

Průvodce matematickou analýzou



Průvodce matematickou analýzou

Pavel Pyrih

30. ledna 2005

Úvod



ohoto Průvodce jsem sestavil pro širokou matematickou obec, která pečuje o rozvoj matematiky a poskytuje její krásu dalším a dalším generacím. V Průvodci jsem se snažil nachystat ty nejkrásnější poklady matematické analýzy. Víím, že Průvodce je nedokonalý pokus o neuskutečnitelné. V celé matematice i v matematické analýze je totiž takové množství překrásných výsledků, nápadů a postupů, že je vždy nutno některé vynechat. Tak je třeba Průvodce přijmout. Očekávám tedy tolerantní přístup při čtení a do nejmírnější posuzování ...

Na začátku putování

Studium matematiky je do značné míry otázkou osobní. Velmi často se ke studovanému oboru vytvoří silný vztah a doufám, že k tomuto (kladnému) citovému vztahu pomůže i tento Průvodce. V žádném případě si matematika nezaslouží, aby byla studována z "nutnosti", bez příjemného pocitu. Přeji tedy při studiu matematické analýzy hodně radosti a pěkných chvil.

Matematické vzdělání uspěje jako kulturní dobrodružství pouze, když v ní lidé objeví něco pro zábavu, k hraní, k zamyšlení, něco, co se vztahuje k jejich způsobu vidění světa a chápání jejich života.

(S. Markus ~ 2003)

Nyní pár poznámek k tomu nejdůležitějšímu. Zodpovím otázky Proč?, Co? a Jak?

Thaletova základní otázka nebylo "co víme", ale "jak to víme".

(Aristotelés ze Stageiry ~ -350)

Proč

V Průvodci najdeme přehled matematické analýzy. Pokusil jsem se o jakýsi doplněk k existujícím učebním textům. Není zde systematický výklad daného tématu s příklady a dalším materiálem. Jde zde o vyzdvižení základních principů.

Aktivace syntaktických složek na úkor obsahových složek je důležitým zájmem současného matematického vzdělání.

(S. Markus ~ 2003)

Vím, že pouze část studujících má matematickou analýzu za svůj cílový obor. Pociťuji za velkou škodu, že se tedy většina dozví z matematické analýzy pouze nepatrnou část. Studijní texty dalších partií jsou zpravidla psány jako specializované učebnice pro studijní program matematická analýza a příbuzné obory. Takto chci nabídnout široké veřejnosti matematickou analýzu jako jeden fungující celek.

Většina intelektuálů spojuje matematiku ne s lidským myšlením, ale se vzorečky, jejichž hodnota mimo matematiku je nulová.

(S. Markus ~ 2003)

Vím, že se matematická analýza rozrůstá, stejně jako celá věda, velmi rychle. Během dvacátého století se v matematické analýze objevilo tolik převratných novinek, že bylo třeba přehodnotit obsah základních kurzů matematiky a matematické analýzy.

Toho co víme je kapka, toho, co nevíme, moře.

(anonym)

Také zde se snažím o poctivý výběr podstatných témat, pokud zde některá chybí, nepovedlo se mi to a omlouvám se ...

Student není číše, kterou je třeba naplnit, ale pochodeň, kterou je třeba zapálit.

(Aristotelés ze Stageiry ~ -350)

Existuje řada přístupů k prezentaci matematiky. Zde předvedený postup jistě nejde použít jako běžná učebnice.

Mým cílem není "učinit vědu přístupnou každému"
(S. Markus ~ 2003)

Z nezvyklých přístupů zde zmiňuji přístup používaný při výuce R.L. Moorem mezi roky 1920 a 1969 na University of Texas. Jeho styl spočíval v sestavení učebního textu obsahujícího pouze všechny potřebné definice a podstatné věty. Studium spočívalo v aktivním řešení problémů a doplňování chybějících důkazů. Tento způsob byl hodnocen jako velmi náročný, ale měl pěkné výsledky. Nedoporučuji však, nicméně je možné, použít tohoto Průvodce jako "pokusnou verzi" textu pro takovýto styl výuky.

O to ustavičně dbám, aby se životodárná naše univerzita bez cvičení ve vědách nestala neplodnou, nýbrž aby rozkvetl obdivuhodný důvtip mistrů a jinoši byli v srdci podněcováni obírat se vědami ...
(J. Hus)

V každém případě je možno o zde uvedených definicích a větách odborně diskutovat při opakování nebo zkoušení matematické analýzy. Průvodce se také hodí jako zavazadlo na pustý ostrov nebo do necivilizované končiny. S jeho pomocí je možné (v případě nejvyšší nouze ;-)) vybudovat celý aparát matematické analýzy.

Nezáleží na tom, jak mnoho (máš knih), ale jak jsou dobré.
(Seneca)

Vím, že podstatou matematické analýzy není zvládnutí co největšího počtu tvrzení a definic. Podstata je jinde.

... (jde o) kombinatorické myšlení, rekurzivní myšlení, algoritmické myšlení, metoda postupných kroků, deduktivní myšlení, induktivní myšlení, myšlení v analogiích, pravděpodobnostní myšlení, ...
(S. Markus ~ 2003)

Chápu, že látku, kterou nebylo možno zcela zvládnout, nemůžeme považovat za čistý přínos.

Mládenec začal u Euklida studovat "Základy" a u první věty se ptal: "Budu z toho mít nějaký zisk? Euklides zavolal otroka a řekl: "Dej mu minci, aby mu učení něco dalo."

(Eukleidés z Alexandrie ~ -330)

Doufám, že Průvodce pomůže pro získání rámcového přehledu a bude alespoň trochu užitečný.

Výklad v obvyklé přednášce často neznamená o mnoho více, než že se studenti naučí názvy vět, dostanou strach z důkazů a získají jedině starost, zda se důkazy neobjeví u zkoušky.

(P.R. Halmos 1980)

Pro matematickou obec zde předkládám z matematické analýzy (snad) to nejhezčí. Připomenu jednu drobnost o D. Hilbertovi. Ten často říkal řečníkům na odborném semináři "chceme pouze hrozinky z koláče". Tak jsem se snažil vybírat i já ...



Tento Průvodce je uzavřen neviditelným zámekem pro ty, kteří nemají čisté úmysly.

Co

Budeme společně poznávat nekonečnou krajinu matematické analýzy. Pro snazší orientaci zde uvedu některé orientační body, které budeme mít vždy (alespoň mlhavě) na dohled.

- ⇒ Přímkou odpovídá množině reálných čísel. Takto množina reálných čísel nemá mezery.
- ⇒ Pro reálnou funkci jde definovat spojitost v bodě a funkce spojitá na množině reálných čísel nabývá vždy mezihodnot. Tedy spojitá funkce dělá pěkné "křivky".
- ⇒ Reálná funkce jde často aproximovat lineární funkcí, aparát derivování je k tomu jako stvořen.
- ⇒ Konečně aditivní a spočetně aditivní integrování dovede spočítat plochu pod grafem funkce.
- ⇒ Základní věta analýzy

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

svazuje operace derivace a integrace.

- ⇒ Na reálné ose jde zkoumat míru a podle ní integrovat.
- ⇒ Prostor spojitých funkcí na intervalu má pěknou vnitřní strukturu.
- ⇒ Jde definovat prostory pouze určením okolí jednotlivých bodů a zkoumat je jako topologické prostory. Spojitost jde používat i pro zobrazení topologických prostorů.
- ⇒ Řešením diferenciální rovnice $y' = y$ dostaneme exponenciálu, která určuje, jak se nám mají množit peníze v bance.

Matematika zde není pouze z matematické analýzy. Zvolil jsem i řadu věcí z jiných oblastí matematiky.



Jednou z důležitých motivací k napsání tohoto textu bylo to, že pevně věřím, že mladá generace je řada inteligentních lidí, kteří si zaslouží pozvání k matematickým pokladům formou tohoto Průvodce.

Jak

Zpracování Průvodce zaslouží trochu vysvětlení. Matematika je zapsána tradičním způsobem. Důkazy jsou zpravidla vynechány, jinde pouze naznačeny. Úplné znění důkazů lze najít podle literatury uvedené v závěru Průvodce. Průvodce obsahuje různá matematická tvrzení, nejsou to vždy nejsilnější výsledky. Jejich formulace je zvolena tak, aby byl jejich význam co nejnázornější. Pravdivost je (doufám) zachována.

Článek obsahuje mnoho nového a mnoho pravdivého. Naneštěstí to, co je pravdivé, není nové a to, co je nové, není pravdivé.

(anonym)

Poslední část byla řečena zbytečně.

(kolega na MFF)

Zcela odlišnou roli mají osobní komentáře vytištěné s obrázkem jako text v rámečku.



Jejich prostřednictvím přidávám svoje poznámky.

Tím získává Průvodce trochu osobní ráz.



Jistě někde zůstanou překlepi a překlepové. Omlouvám se ;-)

Snažím se zde zdůraznit důležité popřípadě nedůležité stránky matematických tvrzení. Jde zde o roli průvodce, který může osobní volbou ovlivnit směr a význam prohlídky ...



Za případné "žertovné poznámky" trapného charakteru se omlouvám :-)

Budeme často zkoumat otázku "Proč?".

Hlavní nedostatek školské matematického vzdělání jsou: absence myšlenek, ty jsou nahrazeny procedurami; nedostatek motivace ve způsobu, jak jsou zaváděny pojmy, problémy jsou vybrány a věty dokázány; nedostatečná pozornost je věnována historickým aspektům; výhradní pozornost formální správnosti, nedostatek pozornosti pro porozumění, pro smysl, pro otázku "proč?"; velmi slabá vazba k ostatním předmětům vyučovaným na škole; sylabus a učebnice dvakrát až třikrát větší než to, co je efektivně přijato normálními studenty; nedostatečné použití hravých aspektů matematiky; nedostatečná souvztažnost s počítačovou vědou; nedostatečná pozornost matematickému způsobu myšlení a jeho významu v každodenním životě.

(S. Markus ~ 2003)

Snažil jsem se látku doplnit obrázky.



Moje výtvarné nadání a prostorová představivost může způsobit drobné potíže ...

Některé obrázky jsou docela hezké. Například fotografie zeměkoule lze "vystříhnout" a volně používat ...

Neradi děláme kornouty z čistého papíru, jakmile je potíštěn, rádi ho popadneme.

(G.Ch.Lichtenberg ~ 1770)

Obecné věci se musí dostat z papíru do hlavy. Proto pomůže, pokud si nyní (na cvičišti) budeme některé obecné pojmy představovat jako konkrétní objekty. Tak si můžeme kreslit obrázky funkcí a posloupností, ...



Pracovat ale musíme tak, abychom používali pouze vlastnosti, které opravdu obecně platí.

Látka je sestavena podle témat, není metodicky uspořádána a nabízí pouze přehled matematické analýzy. Témata jsou řazena logicky a používají předchozí výklad.



Snaha byla minimalizovat partie, o kterých slušný člověk pronese: "SMETÍ!"

Kapitola o funkcích jedné proměnné má ukázat, jakými prostředky je matematická analýza tvořena. Důkazy tam uváděných tvrzení jsou jednoduché a dají se snadno vymyslet.



Je to součást základní gramotnosti.

V dalších kapitolách jde často o tvrzení, která opravdu není snadné dokázat. Proto si stačí nejprve udělat základní přehled o tom, co platí a jakými otázkami se matematická analýza zabývá.



Důkaz jednoduchého tvrzení se podobá vesnickému nádraží. Vláček čeká na druhý, po jeho příjezdu přestoupí pár lidiček a vláčky pokračují. Důkazy složitých tvrzení se pak podobají železniční dopravě v celé republice. Vláčky na sebe různým způsobem čekají, předávají si tajné zprávy, sem tam do sebe úmyslně narazí, nakonec se na hlavní nádraží dokodrcá půlnoční vlak. Unaveni jsou všichni ...

