Cvičení 4 – poznámky

3. sférické souřadnice: <u>prosté</u> zobrazení na $(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ <u>mapa</u> na $(-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon)\times(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$ (Věta 4.2) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ je to mapa sféry?

<u>Lemma:</u> $f: U \to \mathbb{R}^3$ mapa, $f(U)\subset S$, S plocha, $f(U)$ <u>rel. otevřená</u> v S $\Rightarrow$ f je mapa S

5. $f: (u,v) \longmapsto (u\cos v, u\sin v, bv)$

$f^{-1}: (x,y,z) \longmapsto \left(x\cos\frac{z}{b} + y\sin\frac{z}{b}, \frac{z}{b}\right)$

6. $g_{u,v} = \begin{pmatrix} p'^2+q'^2, & 0 \\ 0, & p^2 \end{pmatrix}$, $\det g_{u,v} > 0$

($\Leftrightarrow$ f_u, f_v lin. nezáv.)

$f^{-1}: \begin{cases} u = c^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z\right) \\ v = \arg(x+iy) \end{cases}$ (spojitá verze argumentu)

7. aplikace 6. s: $p(u) = \cosh u$, $q(u) = \sinh u$

8. aplikace 6. s: $p(u) = a + b\cos u$, $q(u) = b\sin u$

9. Jsou-li $c_1 = f \circ u_1$, $c_2 = f \circ u_2$ křivky na ploše protínající se v bodě $x = c_1(t) = c_2(t)$, pak pro úhel $\alpha = \measuredangle(c_1'(t), c_2'(t))$ platí

$$\cos \alpha = \frac{c_1'(t) \cdot c_2'(t)}{\|c_1'(t)\| \cdot \|c_2'(t)\|} = \frac{g_u(u_1'(t), u_2'(t))}{\sqrt{g_u(u_1'(t), u_1'(t))}\sqrt{g_u(u_2'(t), u_2'(t))}},$$

kde $u = u_1(t) = u_2(t)$.

10. Ukažte, že první fund. forma pro stereogr. projekci $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ je tvaru

$$g_{u,v} = \lambda(u,v) \cdot \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

(Věta 4.12 (ii))

13. $S_1 = f_1(\mathbb{R}^2)$, $S_2 = f_2(\mathbb{R}^2)$ jsou plochy (viz př. 5, 6)

Def. $\Phi : S_1 \to S_2$, $\Phi(x) = f_2 \circ \phi^{-1} \circ f_1^{-1}(x)$,

kde $\phi : (v^1, v^2) \mapsto (v^1, \operatorname{asinh} v^2)$

Ukažte, že Φ je lok. izometrie

(viz Věta 4.12. (i): stačí ukázat, že první fund. formy pro $f_1 \circ \phi$ a f_2 splývají)