_0+t\xi}(\xi, \xi)} dt.$$

To ale podle věty 4.7 znamená, že délka regulární parametrizované křivky  $c : t \mapsto f(u_0 + t\xi)$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$ , je menší než délka jejího obrazu  $\Phi \circ c$ , a tedy  $\Phi$  není izometrie.

Body (ii) a (iii) lze dokázat obdobně. □

Důsledek: Každá izometrie je konformní a zachovává velikosti ploch.

Příklady:

- Zobrazení  $\Phi : (x, z) \mapsto (r \cos \frac{x}{r}, r \sin \frac{x}{r}, z)$  je lokální izometrie roviny  $S_1 = \{y = 0\}$  na plášť válce  $S_2 = \{x^2 + y^2 = r^2\}$ .
- Existuje lokálně izometrické zobrazení části roviny na plášť kužele  $\{x^2 + y^2 = az^2, z \neq 0\}$ .
- Šroubová plocha s parametrizací

$$f_1(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1), \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

je izometrická katenoidu

$$f_2(v^1, v^2) = a(\cosh v^2 \cos v^1, \cosh v^2 \sin v^1, v^2), \quad (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2$$

(změna parametru  $u^1 = v^1, u^2 = a \sinh v^2$ ).

- (4) Stereografická projekce roviny  $\{z = 0\}$  do sféry  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (bez “severního pólu”) je konformní zobrazení. (Stereografická projekce je zobrazení  $\Phi$ , které bodu  $(u, v, 0)$  přiřadí průsečík sféry s přímkou procházející body  $(u, v, 0)$  a  $(0, 0, 1)$ , tedy

$$\Phi : (u, v, 0) \mapsto \left( \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

#### 4.5. Normála a druhá fundamentální forma.

**Definice 4.11.** (1) Soubor map, které pokrývají celou plochu  $S$ , nazveme *atlasem* plochy.

- (2) Dvě mapy  $f_1 : U_1 \rightarrow S, f_2 : U_2 \rightarrow S$  plochy  $S$  s  $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \emptyset$  nazveme *souhlasně orientované*, jestliže přechodové zobrazení  $f_2^{-1} \circ f_1$  má kladný determinant matice parciálních derivací.

- (3) Plochu  $S$  nazveme *orientovanou plochou*, jestliže existuje atlas, v němž každé dvě mapy s neprázdným průnikem obrazů jsou souhlasně orientované. Libovolný takový atlas určuje orientaci plochy.

**Definice 4.12.** Buď  $S$  orientovaná plocha a  $x \in S$ . Buď  $f : U \rightarrow S$  libovolná mapa atlasu orientované plochy taková, že  $x = f(u)$  pro nějaké  $u \in U$ , a položeme

$$N(x) = \frac{f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)}{\|f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)\|}.$$

Jednotkový vektor  $N(x) \perp T_x S$  se nazývá *normálový vektor plochy* v bodě  $x$ ; nezávisí na volbě mapy  $f$  (viz poznámka níže), zobrazení  $N : x \mapsto N(x)$  na orientované ploše  $S$  je tedy dobře definováno a nazývá se *Gaussovo zobrazení*.

Pozn.: Ukažme korektnost definice  $N(x)$ . Je-li  $\tilde{f} : V \rightarrow f(U) \subset S$  jiná mapa, pak existuje diferencovatelné zobrazení (reparametrizace)  $\phi : V \rightarrow U$  takové, že  $\tilde{f} = f \circ \phi$ , a tedy (značíme  $\frac{\partial u^i}{\partial v^j}$  prvky matice diferenciálu  $d\phi_v$ )

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{v^1} &= f_{u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + f_{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1}, \\ \tilde{f}_{v^2} &= f_{u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + f_{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\tilde{f}_{v^1} \times \tilde{f}_{v^2} = (f_{u^1} \times f_{u^2}) \left( \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \right) = (f_{u^1} \times f_{u^2}) \det d\phi_v,$$

přítom  $\det d\phi_v > 0$  podle předpokladu.

**Lemma 4.13.** *Gaussovo zobrazení je diferencovatelné a platí*

$$dN_x(T_x S) \subset T_x S.$$

*Důkaz.* Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa a  $x = f(u)$ , pak složené zobrazení  $n := N \circ f$  je diferencovatelné. Derivováním rovnosti  $n(u) \cdot n(u) = 1$  dostaneme  $dn_u(\xi) \cdot n(u) = 0$  pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , tedy  $dn_u(\mathbb{R}^2) \subseteq T_x S$ . Tvrzení pak plyne z toho, že  $dN_x(T_x S) = dn_u(\mathbb{R}^2)$  (podle definice diferenciálu na ploše).  $\square$

**Definice 4.13.** Buď  $S$  orientovaná plocha a  $x \in S$ .



- (1) Lineární zobrazení  $L_x = -dN_x : T_x S \rightarrow T_x S$  se nazývá *Weingartenovo zobrazení*.
- (2) Bilineární forma  $II_x(X, Y) = (L_x X) \cdot Y$  na  $T_x S$  se nazývá *druhá fundamentální forma plochy* v bodě  $x$ . Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa taková, že  $x = f(u)$  pro  $u \in U$ , a označíme-li  $n = N \circ f$ , pak vzor  $II_x(\cdot, \cdot)$  při  $df_u$  značíme

$$h_u(\xi, \zeta) = II_u(df_u(\xi), df_u(\zeta)) = -dn_u(\xi) \cdot df_u(\zeta),$$

což je bilineární forma na  $\mathbb{R}^2$  s maticí

$$h_u = \begin{pmatrix} -n_{u^1} \cdot f_{u^1}, & -n_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ -n_{u^2} \cdot f_{u^1}, & -n_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

**Věta 4.14.**  $h_u$ , a tedy i  $II_x$ , je symetrická bilineární forma.

*Důkaz.* Z rovnosti  $f_{u^1} \cdot n = 0$  dostaneme  $d(f_{u^1} \cdot n)_u(e_2) = 0$ , tedy  $d(f_{u^1})_u(e_2) \cdot n + f_{u^1} \cdot dn_u(e_2) = 0$ , z čehož plyne

$$-f_{u^1} \cdot n_{u^2} = f_{u^1, u^2} \cdot n$$

(značíme  $f_{u^i, u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$ ). Podobně odvodíme i  $-f_{u^2} \cdot n_{u^1} = f_{u^2, u^1} \cdot n$ , a ze záměnnosti smíšených derivací plyne  $-f_{u^2} \cdot n_{u^1} = -f_{u^1} \cdot n_{u^2}$ .  $\square$

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \begin{pmatrix} n \cdot f_{u^1, u^1}, & n \cdot f_{u^1, u^2} \\ n \cdot f_{u^1, u^2}, & n \cdot f_{u^2, u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn.: Druhou fundamentální formu  $h_u$  můžeme definovat i pro parametrizovanou plochu  $f : U \rightarrow S$  a  $u \in U$ . Je-li  $\phi : V \rightarrow U$  reparametrizace, pak pro 2.f.f. parametrizované plochy  $\tilde{f} = f \circ \phi$  platí

$$\tilde{h}_v(\xi, \zeta) = h_{\phi(v)}(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2, \quad v \in V.$$