Důkazová technika vyžaduje velké úsilí.



Tvrzení, jejichž stručný důkaz je napsán na několika hustě popsaných stránkách, jistě čekají na jednodušší přístup. Pokud vím, tak ty opravdu průzračné důkazy sbíral P.Erdős do imaginárního díla zvaného "The Book".

Základem matematiky jsou problémy a jejich řešení. Zde jsou problémy soustředěny v kapitolách podle jejich obtížnosti. Jde o problémy pro bakaláře, magistry a mistry. V okamžiku, kdy píši tento komentář jsem se definitivně rozhodl, že ponechám problémy pro bakaláře, magistry a mistry na konci knihy. Odolal jsem tak pokušení zařadit je do Průvodce před kapitoly s matematickým výkladem. Prvotními jsou v matematice problémy. K jejich řešení použije řešitel všechno možné. To pak odhodí a jde řešit další problémy. Jako supi se na použité metody, které slavily úspěch, vrhnou další matematici a udělají z nich teorii.

Matematické teorie jsou něco jako obchod se zbraněmi v době míru.

(anonym)

Obsah je zde vytištěn v několika úrovních. Tím chci poskytnout matematickou analýzu z různě podrobného pohledu. Hloubka odpovídá univerzitnímu studiu. V některých místech jsou doplněny i nové výsledky hlubší. Tradiční členění matematické analýzy na reálnou, komplexní a funkcionální analýzu, obyčejné, parciální a moderní diferenciální rovnice, variační počet, teorii potenciálu a další je zde vynecháno. Zvláště teorie diferenciálních rovnic je zde pouze naznačena u jednotlivých problémů.



Není tu tradiční škatulkování diferenciálních a integrálních rovnic. Není tu toho ale víc, Není tu prostě skoro nic. Nezlobím se.

Název "Průvodce matematickou analýzou" jsem vybral mimojiné proto, že řada jiných názvů byla již použita (Eukleidovy "Základy", Rudinovy "Principy", Rektorysův "Přehled", Lukešovy "Zápisky", Nečasovy "Metody").



Já jsem průvodce ...

Samotné čtení vyžaduje součinnost a toleranci k vypravěčovi, který se snaží co může, aby se konečně nějak vyjádřil.



Toto není nějaký neosobní text. Je to psáno a říkáno s citem.

Pro lehčí orientaci v textu jsem zvolil následující úmluvu: místo obvyklého textu "nazveme jej *skalárním součinem*" budeme psát "nazveme jej **skalární součin**".

Neštípejte mne do prstu - pohleďte kam ukazuje.

(W.S.McCulloch)

Tím trochu pošramotíme plynulost textu, ale získáme optickou orientaci o nově definovaných pojmech. Podobně při jiných pojmech a formulacích budu používat první pád.



Já například nemluvím vždy pouze pravdu, mluvím nespisovně a tak . . .

Letopočty jsou zde pro přibližnou představu. Nelze se na ně spolehnout.



Kdy se co stalo nikdo neví přesně, pokud mu něco nespadlo na nohu, to si pamatuje.

Průvodce je předkládán "tak, jak je". Autor se zříká odpovědnosti za škody způsobené (a související, byť i nepřímé) tímto dílem. Použití je na vlastní riziko.



Mohu se mejlit. Proto raději platnost tvrzení před použitím zkontrolujte.

Průvodce je psán jako přehled matematické analýzy a nevyžaduje její znalost.

. . . matematické učebnice jsou používány více učiteli než studenty . . .

(S.Markus ~ 2003)

Pro jeho lepší čitelnost se snažím nepoužívat označení, která nejsou všeobecně známá a jasná. V matematice je totiž pěkným zvykem pojmenovávat jednotlivé objekty nebo tvrzení jménem jejich objevitele. Tak máme Cauchyovu větu, Verhulstovu rovnici a podobně. Pro Průvodce matematickou analýzou jsem zvolil (tam, kde to jde) pojmy srozumitelnější, tedy věta o komplexní integraci, rovnice populačního růstu a podobně.



Předpokládám, že Průvodce bude číst více těch, kteří matematickou analýzu neznají, než znalců. Proto jsem nepoužíval jmenné označení běžných pojmů. Na konec jsem zařadil seznam nezvyklých sousloví pro znalce i neznalce. Tam je uvedeno, jak říkám kterým prostorům apod.

Tak bude Průvodce lépe čitelný i pro planety, kde Verhulst objevil Cauchyovu větu a naopak. Mimojiné se musíme připravit na dobu, kdy bude jen v matematické analýze řádově sto matematiků jménem Cauchy s principiálním přínosem k teorii funkcí komplexní proměnné ...



Ascoliho důkaz Brouwerova důsledku Cayleyovy poučky o Dedekindových řezech v Eukleidově prostoru všech Fréchetovsky derivovatelných funkcí s Gateauovou derivací v Hilbertově podprostoru Chinčinyovy grupy transformací Isidorových mnohočlenů s nenulovým Jordanovým indexem Kelloggových transformací Laplaceovy rovnice na Möbiusově pásku s Newtonovskými okrajovými podmínkami vyhovujícím Osgoodově rovnici v Pascalově sumačním tvaru Rieszových potenciálů prvků Schauderovy báze s Taylorovými polynomy v Urysohnově kompaktu všech řešení Volterových rovnic Whiteheadovy úlohy zobecňujících Xuan-Ločův martingal s Youngovým modulem v Zermelových axiomech byl pěkný.

Budeme raději mluvit jednoduše a autory uvedu pouze u příslušné myšlenky.



Provokuji s potěšením.

Krása matematiky je nepřehlédnutelná a jejím tvůrcům patří veliký dík za jejich dílo.

Budu dostatečně odměněn, pokud, až to budeš říkat jiným, nebudeš prohlašovat, že ten objev je tvůj, ale řekneš, že je můj.

(Thalés z Miletu ~ -600)

Takto veřejně přiznávám, že jsem skoro všechno odněkud opsal. Některé věci jsem vymyslel sám, ale pravděpodobně ani v těchto případech jsem pravděpodobně nebyl první . . .

Jestliže pak jsem se při tomto svém díle dotkl nějakým slovem některého z mistrů nebo jej urazil, jak jsem neměl, odpusťte, nejdůstojnější mistři, viníkovi.

(J. Hus ~ 1400)

Vše jsem napsal v dobré víře.

Quod bonum, felix, faustum, fortunatum-que sit.

Ať je to k dobru, štěstí, blahu a zdaru.
(z diplomu Karlovy Univerzity)

Seznam kapitol

Úvod	(i)
1 Svět matematiky	1
2 Základy matematické analýzy	9
3 Funkce jedné proměnné	49
4 Integrace podle jedné proměnné	89
5 Funkce více proměnných	109
6 Integrace podle více proměnných	121
7 Funkce komplexní proměnné	139
8 Funkce více komplexních proměnných	159
9 Obecné prostory	161
10 Základní prostory	193
11 Základní prostory funkcí	203
12 Základní funkcionály	211
13 Operátorový počet	215
14 Základní typy operátorů	225
15 Základní operátory	229
16 Obecné metody řešení problémů	245
17 Problémy pro bakaláře	253
18 Problémy pro magistry	329
19 Problémy pro mistry	351
20 Závěrečná kapitola	375
A Slovník pojmů	383
B Přehled o literatuře	385
Literatura	391
Rejstřík	394

Seznam kapitol a jejich dělení

Úvod	(i)
Na začátku putování	(i)
Seznam kapitol	(xii)
Seznam kapitol a jejich dělení	(xiii)
Podrobný obsah	(xxxiv)
1 Svět matematiky	1
1.1 Co je matematika	1
1.2 Škatulkování matematiky	3
2 Základy matematické analýzy	9
2.1 Výroky a množiny	9
2.2 Oblíbená říkadla v matematické analýze	28
2.3 Reálná čísla	31
2.4 Komplexní čísla	39
2.5 Posloupnosti	40
2.6 Řady	44
3 Funkce jedné proměnné	49
3.1 Pojem funkce	49
3.2 Spojitost	56
3.3 Derivace	73
3.4 Průběh funkce	83
4 Integrace podle jedné proměnné	89
4.1 Konečně aditivní integrace	89
4.2 Spočetně aditivní integrace	93
4.3 Základní věta analýzy	100
5 Funkce více proměnných	109
5.1 Pojem funkce a zobrazení více proměnných	109
5.2 Spojitost	111
5.3 Derivace	113
6 Integrace podle více proměnných	121
6.1 Konečně aditivní integrace	122
6.2 Spočetně aditivní integrace	124
6.3 Placatá integrace	125
6.4 Vektorová integrace	128
7 Funkce komplexní proměnné	139
7.1 Pojem komplexní funkce	139
7.2 Derivace komplexní funkce	140
7.3 Komplexní křivkový integrál	143
7.4 Základní vlastnosti holomorfních funkcí	148
7.5 Analytické funkce	154
8 Funkce více komplexních proměnných	159
8.1 Základní vlastnosti	159

9	Obecné prostory	161
9.1	Topologické prostory	161
9.2	Metrické prostory	170
9.3	Vektorové prostory	172
9.4	Topologické vektorové prostory	175
9.5	Lokálně konvexní prostory	176
9.6	Úplně normované lineární prostory	180
9.7	Úplně prostory se skalárním součinem	187
9.8	Prostory s mírou	190
10	Základní prostory	193
10.1	Reálná osa	193
10.2	Rovina	194
10.3	Prostor	194
10.4	Prostory posloupností	197
11	Základní prostory funkcí	203
11.1	Prostory spojitých funkcí	203
11.2	Polospojité funkce	205
11.3	Aproximativně spojité funkce	205
11.4	Mocninné řady	206
11.5	Prostory integrovatelných funkcí	207
11.6	Prostory integrovatelných distribucí	208
12	Základní funkcionály	211
12.1	Integrál jako lineární funkcionál	211
12.2	Distribuce	211
13	Operátorový počet	215
13.1	Diferenciální počet	215
13.2	Integrální počet	216
13.3	Funkční počet	218
13.4	Pevný bod zobrazení	222
13.5	Operátory v akci	223
14	Základní typy operátorů	225
14.1	Kompaktní operátory	225
14.2	Samoadjungované operátory	226
14.3	Další třídy operátorů	228
15	Základní operátory	229
15.1	Obecné operátory	229
15.2	Kompaktní operátory	230
15.3	Exponenciální transformace	231
15.4	Frekvenční řady a transformace	233
15.5	Operace s distribucemi	242
16	Obecné metody řešení problémů	245
16.1	Obecně o problémech	245
16.2	Obecně o metodách	246
16.3	Metody prostorů funkcí	249

16.4	Přeformulování úlohy	249
17	Problémy pro bakaláře	253
17.1	Pokladnice kouzel	254
17.2	Příklad (Pomalý šnek)	254
17.3	Od kdy do kdy a co za to	255
17.4	Existence a jednoznačnost	258
17.5	Ono se to srovná	259
17.6	Když se dva perou	262
17.7	Jak ušetřit	271
17.8	Kudy kam	274
17.9	Gravitace - dobrý sluha, zlý pán	281
17.10	Jednou jsi dole jednou nahoře	288
17.11	Rovnice vlnění	299
17.12	Je ti teplo?	301
17.13	Jen se zahřej	302
17.14	O lyžařích a sjezdovce	305
17.15	Jestli nás váha neklame	310
17.16	Drobné si nechte (kvantová peněženka)	311
17.17	Příroda je geniální, neplýtvá	313
17.18	Relativita - ekvivalence hmoty a energie	314
17.19	Není to vidět, ale existuje to	317
17.20	Čísla jsme si vymysleli, prostor však je dán	321
17.21	Mix	322
18	Problémy pro magistry	329
18.1	O periodických přírodních jevech	330
18.2	Pružnost a pevnost	331
18.3	Tepelná rovnováha	333
18.4	Les metod	339
18.5	Provázanost topologie a integrování	341
18.6	Prvočísla a komplexní funkce	343
18.7	Mix	344
19	Problémy pro mistry	351
19.1	Digitální sluneční hodiny	352
19.2	Gravitace	352
19.3	Kvantová fyzika	359
19.4	Proudění kapaliny	361
19.5	Minimální plochy	365
19.6	Mix	366
20	Závěrečná kapitola	375
20.1	Historie matematické analýzy	375
20.2	Současnost matematiky a matematické analýzy	377
20.3	Budoucnost	379
A	Slovník pojmů	383
A.1	Základní nezvyklá spojení	383

