Geometrie - cvičení 2 / 2020

1. Parametrizujte následující křivky obloukem:

   (a) $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^\top$, $t \in (0, 2\pi)$,

   (b) $c(t) = (at, a\sqrt{2}\ln t, at^{-1})^\top$, $t \in (0, \infty)$.

2. Je dána prostorová křivka

   $$c(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)^\top, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Spočtěte její křivost a torzi v obecném bodě a určete Frenetův repér v bodě $t = 0$.

3. Určete Frenetův repér křivky $c(t) = (t, t^2, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, v bodě $t = 0$.

4. Určete křivost a torzi v obecném bodě šroubovice

   $$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^\top, \quad t \in \mathbb{R}$$

   ($a, b > 0$ jsou dané parametry). Určete průsečnici roviny $\{z = 0\}$ s oskulační a normálovou rovinou šroubovice v bodě $c(\frac{\pi}{2})$.

5. Zjistěte, zda křivka

   $$c(t) = \left(\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right)^\top, \quad t \in (1, \infty),$$

   leží v rovině, případně v jaké.

6. Studujte křivost pro elipsu

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

   určete její maxima a minima.

7. Odvoďte vzorce pro křivost křivky dané jako:

   (a) graf funkce $y = f(x)$, $x \in I$, v kartézských souřadnicích;

   (b) graf funkce v polárních souřadnicích $r = g(\varphi)$, $\varphi \in I$.

   (I značí interval.)

8. Určete funkci f tak aby měla křivka

   $$c(t) = (r \cos t, r \sin t, f(t))^\top, \quad t \in \mathbb{R},$$

   nulovou torzi.

9. Ukažte, že prostorová křivka s nenulovou a konstantní křivostí a torzí je šroubovice.

10. *Zobecněná šroubovice* je křivka v prostoru, pro kterou existuje směr, se kterým tečny křivky svírají konstantní úhel. Dokažte, že křivka $c(t)$ s nenulovou křivostí a torzí je zobecněnou šroubovicí právě tehdy, když je poměr $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}$ konstantní.

11. Spočtěte křivost v bodě $(1, 1)$ rovinné křivky zadané implicitně

$$x^3 + xy^3 - 2y^4 = 0.$$

12. Uvažujme křivku $c(t) = (t, t^2, t^3)^\top$ v $\mathbb{R}^3$ pro reálný parametr $t \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pro libovolnou čtveřici po dvou různých bodů ležících na křivce neexistuje rovina, která by tyto body obsahovala.

13. Pro křivku v prostoru parametrizovanou obloukem najděte její Taylorův polynom třetího řádu v neinflexním bodě (vyjádřete jej pomocí vektorů tečny, normály a binormály křivky).

14. S využitím předchozího cvičení ukažte:

    (a) Kolmý průmět křivky do její oskulační roviny v neinflexním bodě má v daném bodě stejnou křivost, jako původní křivka.

    (b) Kolmý průmět křivky do její rektifikační roviny v neinflexním bodě má v daném bodě nulovou křivost.

15. (Křivka posunutá ve směru tečny.) Je dána křivka v $\mathbb{R}^3$ s křivostí $\kappa(s)$ a torzí $\tau(s)$, $s \in I$. Uvažujte novou křivku vytvořenou z původní posunutím o pevnou délku $\lambda > 0$ ve směru tečny. Najděte křivost a torzi nové křivky.

16. Dokažte, že křivka $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem a s nenulovou křivostí a torzí leží na sféře právě tehdy, když platí

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0 \quad \text{na } I.$$

    (Návod: Splňuje-li $c(s)$ výše uvedenou rovnici, leží na sféře se středem $S = c(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\mathbf{b}(s)$.)

Domácí úkol č.2: př. 4 a 7