Cvičení 5

1) Výpočet Gaussovy a střední křivosti je rutinní záležitostí, spočtete matice 1. a 2. f.f. a použijte vzorce z Věty 4.19.
Výsledky pro kontrolu:

(a) $K(u,v) = -\dfrac{a^2}{(v^2+a^2)^2}$, $H(u,v) = 0$,

(b) $K(u,v) = \dfrac{\cos u}{b(a+b\cos u)}$, $H(u,v) = \dfrac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)}$.

2) Plochu parametrizujeme přirozeně jako graf funkce $h(x,y)$, spočteme 1. a 2. f.f. a pro každý vektor $t_\theta = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \in T_{(0,0,0)}S$ spočteme $k_N(t_\theta) = \mathrm{II}_{(0,0,0)}(t_\theta, t_\theta)$.

3) Jednoduché cvičení z lineární algebry, vyjádřete X jako lineární kombinaci hlavních směrů.

4) Obecná poznámka: u rotačních ploch (jíž je i torus) vychází vždy matice 1. i 2. f.f. diagonální, a tedy hlavní křivosti splňují $\lambda_1 = \dfrac{h^{11}}{g^{11}}$, $\lambda_2 = \dfrac{h^{22}}{g^{22}}$ (není třeba roznásobovat $\det(h - \lambda g)$)

5) Podle věty o implic. funkcích můžete vyjádřit např. $y = y(x,z)$, spočtete parc. derivace 1. a 2. řádu a pro plochu danou jako graf této funkce najdete 1. a 2. f.f.

Mně to vyšlo takto: $g = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 2 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \end{pmatrix}$

Dále standardně: $\det(h - \lambda g) = 0$ určuje hlavní křivosti λ_1, λ_2, a $(h - \lambda_i g)\xi_i = 0$ určuje příslušné hlavní směry $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$.

6) (a) vyjde rozvinutelná $(K \equiv 0)$, (b) nikoliv.

7) Rotaci o úhel θ kolem osy z lze vyjádřit (viz 1. cvičení) takto:

$$R_\theta(x,y,z) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

8) Přímo snadno z definic.

9) Spočtete matice 1. a 2. f.f. a použijte Větu 4.24 (získáte diferenc. rovnice pro hlavní i asympt. křivky)

10) Opět z Věty 4.24.

11) Můžete využít vztahu $K^2(t) = K_N(c'(t))^2 + K_g(t)^2$ (Důsledek 4.27)

12) (a) Z Meusnierovy věty zjistíte, že pro asympt. křivku s nenulovou křivostí je hlavní normála křivky v tečné rovině plochy.

(b) Použijte vztahu $L_{c(t)}(c'(t)) = 0$ (L_x je Weingartenovo zobrazení) a úlohy (a).

(c) Použijte (a) a definici geodetiky.

13) Jsou-li N_1, N_2 normály ploch S_1, S_2 v bodě x a $\theta_1 = \sphericalangle(N_1, n)$, $\theta_2 = \sphericalangle(N_2, n)$, kde n je vektor hlavní normály křivky, pak podle Meusnierovy věty je

$$\lambda_1 = \kappa \cos\theta_1, \quad \lambda_2 = \kappa \cos\theta_2 .$$

Využijte dále toho, že buď $\theta = \theta_1 + \theta_2$, nebo $\theta = \theta_1 - \theta_2$.