**Věta 4.15.** *Bud'  $S$  orientovaná plocha s atlasem  $\mathcal{A}$  a  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  shodnost. Pak  $\bar{S} := A(S)$  je rovněž plocha a  $\{A \circ f : f \in \mathcal{A}\}$  její atlas určující orientaci. Pro normálu  $\bar{N}$  orientované plochy  $\bar{S}$  platí*

$$\bar{N}(Ax) = \sigma A_0 N(x), \quad x \in S,$$

kde  $A_0$  je lineární komponenta  $S$  a  $\sigma = \det A_0$ . Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa z atlasu  $\mathcal{A}$  a  $\bar{f} := A \circ f$  příslušná mapa  $\bar{S}$ , pak příslušné druhé fundamentální formy  $h$ ,  $\bar{h}$  splňují

$$\bar{h}_u = \sigma h_u.$$

*Důkaz.* Využijeme následující vlastnosti lineární shodnosti:

$$A_0 u \times A_0 v = \sigma A_0(u \times v), \quad u, v \in \mathbb{R}^3$$

( $A_0$  komutuje s vektorovým součinem až na změnu znaménka). V důsledku této vlastnosti je pak  $\bar{n}(u) = \sigma A_0 n(u)$ , a tedy

$$\begin{aligned} \bar{h}_u(\xi, \zeta) &= -d\bar{n}_u(\xi) \cdot d\bar{f}_u(\zeta) = -\sigma A_0(dn_u(\xi)) \cdot A_0(df_u(\zeta)) \\ &= -\sigma dn_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = \sigma h_u(\xi, \zeta). \end{aligned}$$

$\square$

Příklady:

- (1) Bud'  $S = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2\}$  sféra o poloměru  $r > 0$ . Pak je zřejmě  $N(x) = \pm r^{-1}x$ , tedy  $L_u(X) = \pm r^{-1}X$  a

$$II_x(X, Y) = \pm r^{-1}X \cdot Y$$

(znaménko závisí na orientaci sféry).

- (2) Je-li  $S\{(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2\}$  plášť válce, máme  $N(x) = \pm r^{-1}\Pi(x)$ , kde  $\Pi$  je kolmá projekce do roviny  $\{x^3 = 0\}$ . Platí tedy  $L_x(X) = \pm r^{-1}\Pi(X)$  a

$$II_x(X, Y) = \pm r^{-1}\Pi(X) \cdot Y.$$

**4.6. Hlavní směry a hlavní křivosti plochy.** Mezi křivostí křivky na ploše a druhou fundamentální formou plochy ve směru tečny křivky platí následující důležitý vztah.

**Věta 4.16.** *Bud'  $S$  orientovaná plocha a  $c : I \rightarrow S$  křivka na ploše  $S$  parametrizovaná obloukem. Symboly  $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$  značíme vektor tečny a křivost křivky,  $\mathbf{n}(s)$  je vektor hlavní normály v případě  $\kappa(s) \neq 0$  v bodě  $s \in I$ . Pak platí*

$$II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \kappa(s) (N(c(s)) \cdot \mathbf{n}(s)), \quad s \in I.$$

Pozn.: Je-li  $\kappa(s) = 0$ , výraz na pravé straně je roven nule a nevádí tedy, že vektor hlavní normály křivky není definován.

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje mapa  $f : U \rightarrow S$  plochy taková, že  $c(I) \subset f(U)$ . Pak  $u := f^{-1} \circ c : I \rightarrow U$  je regulární parametrizovaná křivka taková, že  $c = f \circ u$  na  $I$ . Pro každé  $s \in I$  platí

$$\begin{aligned} II_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) \\ &= -dn_{u(s)}(u'(s)) \cdot df_{u(s)}(u'(s)) \\ &= -(n \circ u)'(s) \cdot c'(s) \\ &= (n \circ u)(s) \cdot c''(s) \\ &= \kappa(s) N(c(s)) \cdot \mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

přítom čtvrtou rovnost dostaneme derivováním rovnosti  $(n \circ u) \cdot c' = 0$ , a poslední rovnost plyne z Frenetových vzorců.  $\square$

Důsledkem je vztah známý jako Meusnierova věta:

**Věta 4.17** (Meusnier). *Nechť  $S$  a  $c$  jsou jako v předchozí větě a označme  $\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  úhel mezi normálou  $N(c(s))$  k ploše a oskulační rovinou křivky  $c$  v bodě  $s$ . Pak*

$$|II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s))| = \kappa(s) \cos \theta(s), \quad s \in I.$$

**Definice 4.14.**  $S$  bud' orientovaná plocha,  $x \in S$ ,  $0 \neq X \in T_x S$ . Pak číslo

$$\kappa_n(X) = \frac{II_x(X, X)}{I_x(X, X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě  $x$  a ve směru  $X$ .

Pozn.:

- (1) Zřejmě platí  $\kappa_n(\alpha X) = \kappa_n(X)$  pro každé  $\alpha \neq 0$ ,  $\kappa_n$  je tedy skutečně funkcí ‘směru’  $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$ .
- (2) Z Meusnierovy věty plyne, že  $|\kappa_n(X)|$  je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou  $x + \langle X, N(x) \rangle$  v bodě  $x$ .

Zvolme  $x \in S$  pevně a označme

$$T_x^1 S = \{X \in T_x S : \|X\| = 1\}.$$

Funkci  $\kappa_n$  můžeme přirozeně chápat jako funkci na  $T_x^1 S$ ; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

**Definice 4.15.**  $X \in T_x^1 S$  (resp.  $\alpha X$  pro  $\alpha \neq 0$ ) je *hlavním směrem* plochy  $S$  v bodě  $x$ , jestliže  $\kappa_n$  nabývá extrému v  $X$ . Hodnota  $\kappa_n(X)$  se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v bodě  $x$ .

Pozn.:  $X$  je hlavní směr, právě když  $-X$  je hlavní směr.

Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max \{II_x(X, X) : I_x(X, X) = 1\}.$$

Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa plochy s  $f(u) = x$ , pak lze ekvivalentně úlohu převést na hledání extrému ( $\xi \in \mathbb{R}^2$ )

$$\min / \max \{h_u(\xi, \xi) : g_u(\xi, \xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání nevázaného extrému funkce

$$\Lambda(\xi, \lambda) = h_u(\xi, \xi) - \lambda(g_u(\xi, \xi) - 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce  $\Lambda$  je diferencovatelná, pokud tedy nabývá v  $(\xi, \lambda)$  extrému, musí platit

$$d\Lambda_{(\xi, \lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T (h_u - \lambda g_u) \xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(2) \quad (h_u - \lambda g_u) \xi = 0,$$

což může nastat jedině když

$$(3) \quad \det(h_u - \lambda g_u) = 0.$$

**Věta 4.18.** Jsou-li  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  dvě řešení (3) a  $\xi_1, \xi_2$  odpovídající řešení (2), platí  $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$  (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé). Hlavní směry  $X_i = df_u(\xi_i)$  jsou vlastními vektory Weingartenova zobrazení  $L_x$  s vlastními čísly  $\lambda_i$ :

$$L_x(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Hodnoty  $\lambda_i$  jsou extrémními hodnotami normálové křivosti ve směrech  $X_i$ .