B Přehled o literatuře	385
B.1 Doporučená literatura ke studiu	385
B.2 Použité zdroje	385
Literatura	391
Rejstřík	394

Obsah

Úvod	(i)
Na začátku putování	(i)
Proč	(ii)
Co	(iv)
Jak	(v)
Seznam kapitol	(xii)
Seznam kapitol a jejich dělení	(xiii)
Podrobný obsah	(xxxiv)
1 Svět matematiky	1
1.1 Co je matematika	1
1.2 Škatulkování matematiky	3
2 Základy matematické analýzy	9
2.1 Výroky a množiny	9
2.1.1 Výroky	9
2.1.2 Zacyklené vlastnosti	10
2.1.3 Paradox (O nejmenším obrovi)	11
2.1.4 Paradox (Můžeme věřit lháři?)	11
2.1.5 Věta (Nedefinovatelnost pravdy)	12
2.1.6 Věta (Nerozhodnutelnost ve výrokovém počtu)	12
2.1.7 Naivní teorie množin	12
2.1.8 Paradox (Kdo holí holiče?)	13
2.1.9 Relace	14
2.1.10 Zobrazení	14
2.1.11 Uspořádání	15
2.1.12 Definice (Ordinální čísla)	15
2.1.13 Paradox (O největším ordinálním čísle)	15
2.1.14 Transfinitní indukce	15
2.1.15 Paradox (Žádný strom neroste do nebe)	16
2.1.16 Velikost množin	16
2.1.17 Paradox (O diagonální posloupnosti)	17
2.1.18 Definice (Mohutnost množin)	17
2.1.19 Věta (O mohutnostech)	17
2.1.20 Věta (O potenci)	17
2.1.21 Paradox (O potenci největší množiny)	19
2.1.22 Definice (Upravená definice množiny)	19
2.1.23 Axiomatická teorie množin	19
2.1.24 Jazyk axiomatické teorie množin	19
2.1.25 Axiomy teorie množin (TEMNO)	21

2.1.26	Axiom výběru (AC , axiom of choice)	21
2.1.27	Paradox (O shodných množinách na sféře s AC)	22
2.1.28	Paradox (O dvou koulích s AC)	22
2.1.29	Ekvivalentní formulace AC	23
2.1.30	Důsledky AC	23
2.1.31	Slabší verze AC	23
2.1.32	Věta (Mohutnost množiny reálných čísel)	24
2.1.33	Hypotéza kontinua (CH , continuum hypothesis)	24
2.1.34	Černobílá rovina s CH (Pro optimisty i pesimisty)	24
2.1.35	Zobecněná hypotéza kontinua (GCH)	25
2.1.36	Definice (Malý kardinál)	25
2.1.37	Definice (Velké kardinály)	25
2.1.38	Definice (Konstruovatelné množiny)	25
2.1.39	Nekonečné hry	26
2.1.40	Axiom determinovanosti (AD)	26
2.1.41	Konzistence teorie množin	26
2.1.42	Věta o konzistenci s CH	26
2.1.43	Věta o konzistenci s negací CH	27
2.1.44	Věta (Existuje nedokazatelná pravda)	27
2.1.45	Věta (Nedokazatelnost vlastní konzistence)	28
2.1.46	Nová axiomatika na obzoru?	28
2.2	Oblíbená říkadla v matematické analýze	28
2.2.1	Základní ukolébavka	28
2.2.2	Velký Kvantifikátor si toho navymýšlí ...	29
2.2.3	Malý Kvantifikátor dává hádanky ...	29
2.2.4	Třikrát a dost !	30
2.2.5	Cvičiště se třemi kvantifikátory	30
2.2.6	Bojiště s	31
2.2.7	Další záludnosti již nejsou ...	31
2.3	Reálná čísla	31
2.3.1	Konstrukce racionálních čísel	32
2.3.2	Věta ($\sqrt{2}$ není racionální - geometrický důkaz)	33
2.3.3	Konstrukce reálných čísel pomocí řezů	33
2.3.4	Věta (Axiomy reálných čísel)	34
2.3.5	Poznámka ke konstrukci reálných čísel	36
2.3.6	Definice (Suprémum)	36
2.3.7	Věta (Axiom o suprémum)	37
2.3.8	Věta (O neprázdném průniku intervalů)	37
2.3.9	Věta (Plážové lemma o slunečnicích)	37
2.3.10	Definice (Rozšířená reálná osa)	38
2.4	Komplexní čísla	38
2.4.1	Konstrukce komplexních čísel	38
2.4.2	Definice (Rozšířená komplexní rovina)	39
2.4.3	Věta (Základní věta algebry)	40
2.5	Posloupnosti	40
2.5.1	Definice (Limita)	41
2.5.2	Další pojmy	42
2.5.3	Další věty	42
2.5.4	Věta (Existence hromadného bodu)	43
2.5.5	Věta (Podmínka ustálenosti)	43

2.5.6	Konstrukce reálných čísel pomocí posloupností	43
2.6	Řady	43
2.6.1	Definice (Formální řada čísel)	43
2.6.2	Věta (Nutná podmínka konvergence)	45
2.6.3	Věta (Srovnávací kritérium)	45
2.6.4	Věta (Harmonická řada diverguje)	45
2.6.5	Věta (Konvergence geometrické řady)	46
2.6.6	Věta (Alternující řada konverguje, když ...)	46
2.6.7	Operace s řadami	46
2.6.8	Věta (O součinu řad)	47
3	Funkce jedné proměnné	49
3.1	Pojem funkce	49
3.1.1	Definice (Funkce z \mathbb{R} do \mathbb{R})	49
3.1.2	Zobrazování funkcí	49
3.1.3	Operace s funkcemi	52
3.1.4	Věta (O monotonii)	52
3.1.5	Definice (Stejnoměrná konvergence)	53
3.1.6	Věta (Test stejnoměrné konvergence)	54
3.1.7	Věta (Majorantní kritérium)	55
3.1.8	Věta (Součinnová kritéria)	55
3.2	Spojitosť	56
3.2.1	Definice (Spojitosť v bodě)	56
3.2.2	Definice (Limita)	58
3.2.3	Definice (Okolí a okolíčko)	59
3.2.4	A zase kvantifikátory	59
3.2.5	Věty (Pozorování obrázku limity)	60
3.2.6	Věta (O policajtech)	61
3.2.7	Věta (O limitě složené funkce)	62
3.2.8	Ukázky (ne)spojitosti v bodě	63
3.2.9	Věta (Jiné definice spojitosti v bodě)	64
3.2.10	Definice (Nevlastní limity)	65
3.2.11	Věta (O nevlastních limitách)	65
3.2.12	Věta (O nevlastních bodech)	66
3.2.13	Definice (Spojitosť na intervalu)	67
3.2.14	Věta (Omezenost spojitě funkce)	67
3.2.15	Věta (Spojité funkce nabývá maxima)	68
3.2.16	Věta (Spojité funkce nabývá mezíhodnot)	69
3.2.17	Věta (Spojitosť inverzní funkce)	69
3.2.18	Definice (Stejnoměrná spojitost)	69
3.2.19	Definice (Sublinearita)	70
3.2.20	Věta (O stejnoměrné spojitosti)	71
3.2.21	Věty (O spojitosti a stejnoměrné konvergenci)	72
3.3	Derivace	73
3.3.1	Definice (Derivace v bodě)	73
3.3.2	Věty (Pozorování derivace v bodě)	74
3.3.3	Věty (Pozorování derivace)	76
3.3.4	Věty (O tečně ke grafu funkce)	78
3.3.5	Věta (Zobecněná věta o střední hodnotě)	78
3.3.6	Věta (Pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$)	79

3.3.7	Věta (O jednostranné derivaci)	80
3.3.8	Věta (O rozvoji funkce)	81
3.3.9	Definice (Symbol "malé o ")	82
3.3.10	Věta (Pravidla počítání rozvoju)	83
3.4	Průběh funkce	83
3.4.1	Definice (Průběh funkce)	83
3.4.2	Věty (O konvexitě)	85
3.4.3	K čemu se hodí průběh funkce	85
3.4.4	Věta (Exponenciála je pěkná funkce)	85
4	Integrace podle jedné proměnné	89
4.1	Konečně aditivní integrace	89
4.1.1	Definice (Plocha pod grafem funkce)	89
4.1.2	Definice (Konečně aditivní integrace)	90
4.1.3	Věta (Kritérium integrovatelnosti)	91
4.1.4	Věta (Plocha pod grafem funkce)	91
4.1.5	Věta (Integrace je lineární funkcionál)	92
4.1.6	Věta (Spojitá funkce nezkaží integrovatelnost)	92
4.1.7	Výhody a nevýhody	92
4.2	Spočetně aditivní integrace	93
4.2.1	O počítání drobných	93
4.2.2	Definice (Plocha pod grafem funkce)	93
4.2.3	Definice (Nulová míra)	94
4.2.4	Definice (Vnější míra)	94
4.2.5	Věta (Spočetná subaditivita vnější míry)	95
4.2.6	Věta (Charakteristika měřitelných množin)	95
4.2.7	Věta (Míra na měřitelných množinách)	96
4.2.8	Věta (Axiom výběru a neměřitelná množina)	96
4.2.9	Definice (Míra na tlustější reálné ose)	96
4.2.10	Definice (Měřitelné funkce)	97
4.2.11	Věta (O měřitelných funkcích)	97
4.2.12	Definice (Spočetně aditivní integrace)	97
4.2.13	Věty (Limitní chování spočetně aditivní integrace)	98
4.2.14	Věty (Vztah měřitelných a spojitých funkcí)	99
4.2.15	Definice (Integrace na podmnožině)	99
4.2.16	Věta (Plocha pod grafem funkce)	100
4.3	Základní věta analýzy	100
4.3.1	Věta (Základní věta analýzy)	100
4.3.2	Definice (Integrace podle základní věty analýzy)	101
4.3.3	Definice (Primitivní funkce)	102
4.3.4	Věty (O primitivních funkcích)	102
4.3.5	Věta (Integrace po částech)	102
4.3.6	Věta (Integrace pomocí derivovatelné substituce)	103
4.3.7	Věta (Kritéria integrovatelnosti)	103
4.3.8	Funkce derivovatelné skoro všude	104
4.3.9	Věta (O konečném skoro pokrytí)	104
4.3.10	Věta (Derivace monotónní funkce)	104
4.3.11	Definice (Funkce omezené variace)	105
4.3.12	Věta (O omezené variaci)	105
4.3.13	Definice (Absolutní spojitost)	105

