Geometrie - cvičení 5, 2020

1. Spočtěte Gaussovu a střední křivost v obecném bodě

   (a) *šroubové plochy* s parametrizací

   $$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

   (b) *toru* s parametrizací

   $$f(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

   ($a > b > 0$ jsou pevné parametry).

2. Pro *hyperbolický paraboloid*

   $$z = x^2 - y^2$$

   spočtěte v bodě $(0,0,0)$ normálovou křivost v libovolném směru, hlavní křivosti a hlavní směry.

3. Dokažte *Eulerův vzorec* pro normálovou křivost: Jestliže nenulový vektor $X \in T_xS$ svírá úhel α s hlavním směrem příslušným hlavní křivosti λ_1, pak

   $$\kappa_n(X) = (\cos\alpha)^2\lambda_1 + (\sin\alpha)^2\lambda_2.$$

4. Najděte hlavní směry a hlavní křivosti v obecném bodě toru z příkladu 1(b).

5. Najděte hlavní směry a hlavní křivosti implicitně zadané plochy

   $$x\sin z - y\cos z = 0$$

   v bodě $x = 1, y = z = 0$.

6. Buď $c : I \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka. Uvažujte následující přímkové plochy:

   (a) $f(u,v) = c(u) + vc'(u)$ (plocha tečen křívky c),

   (b) $f(u,v) = c(u) + v\mathbf{n}(u)$ (plocha hlavních normál křívky c).

   Pro obě přímkové plochy určete obor hodnot parametrů (u,v), pro něž je splněna podmínka regularity, spočtěte matice první a druhé fundamentální formy a rozhodněte, zda jsou plochy rozvinutelné. (Návod: pracujte s křivkou parametrizovanou obloukem a používejte Frenetovy vzorce.)

7. Parametrizujte jednodílný rotační hyperboloid
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$
jako přímkovou plochu. (Návod: Ověřte, že množina bodů splňující např.
$$\frac{x-z}{1-y} = \frac{1+y}{x+z} = 1$$
je přímka ležící v hyperboloidu; vyjádřete ji parametricky a rotujte ji kolem osy z.)

8. Dokažte, že každá přímka na ploše je asymptotickou křivkou i geodetikou.

9. Nalezněte asymptotické křivky a rovnice pro hlavní křivky na Enneperově ploše
$$f(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2\right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

10. Nalezněte asymptotické a hlavní křivky na šroubové ploše z příkladu 1(a).

11. Spočtěte geodetickou křivost šroubovice ($a, b > 0$)
$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$
jako křivky na ploše
   (a) $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$,
   (b) $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$.

12. Ukažte, nebo vyvraťte:
   (a) Binormála asymptotické křivky na ploše se shoduje s normálovým směrem plochy.
   (b) Je-li křivka na ploše zároveň hlavní a asymptotická, je to křivka rovinná.
   (c) Je-li křivka na ploše zároveň geodetika a asymptotická, musí to být přímka.

13. Buďte S_1, S_2 dvě plochy protínající se v bodě x a nechť platí $T_xS_1 \neq T_xS_2$. Dokažte, že existuje okolí V bodu x v $\mathbb{R}^3$ tak, že $V \cap S_1 \cap S_2$ je obrazem regulární parametrizované křivky, jejíž křivost κ v bodě x splňuje
$$\kappa^2 \sin^2\theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\theta,$$
kde λ_1, λ_2 jsou normálové křivosti ploch S_1, S_2 ve směru tečny ke křivce a θ je úhel sevřený normálami $N_1(x), N_2(x)$ ploch S_1, S_2. (Použijte větu o implicitních funkcích a Meusnierovu větu.)

Domácí úkol č. 5: příklady 4 a 10.