*Důkaz.* Odečtením rovnic (důsledek (2))

$$\begin{aligned} \xi_2^T (h_u - \lambda_1 g_u) \xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T (h_u - \lambda_2 g_u) \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z (2) dále odvodíme

$$H_x(X_i, Y) = \lambda_i I_x(X_i, Y), \quad Y \in T_x S,$$

z čehož plyne  $L_x X_i = \lambda_i X_i$  a  $\kappa_n(X_i, X_i) = \lambda_i$ .  $\square$

Mohou nastat tyto případy:

- (1) Rovnice (3) má jediné řešení  $\lambda_1$ , pak  $\lambda_1 = \kappa_n(X)$  pro všechna  $X \in \mathbb{S}_x S$  (každý směr je hlavním směrem):
  - (a)  $\lambda_1 = 0$ ,  $x$  je *planární bod* plochy,
  - (b)  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $x$  je *kruhový bod* plochy.
- (2) Rovnice (3) má dvě řešení  $\lambda_1 < \lambda_2$ , odpovídající hlavní směry  $X_1, X_2$  ( $X_i = df_u(\xi_i)$ ) jsou navzájem kolmé:
  - (a)  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ,  $x$  je *eliptický bod* plochy,
  - (b)  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ,  $x$  je *parabolický bod* plochy,
  - (c)  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ,  $x$  je *hyperbolický bod* plochy.

**Definice 4.16.** Funkce  $K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$  se nazývá *Gaussova křivost* a  $H(x) = \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{2}$  *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe  $\lambda_2 = \lambda_1$ .)

**Věta 4.19.** Je-li  $f : U \rightarrow S$  mapa a  $f(u) = x$ , pak

$$(4) \quad K(x) = \frac{\det h_u}{\det g_u},$$

$$(5) \quad H(x) = \frac{g_u^{11} h_u^{22} + g_u^{22} h_u^{11} - 2g_u^{12} h_u^{12}}{2\det g_u}$$

( $g_u^{ij}, h_u^{ij}$  značí prvky matic  $g_u, h_u$ ).

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (3).

Důsledek:  $K, H$  jsou diferencovatelné funkce na ploše  $S$ .

**Lemma 4.20.** Je-li  $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$ , pak existuje okolí  $V$  bodu  $x_0$  a funkce  $\lambda_1, \lambda_2$  diferencovatelné na  $S \cap V$  takové, že  $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  jsou hlavní křivosti plochy v bodě  $x$  pro každý  $x \in S \cap V$ .

Důkaz. Zvolme mapu  $f : U \rightarrow S$  s  $f(u_0) = x_0$ . Aplikujeme větu o implicitních funkcích pro funkci

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda^2 - 2H(f(u))\lambda + K(f(u)) = 0$$

v bodech  $(\lambda_1(x_0), u_0)$  a  $(\lambda_2(x_0), u_0)$  Podmínka  $\lambda_1(u_0) \neq \lambda_2(u_0)$  zaručuje, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_i(x_0), u_0) = 2(\lambda_i(x_0) - H(f(u_0))) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

$\square$

**Věta 4.21.** Bud'  $S$  orientovaná plocha a  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  shodnost. Pak pro křivosti orientované plochy  $\bar{S} = A(S)$  platí

$$\bar{\lambda}_i(Ax) = \sigma \lambda_i(x), \quad \bar{K}(Ax) = K(x), \quad \bar{H}(Ax) = \sigma H(x), \quad x \in S, \quad i = 1, 2,$$

kde  $\sigma = \det A_0$  a  $A_0$  je lineární složka  $A$ .

Důkaz. Vztah pro hlavní křivosti plyne z rovnice (3) s použitím Věty 4.15, vztahy pro Gaussovu a střední křivost jsou přímým důsledkem.  $\square$

Poznámka: Je-li  $f$  parametrizovaná plocha a  $u_0 \in U$  pevný, lze vždy plochu  $f(U)$  na okolí bodu  $u_0$  parametrizovat jako graf funkce nad tečnou rovinou  $T_{u_0}f$ . Přesněji: Necht' (bez újmy na obecnosti) je  $f(u_0) = 0$ ,  $T_{u_0}f = \{z = 0\}$ ,  $n(u_0) = e_3$ . Pak existuje okolí  $U_0$  bodu  $u_0$ , okolí  $V_0$  počátku v rovině  $\{z = 0\}$  a diferencovatelná funkce  $h : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $dh_0 = 0$  a graf  $h = f(U_0)$  (použijte větu o implicitních funkcích). Proto následující tvrzení je dostatečně obecné.

**Lemma 4.22.** *Bud'  $h$  diferencovatelná funkce definovaná na okolí počátku v  $\mathbb{R}^2$  s  $h(0,0) = 0$  a  $dh_{(0,0)} = 0$ . Pak  $f : u \mapsto (u, h(u))$  je parametrizovaná plocha, a označíme-li  $\lambda_1, \lambda_2$  její hlavní křivosti v bodě  $(0,0)$ , a při volbě souřadnic  $x, y$  ve směru hlavních směrů  $X_1, X_2$ , platí*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = \lambda_1, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = \lambda_2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Tedy grafem ova polynomu druhého řádu funkce  $h$  v počátku je kvadrika  $z = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2)$ , což je:

- (1) rovina v případě  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,
- (2) rotační paraboloid v případě  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ,
- (3) eliptický paraboloid v případě  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ,
- (4) parabolický válec v případě  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 = 0$ ,
- (5) hyperbolický paraboloid v případě  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ .

*Důkaz.* Z definice druhé fundamentální formy a hlavních směrů a křivosti dostaneme

$$d^2 h_{(0,0)}(\xi_i, \xi_j) = d^2 f_{(0,0)}(\xi_i, \xi_j) \cdot n(0,0) = II_{(0,0)}(X_i, X_j) = L_{(0,0,0)}(X_i) \cdot X_j = \lambda_i (X_i \cdot X_j),$$

přítom  $X_i \cdot X_j = \delta_{ij}$  a hlavní směry  $\xi_i, \xi_j$  splývají s vektory kanonické báze  $e_1, e_2$ .  $\square$

**Definice 4.17.** Bud'  $S$  orientovaná plocha a  $f : U \rightarrow S$  její mapa.

- (1) Křivky  $u \mapsto f(u, v)$  ( $v$  pevné) a  $v \mapsto f(u, v)$  ( $u$  pevné) se nazývají *parametrické křivky* mapy  $f$  na ploše  $S$ .
- (2) Regulární parametrizovaná křivka  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  je *hlavní křivkou*, jestliže  $c'(t)$  je hlavním směrem pro každé  $t \in I$ .
- (3) Nenulový vektor  $X \in T_x S$  je *asymptotickým směrem* na ploše  $S$  v bodě  $x$ , jestliže  $II_x(X, X) = 0$ .
- (4) Regulární parametrizovaná křivka  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  je *asymptotickou křivkou*, jestliže  $c'(t)$  je asymptotickým směrem pro každé  $t \in I$ .