4.3.14	Věta (O absolutní spojitosti)	105
4.3.15	Věta (Základní pŕůvĕta analýzy)	106
4.3.16	Věta (Základní vĕta analýzy - verze "skoro všude")	106
4.3.17	Věta (Základní vĕta analýzy - verze "singulární")	107
4.3.18	Poznámka o absolutní spojitosti	107
4.3.19	Definice (Absolutní spojitost míry)	107
4.3.20	Věta (O absolutní spojitosti mĕr)	108
4.3.21	Věta (Integrace pomocí sublineární substitute)	108
5	Funkce více promĕnných	109
5.1	Pojem funkce a zobrazení více promĕnných	109
5.1.1	Definice (Body, vzdálenost a okolí v \mathbb{R}^n)	109
5.1.2	Definice (Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k a jejich zobrazování)	110
5.1.3	Definice (Parciální zobrazení a funkce)	110
5.2	Spojitosť	111
5.2.1	Definice (Spojitost v bodĕ)	111
5.2.2	Vĕty (Nĕkdy více promĕnných nevadí)	111
5.2.3	Vĕta (Komplikace nepřináší "kam")	111
5.2.4	Příklad (Komplikace přináší "odkud")	111
5.2.5	Příklad (Ke spojitosti nestačí "všechny směry")	112
5.2.6	Klasická zlobidla - nespojitost skrytá ve vzorečku	112
5.2.7	"Stejná" spojitost parciálních zobrazení	112
5.3	Derivace	113
5.3.1	Definice (Derivace v bodĕ)	113
5.3.2	Definice (Parciální derivace funkce v bodĕ)	114
5.3.3	Vĕty (Derivace a parciální derivace funkce)	114
5.3.4	Derivace a její maticový zápis	115
5.3.5	Vĕta (Derivace složeného zobrazení)	116
5.3.6	Derivace vyšších řádů	116
5.3.7	Extrémy funkcí více promĕnných	116
5.3.8	Jak si zajistit inverzní zobrazení	116
5.3.9	Vĕta (O inverzním zobrazení)	117
5.3.10	Definice (Regulární zobrazení)	117
5.3.11	Vĕta (O regulárním zobrazení)	117
5.3.12	Implicitní funkce (Povídání o šťastném houbařovi)	117
5.3.13	Vĕta (Implicitní funkce v rovinĕ)	117
5.3.14	Implicitní funkce (Řešení soustavy rovnic)	118
5.3.15	Implicitní funkce a inverzní zobrazení - kámoši	119
5.3.16	Vázané extrémny	119
5.3.17	Vĕta (Vázané extrémny)	120
6	Integrace podle více promĕnných	121
6.1	Konečně aditivní integrace	122
6.1.1	Intervaly, čtverečky, krychličky, ...	122
6.1.2	Integrace přes řezy	122
6.1.3	Vĕta (Integrace přes řezy)	122
6.1.4	Integrace přes řezy v praxi	123
6.1.5	Vĕta (Integrace pomocí substitute)	123
6.1.6	Integrace pomocí substitute v praxi	124
6.2	Spočetně aditivní integrace	124

6.2.1	Jak na to a co dostaneme ...	124
6.2.2	Věta (Integrace pomocí substituce)	125
6.3	Placatá integrace	125
6.3.1	Křivky, plochy, ...	125
6.3.2	Definice (k -rozměrná míra v \mathbb{R}^n)	125
6.3.3	Vlastnosti k -rozměrné míry v \mathbb{R}^n	126
6.3.4	Definice (Objem lineárního zobrazení)	126
6.3.5	Věta (Integrace pomocí substituce)	127
6.3.6	Křivkový integrál	127
6.3.7	Plošný integrál	127
6.4	Vektorová integrace	128
6.4.1	Práce, síla, ...	128
6.4.2	Zákon zachování	128
6.4.3	Jak na to?	129
6.4.4	Vektorové pole, gradient, divergence, rotace	129
6.4.5	Orientace ploch	132
6.4.6	Tečný vektor a křivkový integrál	132
6.4.7	Normálový vektor a plošný integrál	133
6.4.8	Věta (O křivkovém integrálu)	134
6.4.9	Věta (O divergenci)	134
6.4.10	Věta (O rotaci v \mathbb{R}^2)	134
6.4.11	Věta (O rotaci v \mathbb{R}^3)	135
6.4.12	Věta (Zákon zachování)	135
7	Funkce komplexní proměnné	139
7.1	Pojem komplexní funkce	139
7.1.1	Body, vzdálenost a okolí v \mathbb{C}	139
7.1.2	Konvergence a spojitost v \mathbb{C}	139
7.1.3	Funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} a jejich zobrazování	140
7.2	Derivace komplexní funkce	140
7.2.1	Definice (Derivace v bodě)	140
7.2.2	Věta (O komplexní derivaci a otáčení rovin)	141
7.2.3	Věta (O komplexní derivaci a zachování úhlů)	142
7.2.4	Definice (Holomorfní funkce)	143
7.3	Komplexní křivkový integrál	143
7.3.1	Definice (Křivky, cesty, cykly)	143
7.3.2	Definice (Oblast a křivková souvislost)	143
7.3.3	Definice (Komplexní křivkový integrál)	143
7.3.4	Definice (Komplexní primitivní funkce)	144
7.3.5	Věta (Komplexní zákon zachování)	144
7.3.6	Cesta kolem pólu	144
7.3.7	Věta (Primitivní funkce a integrace)	145
7.3.8	Věta (Integrace okolo trojúhelníku)	146
7.3.9	Věta (Existence primitivní funkce na kruhu)	147
7.3.10	Index bodu ke křivce	147
7.4	Základní vlastnosti holomorfních funkcí	148
7.4.1	Věta (Integrální vyjádření holomorfní funkce)	148
7.4.2	Věta (Omezená celá funkce je konstantní)	148
7.4.3	Věta (Základní věta algebry)	149
7.4.4	Věta (Princip maxima modulu)	149

7.4.5	Věta (Zápis holomorfní funkce mocninnou řadou)	149
7.4.6	Věta (O podstatné singularitě)	150
7.4.7	Věta (Derivace a integrace mocninných řad)	151
7.4.8	Věta (Reziduová věta)	152
7.4.9	Příklad na reziduovou větu	152
7.4.10	Věta (Stejnoměrná limita holomorfních funkcí)	152
7.4.11	Aproximace racionálními funkcemi	153
7.4.12	Aproximace polynomy	153
7.4.13	Věta (O jednoznačnosti holomorfních funkcí)	153
7.4.14	Věta (O otevřeném zobrazení)	153
7.4.15	Věta (O jezírkách bez ostrůvků)	153
7.4.16	Věta (O membránách)	154
7.5	Analytické funkce	154
7.5.1	Víceznačné funkce	154
7.5.2	Analytický element a analytická funkce	156
7.5.3	Analytické funkce - funkce na ploše	156
7.5.4	Věta (Jednoznačnost analytické funkce na kruhu)	157
8	Funkce více komplexních proměnných	159
8.1	Základní vlastnosti	159
8.1.1	Definice	159
8.1.2	Oblast holomorfnosti	159
8.1.3	Polydisk	159
8.1.4	Rozšiřování holomorfních funkcí	160
8.1.5	Zobrazení polydisku na kouli	160
9	Obecné prostory	161
9.1	Topologické prostory	161
9.1.1	Definice (Topologický prostor)	161
9.1.2	Základní pojmy	162
9.1.3	Definice (Zobecněná posloupnost)	163
9.1.4	Definice (Konvergence)	163
9.1.5	Filtrování	163
9.1.6	Definice (Spojitost)	164
9.1.7	Věta (Charakterizace spojitosti)	164
9.1.8	Definice (Oddělovací axiomy)	164
9.1.9	Definice (Kompaktní topologický prostor)	165
9.1.10	Věta (Charakterizace kompaktnosti)	165
9.1.11	Věta (O průniku kompakťů)	165
9.1.12	Definice (Kompaktifikace)	165
9.1.13	Definice (Souvislý topologický prostor)	166
9.1.14	Definice (Maximální souvislé množiny)	166
9.1.15	Věta (Vlastnosti souvislých množin)	166
9.1.16	Věta (Topologická pozorování)	166
9.1.17	Definice (Homeomorfní topologické prostory)	167
9.1.18	Definice (Slabší a silnější topologie)	167
9.1.19	Definice (Slabá topologie)	167
9.1.20	Definice (Součin topologických prostorů)	167
9.1.21	Věta (Součin kompakťů je kompaktní)	168
9.1.22	Definice (Silná topologie)	168

9.1.23	Věta (Oddělování pomocí funkce a normalita)	168
9.1.24	Věta (Rozšiřování spojité funkce a normalita)	169
9.1.25	Metrizací věty	169
9.1.26	O kategoriích hustých a řídkých množin	169
9.1.27	Věta (O kategoriích)	169
9.1.28	O průnicích otevřených množin	169
9.1.29	Definice (Malá induktivní dimenze)	170
9.2	Metrické prostory	170
9.2.1	Definice (Metrický prostor)	170
9.2.2	O vzdálenosti, okolí a topologii	170
9.2.3	Definice (Ekvivalentní metriky)	171
9.2.4	Věta (Univerzální separabilní metrický prostor)	171
9.2.5	Úplnost prostoru	171
9.2.6	Věta (O kategoriích)	171
9.2.7	Věta (Kompaktnost v metrických prostorech)	171
9.2.8	Věta (O pevném bodu kontraktivního zobrazení)	171
9.3	Vektorové prostory	172
9.3.1	Definice (Vektorový prostor)	172
9.3.2	O zobrazeních	172
9.3.3	Definice (Algebraický duál)	173
9.3.4	Konvexní funkcionály a pseudonormy	173
9.3.5	Věta (Rozšiřování majorizovaných lineárních forem)	173
9.3.6	Nezávislost a báze	174
9.3.7	Definice (Faktorové prostory)	174
9.3.8	Definice (Nadrovina)	174
9.3.9	Věta (O jádrech funkcionálů)	174
9.3.10	Věta (Základní lemma o jádrech)	174
9.4	Topologické vektorové prostory	175
9.4.1	Definice (Topologický vektorový prostor)	175
9.4.2	Definice (Topologický duál)	175
9.4.3	Množiny poblíž nuly	175
9.4.4	Věta (Regularita lineární topologie)	175
9.4.5	Věta (O bipoláře)	176
9.5	Lokálně konvexní prostory	176
9.5.1	Definice (Lokálně konvexní prostor)	176
9.5.2	Definice (Konvexní obal)	176
9.5.3	Věta (Barely v lokálně konvexním prostoru)	176
9.5.4	Věta (Spojitost konvexních funkcionálů)	176
9.5.5	Věta (Normovatelnost)	177
9.5.6	Věta (O pseudonormách)	177
9.5.7	Věta (Spojitost lineárních funkcionálů)	177
9.5.8	Věta (O oddělování)	177
9.5.9	Věta (Metrizovatelnost)	177
9.5.10	Slabé topologie	178
9.5.11	Věty o slabé topologii	178
9.5.12	Silná topologie	179
9.5.13	Věta (Princip minima)	179
9.5.14	Věta (O obalu extrémálních bodů)	179
9.5.15	Věta (O integrální reprezentaci)	179
9.6	Úplně normované lineární prostory	180

9.6.1	Normované lineární prostory	180
9.6.2	Izometricky izomorfní prostory	180
9.6.3	O koulích	180
9.6.4	Definice (Projekce)	180
9.6.5	Definice (Topologický součet prostorů)	180
9.6.6	Prostor lineárních zobrazení	181
9.6.7	Definice (Spektrum operátoru)	181
9.6.8	Věta (O spektru operátoru)	181
9.6.9	Definice (Adjungované zobrazení)	181
9.6.10	Věta (Rozšiřování spojitých lineárních forem)	182
9.6.11	Věta (Princip stejnoměrné omezenosti)	182
9.6.12	Věta (O otevřeném zobrazení)	183
9.6.13	Věta (O inverzním zobrazení)	183
9.6.14	Věta (O uzavřeném grafu)	183
9.6.15	Věta (O projekci)	183
9.6.16	Věta (O skoro-kolmici)	183
9.6.17	Kanonické vnoření do biduálu	183
9.6.18	Slabá konvergence	184
9.6.19	Věty (O slabé konvergenci)	184
9.6.20	Striktně a uniformně konvexní prostory	185
9.6.21	Metrická projekce	185
9.6.22	Hladké prostory	185
9.6.23	Renormace	186
9.6.24	Nabývání normy	186
9.6.25	Nekonečné součty	187
9.7	Úplné prostory se skalárním součinem	187
9.7.1	Prostory se skalárním součinem	187
9.7.2	Kolmost	188
9.7.3	Věta (Existence nejbližšího prvku)	188
9.7.4	Věta (Existence ortomormální báze)	188
9.7.5	Věta (O velikosti úhlopříčky)	188
9.7.6	Věta (O spočetné ortonormální bázi)	189
9.7.7	Věta (O izometrickém izomorfismu s $l^2(A)$)	189
9.7.8	Věta (Reprezentace spojitě lineární formy)	190
9.7.9	Spočetný součin reálné osy	190
9.8	Prostory s mírou	190
9.8.1	Prostor měř na kompaktu	190
9.8.2	Prostor měřitelných funkcí	191
10	Základní prostory	193
10.1	Reálná osa	193
10.1.1	Základní vlastnosti	193
10.1.2	Pórovitost	194
10.2	Rovina	194
10.2.1	Věta (O roztínání roviny)	194
10.2.2	Věta (O téčkách)	194
10.3	Prostor	194
10.3.1	\mathbb{R}^n	194
10.3.2	Hranice mezi prostorem a časoprostorem	195
10.4	Prostory posloupností	197

