Geometrie - cvičení 3 / 2020

1. Nalezněte rovinnou křivku parametrizovanou obloukem, jejíž křivost je $\kappa(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$.

2. Nechť $c : I \to \mathbb{R}^2$ je rovinná křivka s nenulovou křivostí. *Evoluta* ke křivce c je křivka středů jejích oskulačních kružnic. Křivka e je *evolventou* ke křivce c, jestliže c je evolutou k e. Dokažte, že pro evolventu $e(t)$ regulární parametrizované křivky $c(t)$ platí
$$e(t) = c(t) - \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \int_{t_0}^{t} \|c'(\tau)\| \, d\tau,$$
kde t_0 je nějaký bod definičního oboru c.

3. Ukažte, že evolventou ke křivce $c(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$, $t > 0$, je parabola $e(t) = (-\frac{t}{3}, \frac{t^2}{6} - \frac{1}{3})$, $t > 0$.

4. Určete vnitřní úhly sférického trojúhelníku se stranami délek $a = \pi/3$, $b = 2\pi/3$, $c = 3\pi/4$. Spočtěte obsah tohoto trojúhelníku.

   (Použijte sférickou verzi cosinové, případně sinové věty. Upozornění: sinová věta neurčuje vnitřní úhly jednoznačně!)

5. Vepište do jednotkové koule krychli tak, že střed krychle splývá se středem sféry. Zobrazte hrany krychle středovou projekcí na sféru. Vznikne šest shodných sférických čtyřúhelníků (sférických čtverců). Zjistěte vnitřní úhly a plošný obsah těchto čtverců. Proč nelze definovat sférický čtverec jako čtyřúhelník se čtyřmi pravými úhly?

6. *Loxodroma* je křivky na sféře, která protíná všechny poledníky pod stejným úhlem. Parametrizujte loxodromy na jednotkové sféře. Použijte sférické souřadnice na sféře
$$x = \cos\varphi\cos\psi,\ y = \sin\varphi\cos\psi,\ z = \sin\psi, \quad \varphi \in \mathbb{R},\ \psi \in (-\pi/2, \pi/2).$$
   Poledníkem rozumíme kružnici popsanou vztahem $\varphi = \text{const}$. Loxodromu pak popište pomocí $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$. Vyjádřete délku loxodromy spojující dva dané body na sféře.

7. Vypočtěte vzdálenost z Prahy ($50°05'$N, $14°25'$E) do New Yorku ($40°42'$ N, $74°0'$ W) po loxodromě a po hlavní kružnici a výsledky porovnejte (zemský povrch považujte za sféru). Pro srovnání též spočtěte délku trasy odpovídající "rovné čáře na mapě" (mapou zde rozumíme obraz v pravoúhlých souřadnicích, kde na osu x vynášíme úhel φ a na osu y úhel ψ.

8. Ukažte, že křivka s nenulovou křivostí leží na sféře právě tehdy, když se všechny její normálové roviny protínají v jednom bodě.

9. Označme $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$ a $N = (0, 0, 1)$ "severní pól". *Stereografická projekce* je zobrazení ϕ, které přiřazuje bodu A z roviny $\{z = 0\}$ bod v $S^2 \setminus \{Z\}$, který leží na polopřímce vycházející z N a procházející bodem A.

   (a) Najděte předpis pro ϕ a ϕ^{-1}.

   (b) Ukažte, že ϕ^{-1} zobrazuje kružnice na kružnice nebo přímky.

   Návod: (a) v rovině $y = 0$ platí z podobnosti trojúhelníků $(u, 0) := \phi^{-1}(x, 0, z) = \frac{x}{1-z}$, tedy $x = \frac{2u}{u^2+1}$, $z = \frac{u^2-1}{u^2+1}$.
   Pro úlohu (b) zyužijte faktu, že kružnice v S^2 jsou průniky s rovinami $ax+by+cz+d = 0$, a dosaďte za souřadnice x, y, z z vyjádření zobrazení ϕ.

Domácí úkol č.3: př. 4 a 9