**Věta 4.23.** *Bud'  $f : U \rightarrow S$  mapa plochy  $S$ . Regulární parametrizovaná křivka  $c(t) = f(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , na ploše  $S$  je (6) hlavní, (7) asymptotická, právě tehdy, když vyhovuje rovnici*

$$(6) \quad \det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = 0,$$

$$(7) \quad h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0.$$

*Důkaz.* Pro hlavní křivku využijeme rovnice (2), z níž plyne, že  $c$  je hlavní křivka právě tehdy, když pro každé  $t$  jsou vektory  $g\xi$  a  $h\xi$  lineárně závislé, kde  $g = g_{u(t),v(t)}$  a  $\xi = (u'(t), v'(t))^T$ . Toto je dále ekvivalentní vztahu

$$0 = \det(g\xi, h\xi) = \det \begin{pmatrix} g^{11}u' + g^{12}v', & h^{11}u' + h^{12}v', \\ g^{12}u' + g^{22}v', & h^{12}u' + h^{22}v' \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

což je stejná rovnice, jako v (6). Ekvivalence pro asymptotickou křivku plyne přímo z definice.  $\square$

**Věta 4.24.** *Bud'  $S$  plocha a  $x \in S$ .*

- (1) *Je-li  $K(x) > 0$ , neexistuje v  $x$  žádný asymptotický směr.*
- (2) *Je-li  $K(x) < 0$ , existují v  $x$  právě dva různé asymptotické směry.*
- (3) *Je-li  $K(x) = 0$  a  $0 = \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$ , existuje v  $x$  právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*
- (4) *Je-li  $K(x) = 0$  a  $0 = \lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ , je v  $x$  každý směr asymptotický.*

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z definic. Využívá faktu, že normálová křivost nabývá na jednotkové kružnici nejvýše dvou lokálních extrémů ve dvou na sebe kolmých směrech.  $\square$

#### 4.7. Přímkové plochy.

**Definice 4.18.** Parametrizovaná plocha  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  se nazývá *přímková (parametrizovaná) plocha*, jestliže existuje regulární křivka  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  a diferencovatelné zobrazení  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$  tak, že  $U \subseteq I \times \mathbb{R}$  a

$$f(u, v) = c(u) + vX(u), \quad (u, v) \in U.$$

Je-li navíc  $\frac{\partial n}{\partial v}(u, v) = 0$  na  $U$  (normálové pole je konstantní podél přímek na ploše), nazveme  $f$  *rozvinutelnou*.

Plochu  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  nazveme *přímkovou (rozvinutelnou) plochou*, jestliže existuje atlas tvořený přímkovými (rozvinutelnými) plochami.

**Věta 4.25.** *Bud'  $f(u, v) = c(u) + vX(u)$  přímková parametrizovaná plocha.*

- (1)  *$K(u, v) \leq 0$ ,  $(u, v) \in U$ .*
- (2)  *$f$  je rozvinutelná, právě když  $K(u, v) = 0$ ,  $(u, v) \in U$ .*

*Důkaz:*

- (1) Zřejmě parciální derivace druhého řádu  $f_{v^2} = 0$ , tedy i příslušný koeficient matice druhé fundamentální formy je nulový:  $h^{22} = n \cdot f_{v^2} = 0$ . Pak ale  $\det h = -(h^{12})^2 \leq 0$ , a protože  $K = \frac{\det h}{\det g}$  a  $\det g > 0$ , je poslední podmínka ekvivalentní tomu, že  $K \leq 0$  na  $U$ .
- (2) Protože  $n_v \cdot f_v = -h^{22} = 0$  (podle důkazu první části), platí

$$n_v = 0 \iff n_v \cdot f_u = 0 \iff h^{12} = 0 \iff K = 0.$$

*Příklady:*

- (1) Zobecněná válcová plocha

$$f(u, v) = c(u) + v^2 X$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

- (2) Zobecněná kuželová plocha

$$f(u, v) = vc(u)$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

- (3) Plocha tečen obecné regulární parametrizované křivky

$$f(u, v) = c(u) + vc'(u)$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

(4) Šroubová plocha

$$f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)^T \quad (a > 0)$$

je přímková parametrizovaná plocha, která není rozvinutelná.

(5) Jednodílný hyperboloid  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  je přímková plocha (parametrizace

$$f(u, v) = (\cos v - u \sin v, \sin v + u \cos v, u)^T).$$

#### 4.8. Geodetiky na ploše.

Motivace. Mějme orientovanou plochu  $S$  a regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$ . Hledáme podmínky zaručující, že křivka  $c$  spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Pozměníme málo křivku  $c$  na okolí nějakého bodu  $x = c(t)$  výchylkou ve směru tečném k ploše a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon \alpha(t)(c'(t) \times N(c(t))),$$

kde  $N(t) = n(u(t))$ ,  $\varepsilon > 0$  malé a  $\alpha(t)$  je libovolná nezáporná diferencovatelná funkce. Délka části křivky  $c_\varepsilon$  je  $\int_I \|c'_\varepsilon\|$ . Chceme, aby tato délka byla minimální pro  $\varepsilon = 0$  při libovolné volbě funkce  $\alpha$ , což znamená podmínku

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \|c'_\varepsilon\| \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha \geq 0$  libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon \alpha'(c' \times (N \circ c)) + \varepsilon \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \varepsilon \alpha(c' \times (N \circ c)'),$$

tedy

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|c'_\varepsilon\| \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{c' \cdot (\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \alpha(c' \times (N \circ c)'))}{\|c'\|} \\ &= \frac{\alpha}{\|c'\|} \det(c', c'', N \circ c). \end{aligned}$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou  $\alpha$ , právě když jsou vektory  $c', c'', N \circ c$  lineárně závislé.

**Definice 4.19.** Regulární křivka  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  se nazývá *geodetikou*, jestliže

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0 \text{ pro každé } t \in I.$$

Pozn.: Vlastnost křivky ‘být geodetikou na ploše’ je zřejmě invariantní vůči změně parametru křivky i plochy.

Příklady.

- (1) V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.
- (2) Na sféře  $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$  jsou geodetiky právě všechny hlavní kružnice, tj. kružnice maximálního poloměru  $r$ .
- (3) Na válcové ploše  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  parametrizované mapou

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^T$$

jsou geodetiky ‘spirály’ parametrizované např.  $u = \alpha_1 t + \beta_1$ ,  $v = \alpha_2 t + \beta_2$ ,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$  (tyto křivky odpovídají přímčkám po ‘rozbalení’ plochy do roviny).

**Definice 4.20.** Bud'  $S$  orientovaná plocha a  $c : I \rightarrow S$  regulární křivka na ploše  $S$ . Geodetickou křivost křivky  $c$  definujeme předpisem

$$\kappa_g(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t), N(c(t)))}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Poznámky:

- (1) Není těžké ověřit, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci plochy ani křivky. Znaménko geodetické křivosti lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.
- (2) Z definice je zřejmé, že křivka  $c$  je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Pro 'obyčejnou' křivost křivky v  $\mathbb{R}^3$  parametrizované obloukem platí  $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ . Z definice geodetické křivosti snadno odvodíme následující tvrzení.

**Věta 4.26.** Pro křivku  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  platí

$$|\kappa_g(t)| = \kappa(t) \sin \theta(t), \quad t \in I,$$

kde  $\kappa(t)$  je křivost křivky  $c$  v  $\mathbb{R}^3$  a  $\theta(t) \in [0, \pi/2]$  je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky v neinflexním bodě  $t$  křivky.

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizovaná obloukem. Z definice geodetické křivosti a z Frenetových vzorců pro křivku dostaneme

$$\begin{aligned} |\kappa_g(s)| &= |\det(c'(s), c''(s), N(c(s)))| \\ &= |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s) |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s) |\mathbf{b}(s) \cdot N(c(s))| \\ &= \kappa(s) \sin \theta(s). \end{aligned}$$

□

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 4.17) a nezávislost křivosti na parametrizaci, dostáváme

**Důsledek 4.27.** Pro regulární křivku  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(c'(t)) + \kappa_g^2(t), \quad t \in I.$$

Na závěr uvedeme ještě větu o existenci geodetik zadaných vlastností. K důkazu, který neuvádíme, je třeba použít věty o řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic.