10.4.1	l^∞	197
10.4.2	c a c_0	197
10.4.3	Prostor všech posloupností	198
10.4.4	l^p pro $1 \leq p < \infty$	198
10.4.5	Prostor posloupností konečné variace	200
11	Základní prostory funkcí	203
11.1	Prostory spojitých funkcí	203
11.1.1	Prostory spojitých funkcí	203
11.1.2	O prostoru spojitých funkcí	204
11.1.3	Prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ s konvergencí v míře	204
11.1.4	Prostor $\mathcal{C}^k([0, 1])$	204
11.1.5	Absolutně spojité funkce	205
11.2	Polospojité funkce	205
11.2.1	Definice (Polospojité funkce)	205
11.3	Aproximativně spojité funkce	205
11.3.1	Definice (Bod hustoty)	205
11.3.2	Věta (O bodech hustoty)	205
11.3.3	Definice (Hustotní topologie)	205
11.3.4	Věta (O hustotní spojitosti)	205
11.4	Mocninné řady	206
11.4.1	Definice (Mocninné řady)	206
11.4.2	Věta (Derivace a integrace mocninných řad)	206
11.4.3	Věta (O radiální limitě)	206
11.5	Prostory integrovatelných funkcí	207
11.5.1	L^∞	207
11.5.2	L^p	207
11.6	Prostory integrovatelných distribucí	208
11.6.1	Definice prostoru	208
11.6.2	Stopa(ř) na hranici	209
11.6.3	Věty o vnoření	210
11.6.4	Duál k prostoru integrovatelných distribucí	210
12	Základní funkcionály	211
12.1	Integrál jako lineární funkcionál	211
12.1.1	Jak na to	211
12.2	Distribuce	211
12.2.1	Základní prostor	211
12.2.2	Regulární a singulární distribuce	213
12.2.3	Věta (Kladné distribuce jsou míry)	213
12.2.4	Jiný základní prostor a jiná definice	214
13	Operátorový počet	215
13.1	Diferenciální počet	215
13.1.1	Definice (Slabá a silná derivace)	215
13.1.2	Konvexní funkce	216
13.2	Integrální počet	216
13.2.1	Vektorové míry	216
13.2.2	Vektorová integrace	217
13.2.3	Prostory se základní větou analýzy	217

13.3	Funkční počet	218
13.3.1	Počítání s operátory	218
13.3.2	Algebry operátorů	219
13.3.3	Definice (Algebry s involucí)	219
13.3.4	Invertibilní prvky	219
13.3.5	Věta (Vztah inverze a geometrické řady)	220
13.3.6	Definice (Spektrum a rezolventa)	220
13.3.7	Věta (O rezolventní funkci)	220
13.3.8	Věta (O spektru)	220
13.3.9	Reprezentace algeber	220
13.3.10	Funkční kalkulus	221
13.3.11	Analytický funkční kalkulus	221
13.3.12	Spojité funkční kalkulus	221
13.4	Pevný bod zobrazení	222
13.4.1	Pevný bod	222
13.4.2	Věty o pevném bodu	222
13.5	Operátory v akci	223
13.5.1	Dynamické děje	223
13.5.2	Definice (Semigrupa operátorů)	223
13.5.3	Spojitosť semigrupy	223
13.5.4	Generátor semigrupy	223
13.5.5	Abstraktní dynamická úloha	224
14	Základní typy operátorů	225
14.1	Kompaktní operátory	225
14.1.1	Definice (Kompaktní operátor)	225
14.1.2	Věta (O kompaktních operátorech)	225
14.1.3	Věta (O spektru kompaktního operátoru)	226
14.2	Samoadjungované operátory	226
14.2.1	Definice (Samoadjungované operátory)	226
14.2.2	Věta (Spektrum samoadjungovaného operátoru)	227
14.2.3	Věta (Měřitelný funkční kalkulus)	227
14.2.4	Kompaktní samoadjungované operátory	227
14.3	Další třídy operátorů	228
14.3.1	Operátory konečného typu	228
14.3.2	Operátory typu l^2	228
14.3.3	Nukleární operátory	228
14.3.4	Uzavřené operátory	228
15	Základní operátory	229
15.1	Obecné operátory	229
15.1.1	Prostor operátorů	229
15.1.2	Disková algebra	230
15.1.3	Algebra $H^\infty(U)$	230
15.1.4	Příklady semigrup	230
15.1.5	Operátor derivování	230
15.2	Kompaktní operátory	230
15.2.1	Příklady kompaktních operátorů	230
15.3	Exponenciální transformace	231
15.3.1	Definice	231

15.3.2	Zde se kouzlí	231
15.3.3	Skoková funkce	232
15.3.4	Konvoluce	232
15.3.5	Kde se hodí konvoluce	233
15.4	Frekvenční řady a transformace	233
15.4.1	Frekvenční řada	233
15.4.2	O součtu frekvenční řady	234
15.4.3	Konvergence frekvenční řady	236
15.4.4	Průměrované součty frekvenční řady	236
15.4.5	Aplikace průměrových součtů	237
15.4.6	Frekvenční řady a L^2	237
15.4.7	Komplexní tvar frekvenční řady	238
15.4.8	O diskrétních a spojitých frekvencích	238
15.4.9	Kdy je funkce rovna frekvenčnímu integrálu?	239
15.4.10	O komplexních frekvencích	239
15.4.11	Frekvenční transformace	239
15.4.12	Vlastnosti frekvenční transformace	240
15.4.13	Frekvenční transformace v L^2	240
15.4.14	Frekvenční transformace (temperovaných) distribucí	241
15.5	Operace s distribucemi	242
15.5.1	Součin funkce a distribuce	242
15.5.2	Distributivní derivace	242
15.5.3	Distributivní primitivní funkce v \mathbb{R}	242
15.5.4	Konvoluce distribucí v \mathbb{R}	243
15.5.5	Vztah klasické a distributivní derivace	243
16	Obecné metody řešení problémů	245
16.1	Obecně o problémech	245
16.1.1	Původ problémů	245
16.1.2	Formulace problémů	246
16.1.3	Základní otázky	246
16.2	Obecně o metodách	246
16.2.1	Obecné a zobecněné řešení	247
16.2.2	Problém zkoumáme i z praktického pohledu	247
16.2.3	Symetrie	247
16.2.4	Formalismus	247
16.2.5	Elementární pozorování	248
16.2.6	Rozložení problému na jednodušší	248
16.2.7	Linearita a nelinearita	248
16.2.8	Pokud to půjde, vyřešíme vše, co půjde	248
16.2.9	Substituce	248
16.2.10	Implicitní tvar řešení	249
16.2.11	Hledání řešení v určitém tvaru	249
16.3	Metody prostorů funkcí	249
16.4	Přeformulování úlohy	249
16.4.1	Variační metody	250
16.4.2	Pravděpodobnostní a statistické metody	250
16.4.3	Topologické metody	250
16.4.4	Numerické metody	250

17 Problémy pro bakaláře	253
17.1 Pokladnice kouzel	254
17.1.1 Příklad (Vysoká stavba)	254
17.2 Příklad (Pomalý šnek)	254
17.3 Od kdy do kdy a co za to	255
17.3.1 Exponenciální banka	255
17.3.2 Zjišťování stáří fosílií	257
17.3.3 Metoda řešení	257
17.4 Existence a jednoznačnost	258
17.4.1 Existence řešení	258
17.4.2 Asymptotická stabilita	259
17.4.3 Distributivní řešení	259
17.5 Ono se to srovná	259
17.5.1 Kam dopluje loď	259
17.5.2 Metoda variace konstant	261
17.5.3 Populační exploze	261
17.5.4 Společenská mobilita	261
17.5.5 Chemická reakce	262
17.5.6 Znečištění jezera	262
17.6 Když se dva perou ...	262
17.6.1 Jak neprohrát válku	262
17.6.2 Odzbrojování	262
17.6.3 Boj s neštovicemi	263
17.6.4 Nákaza HIV	264
17.6.5 Společenské problémy	264
17.6.6 O soustavách	264
17.6.7 Fundamentální systém řešení	265
17.6.8 Dravec a kořist	266
17.6.9 O fázové rovině	268
17.6.10 Soupeřivé populace	268
17.6.11 O kritických bodech soustav	268
17.6.12 Maticový zápis a řešení	270
17.7 Jak ušetřit ...	271
17.7.1 Nejkratší cesta	271
17.7.2 Variační metoda	271
17.7.3 Půjďme rovnou za nosem ...	272
17.7.4 Vázané extrémny	272
17.7.5 Jak postavit plot	272
17.7.6 Problém minimální plochy	273
17.8 Kudy kam ...	274
17.8.1 Jak si postavit ulitu	274
17.8.2 Ortogonální trajektorie	275
17.8.3 Řetězovka	275
17.8.4 Problém lana	277
17.8.5 Rotační plocha	277
17.8.6 Na tahu	278
17.8.7 Plavec zvítězí ...	278
17.8.8 Stíhací křivka	279
17.8.9 Hon na neřízenou střelu	279
17.9 Gravitace - dobrý sluha, zlý pán	281

17.9.1	Jistý "homerun"	281
17.9.2	Vodní hodiny	282
17.9.3	Gravitační síla	283
17.9.4	Pohyby planet	284
17.9.5	O tunelování	285
17.9.6	Proč tunelovat?	286
17.10	Jednou jsi dole jednou nahoře ...	286
17.10.1	Pružina	286
17.10.2	Jednoznačnost řešení	288
17.10.3	Jak vždy "uhodnout" řešení	288
17.10.4	Harmonické kmitání	289
17.10.5	Trajektorie a orbity	290
17.10.6	Srovnání řešení	290
17.10.7	Řešení pomocí mocninných řad	291
17.10.8	Netlumené nucené kmity	291
17.10.9	Ladička a ladič ...	291
17.10.10	Resonance	292
17.10.11	Vibrující mobil	293
17.10.12	Past na piráty silnic	293
17.10.13	Flumení	293
17.10.14	Stabilita s fiktivní energií	293
17.10.15	Dvojpružina a jízda na koni	295
17.10.16	kyvadle	296
17.10.17	Řešení v distribucích a fundamentální řešení	296
17.10.18	Počáteční úloha v distribucích	297
17.10.19	Rovnice kmitání v distribucích	298
17.11	Rovnice vlnění	298
17.11.1	Snadné řešení vlnové rovnice	298
17.11.2	Vlnová rovnice v distribucích	299
17.11.3	Distributivní řešení s počátečními podmínkami	299
17.12	Je ti teplo?	299
17.12.1	Rovnice tepelné rovnováhy	299
17.12.2	Problém minimalizace	301
17.12.3	Fundamentální řešení	301
17.13	Jen se zahřej	301
17.13.1	Jak rychle chladne bábovka	301
17.13.2	Vedení tepla	302
17.13.3	Vedení tepla na tenkém drátu	303
17.13.4	Tepelné jádro	303
17.13.5	Distributivní řešení	304
17.14	O lyžařích a sjezdovce	306
17.14.1	Brachystochrona	306
17.14.2	Jde to i jinak ...	308
17.14.3	A ještě jinak	308
17.15	Jestli nás váha neklame ...	309
17.15.1	Princip úměrnosti	309
17.15.2	Raketa a palivo	310
17.15.3	Prší či mží ...	310
17.16	Drobné si nechte (kvantová peněženka)	310
17.16.1	Kvantová mechanika	310

