Geometrie - cvičení 6, 2020

1. Buď $c : I \to S$ asymptotická křivka na ploše S parametrizovaná obloukem a $s \in I$ neinflexní bod. Ukažte, že její torze splňuje

   $$|\tau(s)| = \sqrt{-K(c(s))},$$

   kde $K(x)$ je Gaussova křivost plochy v bodě x.

   Návod: Z minulého cvičení víme, že binormála asymptotické křivky se shoduje až na znaménko s normálou plochy, z čehož plyne vztah $|\tau(s)| = \|n'(s)\|$, kde $n(s) = N(c(s))$. Buďte X_1, X_2 jednotkové hlavní směry plochy v bodě $c(s)$ a λ_1, λ_2 odpovídající hlavní křivosti, a nechť $c'(s) = X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta$. Pak

   $$n'(s) \cdot X_i = II_{c(s)}(c'(s), X_i) = \lambda_1(c'(s) \cdot X_i),$$

   sečtením dostaneme $\|n'(s))\|^2 = \lambda_1^2 \cos^2\theta + \lambda_2^2 \sin^2\theta$. Zároveň protože $c'(s)$ je asymptotický směr, z Eulerovy rovnice platí $\lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta = 0$. Vynásobíme-li poslední rovnici postupně čísly λ_1 a λ_2 a obě rovnice sečteme, dostaneme požadovaný vzoreček.

2. Ukažte, že pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$, zobrazení

   $$\phi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

   (izometrie $H_+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ na sebe) zobrazují polopřímku $x = 0$, $y > 0$ buď na polopřímky $x = x_0$, $y > 0$, nebo na půlkružnice se středem na ose z.

   Návod: Je-li $c = 0$ nebo $d = 0$, obrazem zmíněné polopřímky bude opět polopřímka posunutá ve směru osy x. Je-li $c \neq 0$ a $d \neq 0$, ukažte, že

   $$\left| \frac{ayi + b}{cyi + d} - p \right|^2 = r^2$$

   pro $p = (ad + bc)/(2cd)$ a $r = 1/(2|cd|)$, tedy obrazem polopřímky $x = 0, y > 0$ je půlkružnice se středem p (ležícím na ose x) a poloměrem r.

3. Spočtěte vzdálenost bodů $(2, 1)$ a $(1, 2)$ v hyperbolickém modelu H_+.

   Návod: Najděte a parametrizujte ($c(t) = (x(t), y(t))$) příslušnou geodetiku spojující tyto dva body (kružnice se středem na ose x). Počítejte podle vzorce

   $$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\, dt.$$

   Pro hledání primitivní funkce můžete použít např. kalkulátoru WolframAlpha.

4. Na válcové ploše
$$f(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$$
spočtěte Christoffelovy symboly, napište rovnice pro parametrizované geodetiky a najděte všechny geodetiky.

5. Najděte rovnice pro parametrizované geodetiky na jednotkové sféře parametrizované ve sférických souřadnicích.

6. Ukažte, že na rotační ploše s parametrizací
$$f(u,v) = (p(u)\cos v, p(u)\sin v, q(u))$$
   (a) každý "poledník" $v = \text{const}$ je geodetikou;
   (b) rovnoběžka $u = u_0$ je geodetikou právě tehdy, když $p'(u_0) = 0$.

7. Ukažte, že každá prostorová křivka bez inflexních bodů je geodetikou na přímkové ploše svých binormál.

8. Spočtěte Christoffelovy symboly a sestavte rovnice pro parametrizované geodetiky v hyperbolickém modelu H_+.

9. Spočtěte Gaussovu křivost v H_+; použijte vzorce z Gaussovy věty:
$$K = (g^{11})^{-1}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \sum_l \left(\Gamma^l_{11}\Gamma^2_{l2} - \Gamma^l_{12}\Gamma^2_{l1}\right)\right).$$

10. Hledejte geodetiky na toru s parametrizací ($a > b > 0$)
$$f(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$
Podle Clairautovy věty (přednáška 6.5.) geodetiky, které nejsou rovnoběžkami ($u =$ const), splňují $(a+b\cos u)\cos\alpha = K$ pro nějakou konstantu K (α je úhel, pod nímž geodetika protíná příslušnou rovnoběžku). Popište, jak vypadají geodetiky pro různé hodnoty K. Pro $K \neq 0$ hledejte geodetiky v parametrizaci $u = u(t), v = t$, najděte diferenciální rovnici typu $u'(t) = \Phi(a + b\cos u(t); K)$, a diskutujte tvar řešení podle hodnoty K. Uvažujte zvlášť případy $0 < |K| < a-b$, $|K| = a-b$, $a-b < |K| < a+b$, $|K| = a+b$.

11. *Tractrix* (viz úloha z prvního cvičení) je křivka v rovině xy s parametrizací
$$x = p(t) = t - \tanh t, \quad y = q(t) = \frac{1}{\cosh t}(t > 0)$$
($\tanh z = \sinh z / \cosh z$). Rotací kolem osy x dostaneme rotační plochu
$$f(t,v) = (p(t), q(t)\cos v, q(t)\sin v), \quad (t > 0,\ q \in \mathbb{R})$$
která se nazývá *pseudosféra*. Ukažte, že její Gaussova křivost je identicky rovna -1.

Domácí úkol č. 6: příklady 3, 6 a 7.