**Věta 4.28.** Bud'  $S$  plocha,  $x \in S$ .

- (1) Ke každému vektoru  $o \neq X \in T_x S$  existuje (až na změnu parametru) právě jedna geodetika  $c : I \rightarrow S$  taková, že  $c(0) = x$  a  $c'(0) = X$ .
- (2) Existuje okolí  $V_0$  bodu  $x$  tak, že každá geodetika  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  s  $c(I) \subseteq V_0$  je nejkratší spojnicí na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body  $c(a), c(b)$ ,  $a, b \in I$ , je větší nebo rovna délce geodetiky  $c|_{[a, b]}$  a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).



Poznámka: Tvzení 2. skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné ‘rovnoběžce’ (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami (‘spirálami’) libovolné velké délky.

Cvičení:

- (1) Uvažujte torus, který vznikne rotací kružnice  $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ ,  $y = 0$  kolem osy  $z$  ( $a > b > 0$ ). Určete, které kružnice na toru jsou geodetickými (asymptotickými, hlavními) křivkami.
- (2) Ukažte, že křivka na ploše, která je hlavní i geodetickou křivkou, je křivkou rovinnou.
- (3) Ukažte, že křivka na ploše, která je asymptotickou i geodetickou křivkou, je částí přímky.
- (4) Ukažte, že každá regulární parametrizovaná křivka v  $\mathbb{R}^3$  je geodetickou křivkou na ploše svých binormál.

## 5. RIEMANNOVA GEOMETRIE, HYPERBOLICKÁ GEOMETRIE

Dosud jsme studovali plochy v  $\mathbb{R}^3$ , jejichž geometrie byla dána polohou v trojrozměrném prostoru. Metrické vlastnosti plochy vyplývaly z první fundamentální formy, která je dána jako restrikce euklidovského skalárního součinu do tečné roviny v daném bodě.

Riemannova geometrie je zobecněním v tom smyslu, že první fundamentální formu v bodě definujeme předpisem, bez ohledu na vnoření plochy do většího prostoru. V této kapitole budeme nadále vycházet z množiny bodů tvořící plochu v  $\mathbb{R}^3$ , i když obecný přístup připouští mnohem obecnější struktury.

**Definice 5.1.** Nechť  $S$  je plocha v  $\mathbb{R}^3$ . *Riemannovou metrikou* na  $S$  rozumíme zobrazení

$$g : x \mapsto g_x, \quad x \in S,$$

kde  $g_x$  je symetrická pozitivně definitní bilineární forma na tečném prostoru  $T_x S$ , které je navíc hladké v tom smyslu, že pro každou mapu  $f : U \rightarrow S$  plochy  $S$  je zobrazení

$$u \mapsto g_{f(u)}(df_u(\cdot), df_u(\cdot)), \quad u \in U,$$

diferencovatelným zobrazením z  $U$  do množiny pozitivně definitních bilineárních forem na  $\mathbb{R}^2$ .

Pozn.: Definice i věty z podkapitol 4.3 a 4.4 lze aplikovat i pro případ plochy s Riemannovou geometrií. Speciálně platí vzorec z věty 4.7 pro délku křivky na ploše a definice 4.10 izometrického a konformního zobrazení mezi plochami.

**Definice 5.2.** Na ploše

$$H_2 := \{-x^2 - y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

(horní list dvoudílného hyperboloidu) je dána Riemannova metrika

$$g_{(x,y,z)}^{(H_2)}((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2, \\ (X_i, Y_i, Z_i) \in T_{(x,y,z)} H_2, \quad i = 1, 2.$$

Cvičení: Ověřte, že  $g_{(x,y,z)}^{(H_2)}$  je pozitivně definitní bilineární forma na  $T_{(x,y,z)}H_2$  pro každý bod  $(x, y, z) \in H_2$ .

Definici plochy v  $\mathbb{R}^3$  vyhovuje i otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , jak tomu bude v následujících dvou příkladech.

**Definice 5.3.** Množina

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

s Riemannovou metrikou

$$g_{(u,v)}^{(U)} = \begin{pmatrix} 4(1 - u^2 - v^2)^{-2} & 0 \\ 0 & 4(1 - u^2 - v^2)^{-2} \end{pmatrix}$$

(bilineární forma na  $\mathbb{R}^2$  je reprezentována maticí) se nazývá *Poincarého model hyperbolické geometrie*.

**Věta 5.1.** Zobrazení  $\Phi : U \rightarrow H_2$  dané předpisem

$$\Phi : (u, v) \mapsto \left( \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2} \right)$$

je izometrické zobrazení  $U$  na  $H_2$  (vzhledem k příslušným Riemannovým geometriím).

Pozn.: Zobrazení  $\Phi$  je stereografická projekce z bodu  $(0, 0, -1)$ , tedy trojice bodů  $(0, 0, -1)$ ,  $(u, v, 0)$  a  $\Phi(u, v) \in H_2$  leží na přímce.

*Důkaz.* Zobrazení  $\Phi$  je na  $H_2$  a lze považovat za mapu plochy  $H_2$ . Parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \frac{2}{(1 - u^2 - v^2)^2} (1 + u^2 - v^2, 2uv, 2u), \\ \Phi_v &= \frac{2}{(1 - u^2 - v^2)^2} (2uv, 1 - u^2 + v^2, 2v), \end{aligned}$$

a první fundamentální forma plochy  $H_2$  (s její Riemannovou metrikou) vyjádřená vzhledem k této mapě vyjde

$$\tilde{g}_{(u,v)}^{(H_2)} = \begin{pmatrix} g^{(H_2)}(\Phi_u, \Phi_u) & g^{(H_2)}(\Phi_u, \Phi_v) \\ g^{(H_2)}(\Phi_u, \Phi_v) & g^{(H_2)}(\Phi_v, \Phi_v) \end{pmatrix} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{(u,v)}^{(U)},$$

tedy první fundamentální formy jsou shodné a  $\Phi$  je izometrie.  $\square$

Komplexní funkce komplexní proměnné

$$\Psi : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

zobrazuje “horní polorovinu”

$$H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

na jednotkový kruh  $U$ . Najdeme Riemannovu metriku na  $H_+$  tak, aby  $\Psi$  bylo izometrií. Na  $\Psi$  můžeme nahlížet buď jako na funkci jedné komplexní proměnné  $z = x + iy$ , nebo jako na funkci dvou proměnných  $x, y$ . Protože  $\Psi$  má derivaci v komplexní proměnné,  $\Psi'(z) = 2i/(z + i)^2$ , platí Cauchy-Riemannův vztah

$$\Psi_x(x + iy) = (-i)\Psi_y(x + iy),$$

tedy vektory partiálních derivací  $\Psi_x, \Psi_y$  jsou stejně velké a vzájemně kolmé. Máme tedy

$$g_{\Psi(z)}^{(U)}(\Psi_x(z), \Psi_y(z)) = 0$$

a

$$\begin{aligned} g_{\Psi(z)}^{(U)}(\Psi_x(z), \Psi_x(z)) &= g_{\Psi(z)}^{(U)}(\Psi_y(z), \Psi_y(z)) = \frac{4}{(1 - |\Psi(z)|^2)^2} |\Psi'(z)|^2 \\ &= \frac{4}{\left(1 - \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2\right)^2} \left|\frac{2i}{(z+i)^2}\right|^2 \\ &= y^{-2}. \end{aligned}$$

**Definice 5.4.** Polorovina  $H_+$  s Riemannovou metrikou

$$g_{x,y}^{(H_+)} = \begin{pmatrix} y^{-2} & 0 \\ 0 & y^{-2} \end{pmatrix}$$

se nazývá *polorovinový model hyperbolické geometrie*.

