

## Cvičení 6 - poznámky k úloze 10:

- z rovnoběžek jsou geodetikami pouze „vnější“ ( $u=0$ ) a „vnitřní“ ( $u=\pi$ ) křivky. (Viz př. 6)
- Clairautova rovnice:

$$(a + b \cos u(t)) \cos \alpha(t) = K \quad (\star)$$

- $K=0$   $\Rightarrow \cos \alpha(t) = 0$  ... křivky protínají

rovnoběžky pod pravým úhlem  $\rightarrow$  poledníky  
( $v = \text{konst.}$ )

- $K \neq 0$ :  $u = u(t)$ ,  $v(t) = t$   
zřejmě  $|K| \leq a + b$  (jinak  $(\star)$  nemá řešení)

$$\cos \alpha = \frac{a + b \cos u}{\sqrt{b^2 (u')^2 + (a + b \cos u)^2}}$$

$$\rightarrow u' = \pm \frac{(a + b \cos u) \sqrt{(a + b \cos u)^2 - K^2}}{K b}$$

(a)  $0 < |K| < a - b$ :  $|u'| \geq \varepsilon > 0$  všude

$\Rightarrow$  max. řešení monotónní, úperiodické  
 $\rightarrow$  „spirály“ podél toru

(b)  $|k| = a - b$  :

(b1) křivka má bod na vnitřní rovnoběžce ( $u = \pi$ )  
 $\Rightarrow$  celá křivka splývá s touto rovnoběžkou  
(jednosměrnost geodetik!)

(b2) křivka nemá bod na vnitřní rovnoběžce  
 $\Rightarrow u' \neq 0$  všude,  $u$  monotónní,  $u(t) \rightarrow \pm\pi$ ,  
 $t \rightarrow \pm\infty$  (geodetika se asymptoticky blíží  
k vnitřní rovnoběžce)

(c)  $a - b < |k| < a + b$  :

řezání musí splývat v každém bodě

$$|\cos u| \geq \frac{|k| - a}{b} > -1$$

$\Rightarrow$  celá křivka leží v části toru mezi dvěma  
rovnoběžkami (vnější strana), řezání je  
periodické.

(d)  $|k| = a + b$  : vnější rovnoběžka

obrázky: [www.rdrop.com/~whelf/math/torus/geodesics.html](http://www.rdrop.com/~whelf/math/torus/geodesics.html)