Geometrie - cvičení 4, 2020

1. Parametrizujte rovinu zadanou jejími třemi body A, B, C.

2. S využitím sférických souřadnic parametrizujte *elipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

($a, b, c > 0$ jsou pevné parametry).

3. Najděte soubor dvou map (*atlas*) pokrývající sféru $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. (Návod: Ukažte, že sférické souřadnice $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$ jsou mapou při restrikci $u \in (-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon)$, a že tato mapa pokrývá otevřenou podmnožinu sféry. Druhou mapu sestrojte jako vhodné "otočení" první mapy.)

4. Zdůvodněte, proč kužel

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

není plochou, a proč $K \setminus \{0\}$ (kužel bez vrcholu) plochou je, a parametrizujte jej. (Návod: uvažujte tečný prostor v počátku za předpokladu, že by kužel plochou byl.)

5. Ukažte, že zobrazení

$$(u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

je mapa ($b > 0$ je pevný parametr). Obraz této mapy se nazývá *šroubová plocha.*

6. Mějme regulární parametrizovanou křivku

$$c : u \mapsto (p(u), 0, q(u)), \quad u \in I,$$

ležící v rovině $\{y = 0\}$ takovou, že $p(u) > 0$, $u \in I$. Pro její rotační plochu s parametrizací

$$f(u, v) = \big(p(u) \cos v, p(u) \sin v, q(u)\big), \quad u \in I,\ v \in \mathbb{R},$$

spočtěte první fundamentální formu. Ukažte, že je-li c homeomorfismus otevřeného intervalu I na $c(I)$, je $f(I \times \mathbb{R})$ plocha. (Návod: ukažte, restrikce f na $I \times J$ je mapa pro libovolný otevřený interval J délky menší než 2π.)

7. Parametrizujte *jednodílný hyperboloid* (s pevnými parametry $a, b, c > 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(Návod: uvažujte nejprve případ $a = b = c$, kdy se jedná o rotační plochu; k parametrizaci hyperboly použijte funkce sinh, cosh.)

8. Ukažte, že pro $a > b > 0$ určuje rovnice
$$(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2$$
plochu v $\mathbb{R}^3$ (nazývá se *torus*) a parametrizujte ji jako rotační plochu.

9. Na parametrizované ploše
$$f(u,v)=(u\cos v, u\sin v, 2v), \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2,$$
uvažujte křivky $u_1(s)=3-s$, $v_1(s)=s/2$, $s>0$, a $u_2(t)=t$, $v_2(t)=t^2$, $t>0$. Určete úhel těchto křivek v jejich průsečíku.

10. Ukažte, že stereografická projekce roviny $\{z=0\}$ ze severního pólu $(0,0,1)$ do sféry $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ (viz příklad 9 z 3. cvičení) je mapa, a spočtěte její první fundamentální formu. Ukažte, že tato mapa zachovává úhly křivek (tedy je *konformní*).

11. Nechť $U\subset\mathbb{R}^2$ je otevřená množina obsahující počátek, a $f: U\to\mathbb{R}^3$ je parametrizovaná plocha s maticí 1.f.f.
$$g_{(u,v)}=\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 4+u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v)\in U.$$
Na ploše jsou implicitně zadané dvě křivky:
$$c_1: u+v=0, \quad c_2: u-v=0.$$
Určete úhel, který křivky svírají v jejich průsečíku.

12. Najděte lokálně izometrické zobrazení (a) z roviny na plášť válce $\{x^2+y^2=r^2\}$, (b) z části roviny na plášť kužele $\{x^2+y^2=z^2,\ z>0\}$.

13. Ukažte, že šroubová plocha s mapou
$$f_1(u^1,u^2)=(u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, au^1), \quad (u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2,$$
je lokálně izometrická *katenoidu*, tj. rotační ploše s parametrizací
$$f_2(v^1,v^2)=a(\cosh v^2\cos v^1, \cosh v^2\sin v^1, v^2), \quad (v^1,v^2)\in\mathbb{R}^2.$$
(Návod: uvažujte změnu parametru $u^1=v^1, u^2=a\sinh v^2$.)

Domácí úkol č. 4: př. 9 a 13