Z výše uvedených výpočtů pak plyne

**Věta 5.2.** Zobrazení  $\Psi$  je izometrií  $H_+$  na  $U$ .

Výše uvedené tři Riemannovy geometrie jsou tedy vlastně tři různé modely jedné a téže geometrie, nazávané *hyperbolická geometrie*. Umíme v těchto modelech měřit délku křivek, úhel křivek nebo velikost plošného obsahu. V následující kapitole uvidíme, jak lze v Riemannově geometrii definovat Gaussovu křivost a co jsou zde geodetiky (ty jsme si na plochách v  $\mathbb{R}^3$  definovali pomocí normály, kterou zde nemáme k dispozici). Nicméně už nyní můžeme najít geodetiky jako křivky, které spojují body nejkratším způsobem. K tomu využijeme následující věty.

**Věta 5.3.** Zobrazení tvaru

$$(8) \quad \phi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1,$$

jsou izometrie  $H_+$  na  $H_+$ .

*Důkaz.* Opět využijeme derivování podle komplexní proměnné. Platí

$$\phi'(z) = (cz + d)^{-2} \text{ a } \Im \phi(z) = y|cz + d|^{-2},$$

tedy podobně jako pro zobrazení  $\Psi$  výše dostaneme  $g_{\phi(z)}^{(H_+)}(\phi_x, \phi_y) = 0$  a

$$g_{\phi(z)}^{(H_+)}(\phi_x, \phi_x) = g_{\phi(z)}^{(H_+)}(\phi_y, \phi_y) = (\Im \phi(z))^{-2} |\phi'(z)|^2 = y^{-2},$$

$\phi$  je tedy skutečně izometrie. □

**Tvrzení 5.4.** Pro  $x \in \mathbb{R}$  a  $0 < y_1 < y_2$  je úsečka

$$t \mapsto (x, t), \quad y_1 < t < y_2,$$

nejkratší spojnici bodů  $(x, y_1)$  a  $(x, y_2)$  v hyperbolickém modelu  $H_+$ .

*Důkaz.* Bud'  $c(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in (a, b)$ , křivka v  $H_+$  parametrizovaná obloukem a taková, že  $x(a) = x(b) = x$  a  $y(a) = y_1$ ,  $y(b) = y_2$ . Předpokládejme, že  $y'(s) > 0$ ,  $s \in (a, b)$ . Pro délku křivky  $c$  (s využitím substituce  $y = y(s)$ ) dostaneme

$$L(c) = \int_a^b \frac{1}{y(s)} ds = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} \frac{dy}{y'(s)} \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} dy,$$

neboť zřejmě  $y'(s) \leq 1$ . Poslední výraz je délka úsečky  $t \mapsto (x, t)$ ,  $y_1 < t < y_2$ , délka úsečky  $c$  je tedy větší nebo rovna. Neplatí-li předpoklad  $y' > 0$ , rozdělíme úsečku na úseky s rostoucí či klesající  $y$ -ovou souřadnicí a jednoduchou úvahou usoudíme, že délka křivky nemůže být menší.  $\square$

**Tvrzení 5.5.** *Izometrie (8) zobrazují polopřímky  $x = x_0, y > 0$  na opět na polopřímky tohoto typu, nebo na půlkružnice se středem na ose  $x$ .*

*Návod k důkazu:* Je-li  $c = 0$  nebo  $d = 0$ , dostaneme zobrazení  $z \mapsto z + \alpha$  nebo  $z \mapsto \beta - z^{-1}$ , obě přitom zobrazují zmíněné polopřímky opět na tyto polopřímky (posunutě ve směru osy  $x$ ). Je-li  $c \neq 0$  a  $d \neq 0$ , lze ukázat, že

$$\left| \frac{ayi + b}{cyi + d} - p \right|^2 = r^2$$

pro  $p = (ad + bc)/(2cd)$  a  $r = 1/(2|cd|)$ , tedy obrazem polopřímky  $x = 0, y > 0$  je půlkružnice se středem  $p$  (ležícím na ose  $x$ ) a poloměrem  $r$ .  $\square$

**Důsledek 5.6.** *Polopřímky rovnoběžné s osou  $y$  a půlkružnice se středem na ose  $x$  jsou nejkratšími spojnicemi svých bodů.*

Pozn.: Výše uvedeným křivkám (které jsou geodetikami ve smyslu definice z následující kapitoly) odpovídají v modelu  $U$  kružnice protínající hraniční kružnici  $U$  pod pravým úhlem, v modelu  $H_2$  řezy s rovinami procházejícími počátkem.

## 6. VNITŘNÍ VLASTNOSTI PLOCHY, GAUSSOVA VĚTA A ROVNICE PRO GEODETICKÉ KŘIVKY

Bud'  $S \subset \mathbb{R}^3$  orientovaná plocha. Jejímí *vnitřními vlastnostmi* rozumíme vlastnosti dané její první fundamentální formou. Všechny vnitřní vlastnosti se tedy zachovávají při izometrickém zobrazení a lze je přenést i do kontextu Riemannovy geometrie. Ne všechny charakteristiky plochy jsou však vnitřní, například Gaussovo zobrazení  $x \mapsto N(x)$  není dáno první fundamentální formou.

V celé kapitole bude dána mapa plochy  $S$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Budeme používat úsporné značení parciálních derivací pomocí dolních indexů, tedy např.  $f_i = f_{u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ ,  $f_{ij} = f_{u^i, u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$ ,  $n_i = n_{u^i} = \frac{\partial n}{\partial u^i}$ ,  $i, j = 1, 2$ , a tak podobně. Podobně jako dříve budeme značit  $g^{ij}$ ,  $h^{ij}$  koeficienty matic první a druhé fundamentální formy  $g, h$  a  $a^{ij}$  budou koeficienty inverzní matice  $a = g^{-1}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Pro každé  $u \in U$  tvoří vektory  $f_1, f_2, n$  bázi (obecně ne ortogonální) prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Najdeme koeficienty vektorů  $n_i$  a  $f_{ij}$  vůči této bázi.

**Lemma 6.1.** *Pro  $i, j = 1, 2$  platí*

$$(9) \quad n_i = - \sum_k \sum_l h^{il} a^{lk} f_k,$$

$$(10) \quad f_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k f_k + h^{ij} n,$$

kde

$$(11) \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_l a^{kl} (f_{ij} \cdot f_l)$$

$$(12) \quad = \frac{1}{2} \sum_l a^{kl} (g_j^{il} + g_i^{jl} - g_l^{ij})$$

(zde opět značíme  $g_l^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}$ ). Koeficienty  $\Gamma_{ij}^k$  se nazývají Christoffelovy symboly.