18.3.1	Harmonické funkce	331
18.3.2	Okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy	331
18.3.3	Řešení pro kouli	332
18.3.4	Hlavní problém	332
18.3.5	Nezáporné harmonické funkce	332
18.3.6	Vlastnost průměru	332
18.3.7	Věta o průměru	333
18.3.8	Vlastnosti harmonických funkcí	333
18.3.9	Fundamentální řešení a harmonické jádro	333
18.3.10	Superharmonické funkce	333
18.3.11	Harmonický potenciál	334
18.3.12	Vlastnosti superharmonických funkcí	334
18.3.13	Lokální harmonická modifikace	334
18.3.14	Regularita distributivního řešení	334
18.3.15	Rozklad superharmonické funkce	334
18.3.16	Harmonický operátor	335
18.3.17	Konstrukce harmonického operátoru	335
18.3.18	Regulární hraniční body	335
18.3.19	Věta (Regularita hraničního bodu)	336
18.3.20	Kuželový test	336
18.3.21	Kapacita	336
18.3.22	Věta (O kapacitě)	337
18.3.23	Věta (Kapacita a regularita)	337
18.4	Les metod	337
18.4.1	Slabé řešení	337
18.4.2	Slabé řešení a variační úloha	337
18.4.3	Problém - s hezkými operátory není problém	338
18.5	Provázanost topologie a integrování	339
18.5.1	Simplexy a komplexy	339
18.5.2	Řetězy	339
18.5.3	Řetěz komplexů	339
18.5.4	Derivace derivace a co dál	340
18.5.5	Kohomologie	340
18.5.6	Věta (Dualita forem a komplexů)	340
18.6	Prvočísla a komplexní funkce	341
18.6.1	Prvočíselná věta	341
18.6.2	Důkaz prvočíselné věty	342
18.7	Mix	342
18.7.1	O pevném bodu	342
18.7.2	Chlupatá koule	343
18.7.3	Superkapilára	343
18.7.4	Neviditelný cedník	344
18.7.5	Prostorová křivka a dimenze v háji	344
18.7.6	Problém prosakování	344
18.7.7	Uzavřené povrchy - koule s "ušima" a "dírama"	345
18.7.8	Věta o indexu	346

19	Problémy pro mistry	349
19.1	Digitální sluneční hodiny	350
19.1.1	Cestovní špunt	350
19.1.2	Digitální sluneční hodiny	350
19.1.3	Tomograf	350
19.2	Gravitace	350
19.2.1	Satelitní problém	350
19.2.2	Velký únik	352
19.2.3	Problém n těles	353
19.2.4	Relativistický pohyb	356
19.2.5	Problém gravitace	356
19.3	Kvantová fyzika	356
19.3.1	Prostory řešení vlnové funkce	356
19.3.2	Vlnová funkce atomu	357
19.3.3	Variační úloha	357
19.3.4	Princip neurčitosti	358
19.3.5	Existence řešení	359
19.3.6	Excitovaný stav	359
19.3.7	Atom vodíku	359
19.4	Proudění kapaliny	359
19.4.1	Rovnice proudění kapaliny	359
19.4.2	Soliton je samotná vlnka	362
19.5	Minimální plochy	363
19.5.1	Izoperimetrický problém	363
19.5.2	Více-bublina	364
19.5.3	Rotační plochy s konstantní křivostí	364
19.6	Mix	364
19.6.1	O kořenech na přímce	364
19.6.2	O sféře v časoprostoru	365
19.6.3	Dynamické ceny	365
19.6.4	O pomerančích a dělových koulích	365
19.6.5	O fraktálech	366
19.6.6	O barvení	367
19.6.7	O suchém putování	368
19.6.8	Co je vlastně placaté	369
19.6.9	O racionálních řešeních	370
19.6.10	Hypotéza o komplexním kruhu	370
19.6.11	Jemně holomorfní funkce	371
19.6.12	Variety	371
19.6.13	Lokální topologické grupy	371
19.6.14	Kulečnickové trajektorie	371
19.6.15	Paradox dvojčat	371
19.6.16	Transcendentní čísla	372
20	Závěrečná kapitola	375
20.1	Historie matematické analýzy	375
20.1.1	Historické matematické osobnosti	375
20.1.2	Cesta pokroku lidstva	376
20.2	Současnost matematiky a matematické analýzy	377
20.2.1	Novinky-pojmy	377

20.3	Budoucnost	379
20.3.1	Základní přírodní principy	380
20.3.2	Gravitace a hmota	380
20.3.3	Jak je co zakódováno	381
A	Slovník pojmů	383
A.1	Základní nezvyklá spojení	383
B	Přehled o literatuře	385
B.1	Doporučená literatura ke studiu	385
B.2	Použité zdroje	385
	Literatura	391
	Rejstřík	394

Podrobný obsah

Kapitola 1

Svět matematiky



ato kapitola představuje jednotlivé matematické obory a poskytuje základní přehled o matematice.

1.1 Co je matematika

Matematika je jedním z největších intelektuálních vítězství člověka.

Matematika dává člověku nový smyslový orgán.

(Ch.Darwin ~ 1850)

K mnoha pokusům o definici matematiky přidávám formulaci:

Matematika je nejmenší systém, v němž jsou povoleny následující dvě činnosti

- (i) Zvolíme soustavu tvrzení a její jednotlivá tvrzení prohlásíme za pravdivá.
- (ii) Pomocí této soustavy zkoumáme další tvrzení, zda jsou také pravdivá.



Zkoumání podle bodu (i) a (ii) musí (alespoň počítači) dělat radost :-)

Matematický zápis je často pro úsporu místa proložen značkami. Proto je rychlost jeho četby omezena.

Matematika je napsána pro matematiky.

(N.Copernicus ~ 1515)

Matematika si buduje pro daný problém specifický svět. Přijme základní definice a vztahy a pak pracuje odtržena od zbytku světa. Na konci se pokusí svoje výsledky prodat . . .

Matematika je neomezený nástroj na abstraktní pojmy.

(P.A.M.Dirac ~ 1933)

Matematika jako neomezený nástroj pro tvorbu nových světů přináší matematikům velké uspokojení.

Život je dobrý právě pro dvě věci, objevovat matematiku a učit matematiku.

(S.Poisson ~ 1810)

Motivaci si matematika bere z okolního světa. Další zdroj nápadů je samotná matematika. Mezi matematiky najdeme hledače pokladů i pečlivé organizátory.

. . . skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.

(P.R.Halmos 1980)

Lidstvo dosáhlo velikého pokroku a rozvoje. Bez matematiky by jeho možnosti nebyly takové, jaké jsou.

Matematika je součást kulturního dědictví lidstva.

(S.Markus ~ 2003)

Matematika je užitečná zábava.



Matematika je jako akční hra. Pohybujeme se neznámým terénem a sbíráme kouzelné nápoje, zbraně a podobně. Ty si dáváme do batůžku a v pravém okamžiku je použijeme. Podobně si v matematice bereme do paměti vše, co v matematice slyšíme či vidíme, a používáme to pak k řešení problémů.

1.2 Škatulkování matematiky

Matematický svět je bez hranic a matematici jsou jeho obyvatelé. Jejich nadšení drží základy matematického vesmíru pohromadě. Každý matematik má svoji roli.

Dá se říci, že v matematice, stejně jako ve válce, jsou strategové a taktici. Vojenský strateg má určitou intuitivní představu, jak vést tažení, ponětí o velkých masách a jejich vzájemných vztazích. Taktik se drží terénu, má technické znalosti a zřetelnou zálibu v organizační činnosti.

(G.Choquet ~ 1990)

Tradičně je akceptováno dělení jednotlivých částí matematiky podle metod a objektů, které jsou zkoumány a používány. K nejstarším oborům patří geometrie a algebra.

”Čímpak vlastně jsi?” - ”Zeměměřičem.” - ”Copak je to?” K. to vysvětloval, ona z výkladu začala zívát.

(F.Kafka ~ 1925)

Jejich vzájemné prolínání, spolupráce a interakce se odehrává v oboru, který získal pojmenování matematická analýza.



Podle řeckého *analein* = rozbít, rozmlátit, rozštípat, zničit, otevřít, rozdělit, rozložit, zorat, rozrušit, kazit, rozesmát, vyvolat bouři smíchu

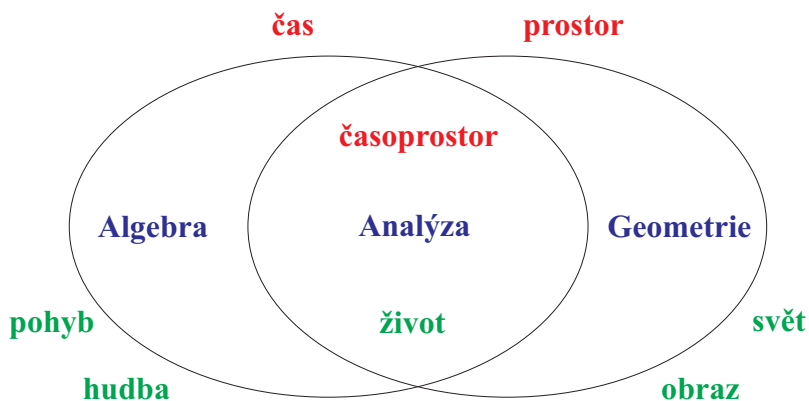
Schematicky můžeme zachytit vztahy geometrie, analýzy a algebry obrázkem, ve kterém připodobňujeme algebru času, pohybu či hudbě, geometrii prostoru, obrazu či světu a analýzu časoprostoru či životu.

Toto přirovnání se do určité míry snaží zachytit charakter daného oboru ...



Všechny obory se pořád mění, kdo se v tom má vyznat ...

Vždy jde o matematiku.



Obrázek 1.2.0: Vztah algebrы, analýzy a geometrie.



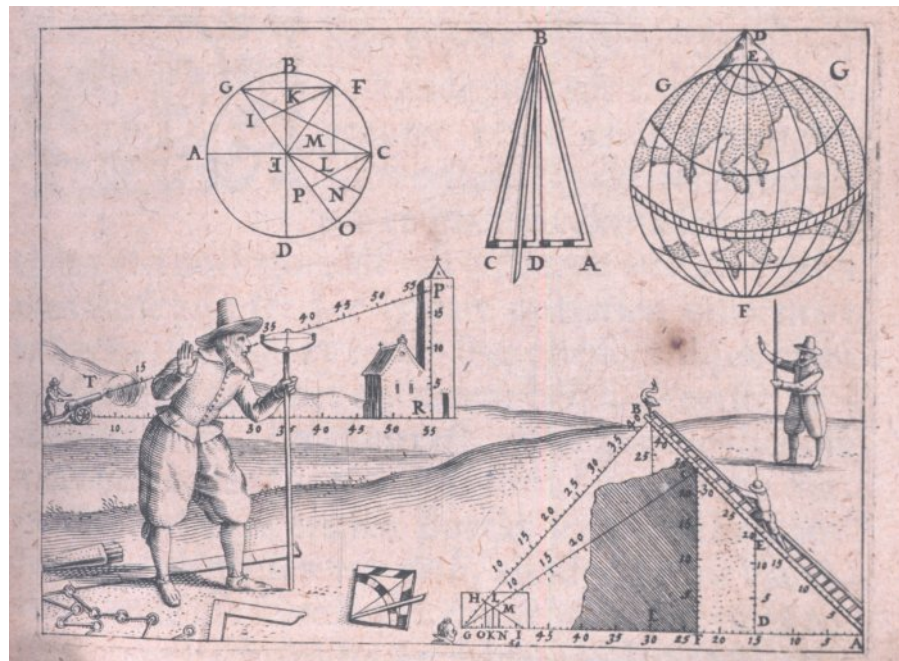
Matematika je v podstatě počítání jablek a hrušek. Algebra je to počítání, geometrie jsou ta jablka a hrušky.



