Geometrie - cvičení 1 / 2020

Podmínky pro získání zápočtu:

- Odevzdané domácí úkoly (6). Úkoly budou zadávány na cvičení a termín odevzdání bude vždy do následujícího cvičení (za 2 týdny).

Úlohy:

Připomenutí: Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *shodnost* (*izometrie*), jestliže

$$\|S(y) - S(x)\| = \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je shodnost právě tehdy, když

1. S je afinní (tzn. $S(x) = Ax + b$, kde A je matice typu $n \times n$ a $b \in \mathbb{R}^n$,
2. A je unitární ($A^T A = I$).

Úloha 1 Ukažte, že všechny unitární matice 2×2 jsou tvaru

$$R = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \text{ nebo } R = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Popište s pomocí tohoto výsledku všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$.

Vektorový součin $u \times v \in \mathbb{R}^3$ vektorů $u, v \in \mathbb{R}^3$ je definován vztahem

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w), \quad w \in \mathbb{R}^3.$$

Platí: (a) $u \times v = o \iff u, v$ jsou lineárně závislé, (b) $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$. V souřadnicích $u = (u^1, u^2, u^3)^T, v = (v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$ je

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T.$$

Úloha 2 Ukažte, že pro libovolné $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ je

$$(u \times v) \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix}.$$

(Návod: Ověřte, že obě strany závisí lineárně na každém ze čtyř zadaných vektorů, a ověřte rovnost pro vektory kanonické báze.)

Z dokázané rovnosti plyne:

$$\|u \times v\| = \sqrt{\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}}.$$

Pozn.: Číslo $\|u \times v\|$ je rovno velikosti plochy rovnoběžníku generovaného vektory u, v.

Úloha 3 Ukažte, že pro lineární izometrii $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ platí

1. $R(u) \cdot R(v) = u \cdot v$,
2. $R(u) \times R(v) = (\det R)R(u \times v)$ $(n = 3)$.

Parametrizace křivek

Úloha 4 Mějme body v prostoru $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -2, -1)$. (a) Nalezněte *regulární* parametrizaci $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ úsečky AB tak, aby $A = c(0)$ a $B = c(1)$. (b) Nalezněte nějakou parametrizaci AB, která v některém bodě není regulární.

Úloha 5 (Kubiky) Máme tři implicitně zadané křivky jako množiny těch bodů v rovině, které splňují rovnice

$$y^2 - x^3 = 0$$
$$y^2 - x^3 - x^2 = 0$$
$$x^3 - y^3 - 3xy = 0$$

Najděte nějaké (nejlépe racionální) parametrizace těchto křivek zkuste je načrtnout.

Úloha 6 (Cykloida) Uvažujme kolo o poloměru a, které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$.

Úloha 7 (Lemniskáta) Uvažujme body $F_1 = (-1, 0), F_2 = (1, 0)$ v $\mathbb{R}^2$. Najděte parametrický popis množiny těch bodů $Z \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnici

$$\|F_1 - Z\|^2 \|F_2 - Z\|^2 = 1,$$

(a) v polárních souřadnicích, (b) s parametrem t ze vztahu $y = x \sin t$.

Úloha 8 (Kissoida) Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $\|A - P\| = \|Q - R\|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny.

Úloha 9 (Tractrix) Tractrix je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $(0, 1)$ a člověk v počátku, tj. v bodě $(0, 0)$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí v podél osy x a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix.

Úloha 10 (Vivianiho křivka) Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr. (Návod: použijte sférické souřadnice.)

Domácí úkol č.1: úlohy 3, 7 a 10