*Důkaz.* Rovnosti (9,10) se ověří skalárním násobením obou stran vektory  $f_1, f_2, n$ . Rovnost výrazů (11) a (12) ověříme dosazením za derivace  $g_k^{ij}$ .  $\square$

Podle předpokladu je  $f$  diferencovatelné zobrazení, má tedy záměnné smíšené parciální derivace třetího řádu

$$f_{ijk} = f_{ikj}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Upravíme-li tento vztah s využitím (10), dostaneme

$$\sum_l \left( \Gamma_{ij,k}^l f_l + \Gamma_{ij}^l f_{lk} \right) + h_k^{ij} n + h^{ij} n_k = \sum_l \left( \Gamma_{ik,j}^l f_l + \Gamma_{ik}^l f_{lj} \right) + h_j^{ik} n + h^{ik} n_j.$$

Dosadíme-li opět podle (10) a (9) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_l \left( \Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l \right) f_l + (h_k^{ij} - h_j^{ik}) n \\ &+ \sum_l \Gamma_{ij}^l \left( \sum_m \Gamma_{lk}^m f_m + h^{lk} n \right) - \sum_l \Gamma_{ik}^l \left( \sum_m \Gamma_{lj}^m f_m + h^{lj} n \right) \\ &- h^{ij} \sum_l \sum_m h^{kl} a^{lm} f_m + h^{ik} \sum_l \sum_m h^{jl} a^{lm} f_m. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u  $f_m$  a  $n$  dostaneme následující rovnice.

**Věta 6.2.** Pro  $i, j, k, m = 1, 2$  platí vztahy

$$(13) \quad \Gamma_{ij,k}^m - \Gamma_{ik,j}^m + \sum_l \left( \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m \right) = \sum_l a^{lm} (h^{ij} h^{kl} - h^{ik} h^{jl})$$

(Gaussova rovnice) a

$$(14) \quad \sum_l \left( \Gamma_{ij}^l h^{lk} - \Gamma_{ik}^l h^{lj} \right) + h_k^{ij} - h_j^{ik} = 0$$

(Codazzi-Mainardiho rovnice).

Nyní můžeme vyslovit větu o existenci plochy se zadanými funkcemi první a druhé fundamentální formy (analogie Věty 2.10).

**Věta 6.3** (Bonnet). Bud'  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  otevřená množina a  $g, h$  symetrické maticové  $(2 \times 2)$  funkce diferencovatelné na  $U$  takové, že  $g$  je pozitivně definitní a jsou splněny rovnice (13), (14) na  $U$ . Pak existuje parametrizovaná plocha  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  s maticemi první a druhé fundamentální formy  $g, h$ . Je-li navíc  $U$  souvislá, je tato plocha určena jednoznačně až na shodnost.

(Bez důkazu.)

Dosadíme-li do pravé strany Gaussovy rovnice (13) hodnoty  $i = j = 1$  a  $k = m = 2$ , dostaneme

$$\sum_l a^{l2} (h^{11} h^{2l} - h^{12} h^{1l}) = a^{22} \det h = g^{11} \frac{\det h}{\det g} = g^{11} K,$$

kde  $K$  je Gaussova křivost plochy v daném bodě (viz Věta 4.19). Jako důsledek tohoto pozorování dostáváme slavnou Gaussovu větu.

**Věta 6.4** (Theorema Egregium). *Pro Gaussovu křivost parametrizované plochy platí*

$$K = (g^{11})^{-1} \left( \Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \sum_l \left( \Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^2 \right) \right).$$

*Speciálně tedy Gaussova křivost je funkcí první fundamentální formy, čili je vnitřní vlastností plochy.*

**Důsledek 6.5.** *Izometrické parametrizované plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.*

V případě nulové křivosti platí i obrácená implikace:

**Věta 6.6.** *Bud'  $S \subset \mathbb{R}^3$  plocha, jejíž Gaussova křivost je identicky rovna 0 na  $S$ . Pak ke každému  $x \in S$  existuje okolí  $V$  tak, že restrikce  $S \cap V$  je izometrická částí roviny (neboli  $S$  je 'lokálně izometrická' rovině).*

(bez důkazu)

Poznámky.

- (1) Z předchozí věty plyne, že každá rozvinutelná plocha je lokálně izometrická rovině.
- (2) Plochy

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, \ln u)^T, \\ \tilde{f}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, v)^T, \quad u > 0, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mají shodnou Gaussovu křivost, ale nejsou izometrické. Věta 6.6 tedy neplatí obecně bez předpokladu nulové Gaussovy křivosti.

- (3) Vzorcem z věty 6.4 lze definovat Gaussovu křivost jen pomocí první fundamentální formy, tedy i v Riemannově geometrii. Lze spočítat, že v hyperbolické geometrii z předchozí kapitoly je Gaussova křivost identicky rovna  $-1$  (samozřejmě ve všech třech modelech, neboť jsou izometrické).

### 6.1. Rovnice pro geodetické křivky.

**Definice 6.1.** Bud'  $c : I \rightarrow S$  regulární křivka na ploše  $S \subset \mathbb{R}^3$  a  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferencovatelné zobrazení (vektorové pole podél křivky  $c$ ). *Kovariantní derivací vektorového pole  $X$  podél křivky  $c$  nazveme zobrazení*

$$\frac{\nabla X}{dt} : t \mapsto \Pi_x(X'(t)), \quad t \in I,$$

kde  $\Pi_x$  je operátor kolmé projekce  $\mathbb{R}^3$  do tečného prostoru  $T_x S$ .

**Definice 6.2.** Řekneme, že regulární křivka  $c : I \rightarrow S$  na ploše  $S$  je *parametrizovaná geodetika*, platí-li  $\frac{\nabla c'}{dt}(t) = 0$ ,  $t \in I$ .

**Lemma 6.7.** *Bud'  $c : I \rightarrow S$  regulární křivka na ploše  $S$ . Je ekvivalentní:*

- (1)  *$c$  je parametrizovaná geodetika,*
- (2) *vektor  $c''(t)$  je násobkem normálového vektoru plochy  $N(c(t))$  pro každé  $t \in I$ ,*
- (3)  *$c$  je geodetika a její parametrizace splňuje  $\|c'(t)\| = \text{konst.}$*

*Důkaz.* Ekvivalence prvních dvou podmínek plyne přímo z definice parametrizované geodetiky. Dále je zřejmé, že z (2) plyne, že  $c$  je geodetika. Pro geodetiku je však ekvivalentní

$$c''(t) \perp T_{c(t)}S \iff c' \cdot c'' = 0 \iff \|c'(t)\|' = \frac{c' \cdot c''}{\|c'\|} = 0 \iff \|c'\| = \text{konst.},$$

z čehož plyne ekvivalence druhé a třetí podmínky.

Rovnice pro parametrizované geodetiky. Bud'  $c = f \circ u$  regulární křivka na části plochy pokryté mapou  $f$ . Derivováním rovnosti

$$c' = (u^1)' f_{u^1} + (u^2)' f_{u^2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i (u^i)'' f_{u^i} + \sum_i \sum_j (u^i)' \left( \sum_k \Gamma_{ij}^k f_{u^k} + h^{ij} n \right) (u^j)' \\ &= \sum_k \left( (u^k)'' + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \Gamma_{ij}^k \right) f_{u^k} + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' h^{ij} n \end{aligned}$$

( $\Gamma_{ij}^k$  jsou Christoffelovy symboly, viz Lemma 6.1). Z tohoto vyjádření plyne, že křivka  $c = f \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizovaná geodetika, právě když vyhovuje diferenciálním rovnicím na  $I$

$$(15) \quad \begin{aligned} (u^1)'' + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \Gamma_{ij}^1 &= 0, \\ (u^2)'' + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \Gamma_{ij}^2 &= 0. \end{aligned}$$

□

*Poznámka:* Z výše uvedeného je vidět, že kovariantní derivace vektorového pole i vlastnost 'být geodetikou' je vnitřní vlastností plochy, a lze s nimi tedy pracovat i v Riemannově geometrii. Speciálně tedy izometrickým obrazem geodetiky je opět geodetika.