Obrázek 1.2.0: Algebra je služkou geometrie.

... geometrie není ani tak odvětvím matematiky, jako spíše způsobem myšlení pronikajícím všemi odvětvími matematiky.

(M.F. Atiyah 1982)



Obrázek 1.2.0: Geometrie je služkou algebry.

Původně se geometrie zabývala rovinnými a prostorovými objekty. Její současná podoba je velice obecný a široký obor obvykle nazývaný topologie (podle řeckého slova topos = místo).

Starosta: "... ale my, bohužel, žádného zeměměřiče nepotřebujeme."

(F. Kafka ~ 1925)

Pro představu o současném rozsahu a oborech matematiky poslouží 2000 Mathematics Subject Classification, což je systém určený pro třídění recenzí matematických prací:

Obecné

00-xx Všeobecné

01-xx Historie a životopisy [viz též klasifikaci -03 v jiných sekcích]

Algebra

03-xx Matematická logika a základy

- 04-xx sekce zrušena [Pro teorii množin viz 03Exx]
 05-xx Kombinatorika [Pro konečná tělesa viz 11Txx]
 06-xx Uspořádání, svazy, uspořádané algebraické struktury [Viz též 18B35]
 08-xx Obecné algebraické systémy
 11-xx Teorie čísel
 12-xx Tělesa a polynomy
 13-xx Komutativní okruhy a algebry
 14-xx Algebraická geometrie
 15-xx Lineární a multilineární algebra; teorie matic
 16-xx Asociativní okruhy a algebry [Pro komutativní případ viz 13-xx]
 17-xx Neasociativní okruhy a algebry
 18-xx Teorie kategorií; homologická algebra [Pro komutativní okruhy viz 13Dxx, pro asociativní okruhy 16Exx, pro grupy 20Jxx, pro topologické grupy a příbuzné struktury 57Txx; viz též 55Nxx a 55Uxx pro algebraickou topologii]
 19-xx K -teorie [Viz též 16E20, 18F25]
 20-xx Teorie grup a zobecnění
 22-xx Topologické grupy, Lieovy grupy [Pro transformační grupy viz 54H15, 57Sxx, 58-xx. Pro abstraktní harmonickou analýzu viz 43-xx]

Analýza

- 26-xx Reálné funkce [Viz též 54C30]
 28-xx Míra a integrace [Pro analýzu na varietách viz 58-xx]
 30-xx Funkce komplexní proměnné [Pro analýzu na varietách 58-xx]
 31-xx Teorie potenciálu [Pro pravděpodobnostní teorii potenciálu 60J45]
 32-xx Více komplexních proměnných a analytické prostory [Pro nekonečně dimenzionální holomorfnost 46G20, 58B12]
 33-xx Speciální funkce (33-xx se zabývá vlastnostmi funkcí jako funkcí) [Pro ortogonální funkce viz 42Cxx; pro kombinatorické aspekty viz 05Axx; pro číselně-teoretické aspekty viz 11-xx; pro teorii reprezentací viz 22Exx]
 34-xx Obyčejné diferenciální rovnice
 35-xx Parciální diferenciální rovnice
 37-xx Dynamické systémy a ergodická teorie [Viz též 26A18, 28Dxx, 34Cxx, 34Dxx, 35Bxx, 46Lxx, 58Jxx, 70-xx]
 39-xx Diferenční a funkční rovnice
 40-xx Posloupnosti, řady, sčítatelnost
 41-xx Aproximace a rozvoje [Pro celou teorii aproximaci v komplexním oboru viz 30Exx, 30E05 a 30E10; pro celou trigonometrickou aproximaci a interpolaci viz 42Axx, 42A10 a 42A15; pro numerickou aproximaci viz 65Dxx]
 42-xx Fourierova analýza
 43-xx Abstraktní harmonická analýza [Pro další analýzu na topologických a Lieových grupách viz 22Exx]
 44-xx Integrované transformace, operační počet [Pro zlomkové derivace a integrály viz 26A33. Pro Fourierovu transformaci viz 42A38, 42B10. Pro integrované transformaci v prostorech distribucí viz 46F12. Pro numerické metody viz 65R10]
 45-xx Integrované rovnice

46-xx Functionální analýza [Pro variety modelované na topologických lineárních prostorech viz 57N20, 58Bxx]

47-xx Teorie operátorů

49-xx Variační počet a optimální kontrola; optimalizace [Viz též 34H05, 34K35, 65Kxx, 90Cxx, 93-xx]

Geometrie

51-xx Geometrie [Pro algebraickou geometrii viz 14-xx]

52-xx Konvexní a diskrétní geometrie

53-xx Diferenciální geometrie [Pro diferenciální topologii viz 57Rxx. Pro základní otázky diferencovatelných variet viz 58Axx]

54-xx Obecná topologie [Pro topologii na varietách ve všech dimenzích viz 57Nxx]

55-xx Algebraická topologie

57-xx Variety a buněčné komplexy [Pro komplexní variety viz 32Qxx]

58-xx Globální analýza, analýza na varietách [Viz též 32Cxx, 32Fxx, 32Wxx, 46-xx, 47Hxx, 53Cxx; pro geometrickou teorii integrace viz 49Q15]

Matematické obory se speciálním zaměřením a aplikace

60-xx Pravděpodobnost a stochastické procesy [Pro další aplikace viz 11Kxx, 62-xx, 90-xx, 91-xx, 92-xx, 93-xx, 94-xx]

62-xx Statistika

65-xx Numerická analýza

68-xx Informatika (Computer science) [Pro články používající strojové výpočty a programy ve speciálních matematických oborech viz sekci -04 v daném oboru]

70-xx Mechanika částic a systémů [Pro relativistickou mechaniku viz 83A05 a 83C10; pro statistickou mechaniku viz 82-xx]

73-xx sekce zrušena [Pro mechaniku pevných těles viz 74-xx]

74-xx Mechanika pružných těles

76-xx Mechanika tekutin [Pro obecnou mechaniku kontinua viz 74Axx, pro další části viz 74-xx]

78-xx Optika, elektromagnetická teorie [Pro kvantovou optiku viz 81V80]

80-xx Klasická termodynamika, přenos tepla [Pro termodynamiku pevných těles viz 74A15]

81-xx Kvantová teorie

82-xx Statistická mechanika, struktura hmoty

83-xx Relativita a gravitační teorie

85-xx Astronomie a astrofyzika [Pro celestiánskou mechaniku viz 70F15]

86-xx Geofyzika [Viz též 76U05, 76V05]

90-xx Operační výzkum, matematické programování

91-xx Teorie her, ekonomie, společenské vědy a vědy o chování

92-xx Biologie a další přírodní vědy

93-xx Teorie systémů; kontrola [Pro optimální kontrolu viz 49-xx]

94-xx Informace a komunikace, obvody

Vzdělávání

97-xx Matematické vzdělávání

Kapitola 2

Základy matematické analýzy



ato kapitola představí základní pojmy, se kterými pracuje matematická analýza. Budeme se zabývat výroky, množinami a číselnými obory. Budeme pracovat i s nekonečnými součty.

2.1 Výroky a množiny

2.1.1 Výroky

Výrok je tvrzení, u kterého má smysl zkoumat pravdivost. Každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý

(Aristotelés ze Stageiry ~ -350)

Tento **princip vyloučení třetího** se stal základním kamenem matematiky.



Obrázek 2.1.1: Co je a co není výrok je někdy problém ...

Otřásla s ním až zjištění, že v závislosti na přijatých axiomech mohou některá tvrzení být buď pravdivá, nepravdivá nebo nedokazatelná (například pátý geometrický axiom o tom, že daným bodem k dané přímce vede pouze jedna rovnoběžka).



Axiom je když ...

Axiom je to, co se bere za pravdu a nedokazuje se! Eukleidés řekl, že bod je to, co nemá délku ani šířku, přímka nemá šířku, má jen délku. Axiom je například, že každými dvěma body vede právě jedna přímka.

Axiomy tvoří základ každého matematického zkoumání. S jejich pomocí matematici vědí, že mluví o věcech se stejnými vlastnostmi. Každý si může zvolit svoji realizaci domluvených pojmů.

Musí být možné kdykoliv použít místo bodů, přímek a rovin například stoly, židle a džbánky s pivem.

(D.Hilbert ~ 1900)

2.1.2 Zacyklené vlastnosti

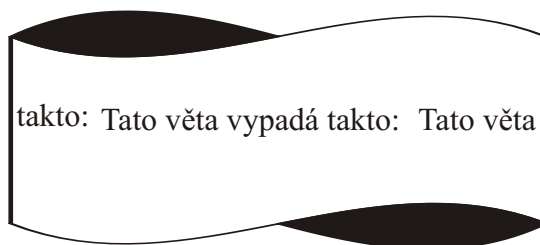
Při tomto jevu se zpravidla objekt odkazuje sám na sebe:

- ⇒ Kamera připojená k obrazovce, kterou sleduje.



Obrázek 2.1.2: Nekonečně mnoho elektronů v práci.

- ⇒ Součástí zakoupeného výrobku je poukázka na část dalšího výrobku.
- ⇒ "Tato věta vypadá takto: "Tato věta ..."
- ⇒ "Nejdůležitější v životě jsou dvě věci:
 1. Nikdy neříkej ostatním vše, co znáš."



Obrázek 2.1.2: Zacyklené tvrzení.

Jediné, co vím, je, že nic nevím.
(Sókratés ~ -410)

2.1.3 Paradox (O nejmenším obrovi)

Nejmenší přirozené číslo, které nejde vyjádřit méně než 1000 znaky jde vyjádřit 100 znaky.

(Berry)



Slovo "vyjádřit" nelze vyjádřit v češtině.
V každém případě jde o pěkně jemnou záležitost ;-)

2.1.4 Paradox (Můžeme věřit lháři?)

"Toto není pravda."

Lháři obvykle nevěříme, ani když mluví pravdu.
(Cicero)

Tato věta je pravdivá, právě tehdy, když není pravdivá. Vzhledem k principu vyloučení třetího se nejedná o výrok.

V matematice nerozumíte věcem. Jenom si na ně zvyknete.
(J.v.Neumann ~ 1940)

2.1.5 Věta (Nedefinovatelnost pravdy)

V jazyku teorie nelze mít zároveň zacyklený odkaz (např. "toto"), vyjádření negace (např. "není") a vyjádření pravdivosti (např. "pravda").

(A.Tarski)



Slovo "pravda" nelze vyjádřit v češtině.

2.1.6 Věta (Nerozhodnutelnost ve výrokovém počtu)

Neexistuje algoritmus, který by v konečně mnoha krocích rozhodl, zda daná aritmetická formule jde dokázat, nebo ne.