*Poznámka ke zkoušce:* Znění vzorců z Vět 6.3 a 6.4 se nemusíte učit nazpaměť, ani nebudu zkoušet jejich odvození. Stačí znát, co tyto věty svým obsahem říkají. Naopak odvození rovnic pro parametrizované geodetiky zkouším.

## 7. GAUSS-BONNETOVA VĚTA

**Definice 7.1.** Řekneme, že křivka  $c : [a, b] \rightarrow S$  na orientované ploše  $S$  je *jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná*, jestliže existuje mapa  $f : U \rightarrow S$  plochy a jednoduchá, uzavřená kladně orientovaná křivka  $u : [a, b] \rightarrow U$  taková, že  $c = f \circ u$  a  $\text{Int } u \subset U$ . Značíme  $\text{Int } c := f(\text{Int } u)$ .

**Věta 7.1.** *Bud'  $c : [a, b] \rightarrow S$  parametrizace obloukem jednoduché, uzavřené a kladně orientované křivky na orientované ploše  $S$ . Pak*

$$\int_{\text{Int } c} K d\mathcal{H}^2 = 2\pi - \int_a^b \kappa_g(s) ds,$$

kde  $K$  je Gaussova křivost plochy a  $\kappa_g$  geodetická křivost křivky na ploše.

[Bez důkazu. Jedná se o zobecnění věty 2.17]

**Definice 7.2.** Řekneme, že  $c : [a, b] \rightarrow S$  je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená parametrizovaná křivka na orientované ploše  $S$ , jestliže

- (1)  $c$  je spojitá a má nenulové jednostranné derivace ve všech bodech,
- (2)  $c$  je diferencovatelná ( $C^\infty$ ) všude mimo konečnou množinu bodů  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,
- (3)  $c(a) = c(b)$ ,
- (4)  $c$  je prosté na  $[a, b)$ .

Pozn.: Pro po částech hladkou jednoduchou uzavřenou křivku platí Jordanova věta (věta 2.16), je tedy definován její vnitřek  $\text{Int } c$  a můžeme definovat její orientaci.

**Definice 7.3.** Je-li  $c : [a, b] \rightarrow S$  po částech hladká, jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná parametrizovaná křivka na orientované ploše  $S$ , pak množinu  $M := \langle c \rangle \cup \text{Int } c$  budeme nazývat *křivočarý mnohoúhelník* na  $S$  s hranicí  $\langle c \rangle$ . Body  $c(t_i)$  nazveme *vrcholy* a množiny  $c[t_{i-1}, t_i]$  *hranami* mnohoúhelníku  $M$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Orientovaný (proti směru hodinových ručiček) úhel  $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$  mezi vektory  $c'_-(t_i)$  a  $c'_+(t_i)$  se nazývá *vnější úhel* mnohoúhelníku u vrcholu  $c(t_i)$ .

**Věta 7.2.** Bud'  $c : [a, b] \rightarrow S$  po částech hladká, jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná parametrizovaná křivka na orientované ploše  $S$  s vnějšími úhly  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  příslušného mnohoúhelníku. Pak platí

$$\int_{\text{Int } c} K d\mathcal{H}^2 = 2\pi - \int_a^b \kappa_g(s) ds - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

**Definice 7.4.** *Triangulací* kompaktní orientované plochy  $S$  rozumíme konečný soubor křivočarých mnohoúhelníků  $M_1, \dots, M_k$  na  $S$  s vlastnostmi:

- (1) existuje atlas plochy  $S$  takový, že každý mnohoúhelník  $M_i$  leží v obrazu některé mapy tohoto atlasu,
- (2)  $S = M_1 \cup \dots \cup M_k$ ,
- (3) pro  $i \neq j$  je  $M_i \cap M_j$  buď prázdná množina, nebo společný vrchol, nebo společná hrana  $M_i$  a  $M_j$ .

Pro danou triangulaci pak definujeme *Eulerovu charakteristiku* plochy  $S$

$$\chi(S) := V - H + S,$$

kde  $V$  je počet vrcholů a  $H$  počet hran všech mnohoúhelníků  $M_1, \dots, M_k$ , a  $S := k$  je počet mnohoúhelníků ("stěn").

**Věta 7.3** (Gauss-Bonnetova věta). *Pro kompaktní orientovanou plochu platí*

$$\int_S K d\mathcal{H}^2 = 2\pi\chi(S).$$

*Důkaz.* Bud'  $S = M_1 \cup \dots \cup M_k$  triangulace plochy,  $c_i : [a_i, b_i] \rightarrow S$  parametrizace obloukem obvodu  $M_i$ ,  $c(t_i^1), \dots, c(t_i^{n_i})$  hrany  $M_i$  s  $a_i < t_i^1 < \dots < t_i^{n_i} = b_i$  a nechť  $\alpha_i^j$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , jsou vnější úhly mnohoúhelníku  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Označme rovněž  $\beta_i^j := \pi - \alpha_i^j$  příslušné vnitřní úhly. Podle věty 7.2 platí

$$\int_S K d\mathcal{H}^2 = \sum_{i=1}^k \int_{M_i} K d\mathcal{H}^2 = \sum_{i=1}^k \left( 2\pi - \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g^{(i)}(s) ds - \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j \right),$$



kde  $\kappa_g^{(i)}(s)$  je geodetická křivost  $c_i$  v bodě  $s$ . Každá hrana v triangulaci patří k právě dvěma různým mnohoúhelníkům  $M_i, M_j$ , přitom tyto hrany jsou vzhledem k těmto mnohoúhelníkům vzájemně opačně orientovány, tedy pro jejich geodetické křivosti ve společném bodě  $c_i(s_i) = c_j(s_j)$  těchto hran platí

$$\kappa_g^{(i)}(s_i) + \kappa_g^{(j)}(s_j) = 0.$$

Příslušné integrály geodetických křivostí se tedy vzájemně vyruší a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_S K d\mathcal{H}^2 &= 2\pi k - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j = 2\pi k - \sum_{i=1}^n n_i \pi + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \beta_i^j \\ &= 2\pi S - 2\pi H + 2\pi V = 2\pi \chi(S). \end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme využili toho, že součet vnitřních úhlů příslušných jednomu vrcholu je roven  $2\pi$ .  $\square$

**Důsledek 7.4.** *Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace plochy.*

#### LITERATURA

- (1) L. Boček: *Příklady z diferenciální geometrie*. Univerzita Karlova, Praha 1974
- (2) L. Boček, V. Kubát: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983
- (3) J. Bureš, K. Hrubčík: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. MFF UK, Praha 1998
- (4) M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- (5) W. Klingenberg: *A Course in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York 1978
- (6) T. Shifrin: *A first course in curves and surfaces*.  
<http://alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf>
- (7) V. Souček: studijní text k přednášce,  
[http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/kpl\\_11\\_2012.pdf](http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/kpl_11_2012.pdf)