(Church 1936)

Důkaz: Ze symbolů $x, y, z, \dots, 0, 1, +, *, =, \neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \exists, \forall$. tvoříme aritmetické formule. Nechť existuje algoritmus, který pro zadanou aritmetickou formuli rozhodne, zda je pravdivá, nebo není. Předložíme mu vhodné tvrzení a odvodíme spor. ■

2.1.7 Naivní teorie množin

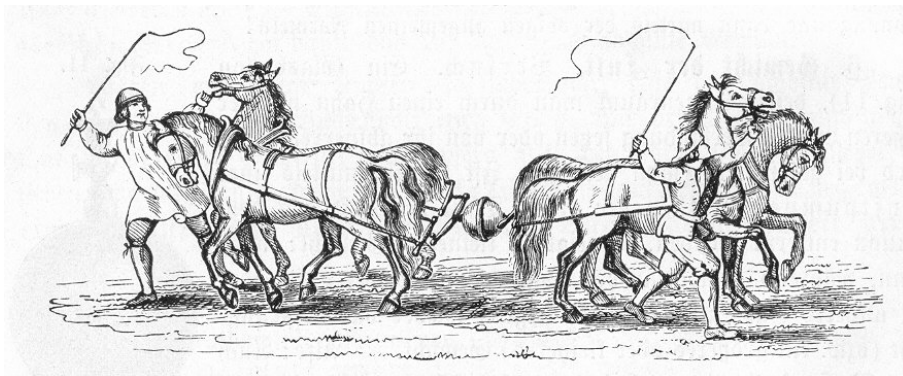
Soubor dobře definovaných a dobře rozlišitelných objektů se nazývá **množina**.

(G.Cantor 1873)

Každý objekt tohoto souboru nazýváme **prvek**. Množiny píšeme ve tvaru

$$M = \{x : x \text{ má vlastnost } \dots \} .$$

Nechť M, N a X jsou množiny. Množina bez prvků se nazývá **prázdná množina**, značíme \emptyset .



Obrázek 2.1.7: Praktická realizace prázdné množiny.

Říkáme, že M je **podmnožina** N , jestliže $x \in M$ implikuje $x \in N$. Zapisujeme to $M \subseteq N$. Říkáme, že M a N jsou rovny, jestliže $M \subseteq N$ a $N \subseteq M$, tedy jestliže M a N obsahují přesně stejné prvky. Píšeme $M = N$. Definujeme **průnik** M a N rovnicí $M \cap N = \{x : x \in M \text{ a } x \in N\}$. Definujeme **sjednocení** M a N vztahem $M \cup N = \{x : x \in M \text{ nebo } x \in N\}$. Jestliže $M \subseteq X$, definujeme **doplňěk** M v X vztahem $X \setminus M = \{x : x \in X \text{ a } x \notin M\}$. **Potenční množina** X se definuje vztahem $\mathcal{P}(X) = 2^X = \{M : M \subseteq X\}$. **Součin množin** M a N je množina $M \times N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}$, kde **uspořádaná dvojice** (m, n) se chápe takto $(m, n) = \{m, \{m, n\}\}$.

(Descartes)

Označujeme:

- \mathbb{N} = množina přirozených čísel
- \mathbb{Z} = množina celých čísel
- \mathbb{Q} = množina racionálních čísel
- \mathbb{R} = množina reálných čísel
- \mathbb{C} = množina komplexních čísel .

A poslední rybář dostal minus dvě ryby.

(P.A.M.Dirac ~ 1933)

Množinu $\{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ značíme (a, b) a nazýváme **otevřený interval**, $\{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ značíme $[a, b]$ a nazýváme **uzavřený interval**. Symbol \mathbb{I} značí interval $[0, 1]$.

2.1.8 Paradox (Kdo holí holiče?)

Uvažujme množinu A všech množin, které se neobsahují jako prvky. Přesněji

$$A = \{B : B \notin B\}$$

Vidíme, že pokud $A \in A$, musí mít A vlastnost, která je vyžadována ode všech prvků A , tedy $A \notin A$, pak ale zase musí být $A \in A$. Tedy nejsme schopni o množině A říci, zda patří do A , nebo ne.

(B.A.W.Russel 1918)



Tento paradox je paralelou problému holiče, který dostal za úkol holit všechny muže ve městě, kteří se neholí sami. Nechť $A = \{B : \text{muž } B \text{ se sám neholí}\}$, ...

2.1.9 Relace

Nechť X a Y jsou dvě množiny.

Relace mezi X a Y je každá podmnožina $X \times Y$. Relace $R \subseteq X \times X$ se nazývá

- **reflexivní**, jestliže $(x, x) \in R$ pro každé $x \in X$;
- **symetrická**, jestliže $(x, y) \in R$ implikuje $(y, x) \in R$;
- **antisymetrická**, jestliže $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$ implikuje $x = y$;
- **transitivní**, jestliže $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ implikuje $(x, z) \in R$.

Ekvivalence na množině X je symetrická, reflexivní a transitivní relace $R \subseteq X \times X$. Jestliže $x \in X$ a jestliže R je ekvivalence, pak $[x]_R = \{y \in X : (x, y) \in R\}$ se nazývá **třída ekvivalence** prvku x vzhledem k relaci R .



Já mám třídu ekvivalence jednoprvkovou.

2.1.10 Zobrazení

Zobrazení f z X do Y (značíme $f : X \rightarrow Y$) je relace $f \subseteq X \times Y$, která splňuje

- (i) Pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$.
- (ii) Jestliže $(x, y_1) \in f$ a $(x, y_2) \in f$, pak $y_1 = y_2$.



Zobrazení je vlastně pravidlo, které vzoru přiřadí obraz. Je to takový mlýnek.

Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $f(x) = y$.

Je-li $A \subset X$, množina $\{f(a) : a \in A\}$ se nazývá **obraz množiny** A , značí se $f(A)$. Je-li $B \subset Y$, množina $\{a : a \in X \text{ \& } f(a) \in B\}$ se nazývá **vzor množiny** B , značí se $f^{-1}(B)$. Je-li $f(X) = Y$, říkáme, že zobrazení je **na** množinu Y . Mají-li různé prvky z X různé obrazy v Y , říkáme, že zobrazení je **prosté**, neboli **injektivní**. Prosté zobrazení z X na Y se nazývá **bijekce**, nebo **bijektivní** či **vzájemně jednoznačné**.

Je-li zobrazení $f : X \rightarrow Y$ prosté, definujeme **inverzní zobrazení** $f^{-1} : Y \rightarrow X$ jako relaci $f^{-1} \subseteq Y \times X$, která splňuje

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}.$$

Je-li zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a $g : Y \rightarrow Z$, definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : X \rightarrow Z$ jako relaci která splňuje

$$(x, z) \in g \circ f \iff (x, y) \in f \text{ \& } (y, z) \in g.$$

Je-li zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a $A \subset X$, definujeme **zúžení zobrazení** $f \upharpoonright A : A \rightarrow Y$ jako relaci $f \cap A \times Y$.

Zobrazení $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ nazýváme **posloupnost** prvků množiny X a značí se $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

2.1.11 Uspořádání

Částečné uspořádání na množině X je antisymetrická, reflexivní a transitivní relace $R \subseteq X \times X$. Jestliže $(x, y) \in R$, píšeme $x \leq y$. Tedy platí

- (i) $x \leq x$ pro všechny $x \in X$.
- (ii) $x \leq y$ a $y \leq x$ implikuje $x = y$ pro všechny $x, y \in X$.
- (iii) Jestliže $x \leq y$ a $y \leq z$, pak $x \leq z$ pro všechny $x, y, z \in X$.

Říkáme, že (X, \leq) je **částečně uspořádaná množina**. Platí-li navíc, že pro každé dva prvky platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$, mluvíme o **uspořádání**, množině říkáme **uspořádaná množina**. Říkáme, že uspořádaná množina (X, \leq) je **dobře uspořádaná množina**, když má každá neprázdná podmnožina X nejmenší prvek.



Dobře :-)

2.1.12 Definice (Ordinální čísla)

Řekneme, že množina X je **ordinální číslo**, když

- (i) Každý prvek množiny X je zároveň podmnožinou množiny X .
- (ii) Relace "býti prvkem" je dobré (ostré) uspořádání množiny X .

Ordinální čísla označujeme $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, \dots , $n + 1 = \{0, 1, \dots, n\}$, \dots , $\omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$, $\omega + 1 = \{0, 1, \dots, n, \dots, \omega\}$. Ordinální čísla seřadíme do jedné linie inkluzí:

$$0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \dots$$

2.1.13 Paradox (O největším ordinálním čísle)

Množina všech ordinálních čísel má dobré uspořádání, tedy je svým prvkem, což není možné.

(C.Burali-Forti 1897)

2.1.14 Transfinitní indukce

Nechť je dána dobře upořádaná množina X a nechť $P(x)$ je tvrzení, které má smysl pro každý prvek $x \in X$. Jestliže

- (i) P platí pro nejmenší prvek množiny X .
- (ii) Platí-li tvrzení $P(x)$ pro všechny prvky $x < y$, pak platí $P(y)$.

pak platí $P(x)$ pro každé $x \in X$.

2.1.15 Paradox (Žádný strom neroste do nebe)

Pro každé přirozené číslo m definujeme následující posloupnost:

$m_2 =$ číslo m vyjádřené úplně v mocninách čísla 2.

$m_3 =$ číslo, které získáme z m_2 nahrazením čísla 2 číslem 3 a odečtením jedničky od výsledku, vyjádřené úplně v mocninách čísla 3.

...

$m_{n+1} =$ číslo, které získáme z m_n nahrazením čísla n číslem $n + 1$ a odečtením jedničky od výsledku, vyjádřené úplně v mocninách čísla $n + 1$.

Například pro $m = 29$ dostaneme

$$m_2 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$

$$m_3 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$

$$m_4 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3$$

$$m_5 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2$$

S použitím tranfinitní indukce pro každé m existuje index n takový, že $m_n = 0$.

(R.L.Golgstein 1944)



Já to říkal předem.

V **axiomatice aritmetice** přirozených čísel (s obyčejnou indukcí) nejde výše uvedený výsledek dokázat. Tedy se jedná v axiomatice aritmetice o nerozhodnutelné tvrzení, které je dokazatelné v širším axiomatickém systému.

(L.Kirby a J.Paris 1982)



Já si to myslel, ale schválně jsem to neřekl.

2.1.16 Velikost množin

Otázka, jak zkoumat velikost nekonečných množin, byla otázkou prvořadě důležitosti. Množina \mathbb{N} všech přirozených čísel byla nejjednodušší nekonečnou množinou. Takto "veliká" množina (která jde "očíslovat", seřadit do posloupnosti) se nazývá **spočetná množina**. Jak zvládnout množiny "větší" je problém, který není dosud zcela vyřešen.

2.1.17 Paradox (O diagonální posloupnosti)

Uvažujme množinu P všech posloupností nul a jedniček, které jdou definovat pomocí konečně mnoha českých slov. Tato množina je spočetná. Seřadíme si množinu P do posloupnosti $\{p_n\}$. Definujeme nyní další posloupnost p takto: "Posloupnost p se na n -tém místě liší od n -tého místa posloupnosti d_n o jedničku." Tato posloupnost p je definována pomocí konečně mnoha slov a proto leží (a zároveň neleží) v P .

(J.Richard 1905)



Takže existuje člověk, který není nikomu podobný?

2.1.18 Definice (Mohutnost množin)

Pokud existuje prosté zobrazení X do Y , píšeme $X \preceq Y$. Dvě množiny X a Y mají stejnou **mohutnost**, nebo též **kardinální číslo**, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny X na množinu Y , píšeme $X \approx Y$. Relace \approx je ekvivalence na množinách, třídu ekvivalence \approx nazveme **kardinální číslo**. Kardinální číslo množiny \mathbb{N} (a všech spočetných množin) označujeme \aleph_0 (čte se "alef nula").

(G.Cantor 1873)

2.1.19 Věta (O mohutnostech)

Jestliže $A \preceq B$ a $B \preceq A$, pak $A \approx B$.

(G.Cantor 1899, E.Schröder, Bernstein)

Důkaz: Můžeme předpokládat, že B je podmnožinou A (místo B lze použít příslušný obraz). Označme g prosté zobrazení A do B a položme $C = A \setminus B$.

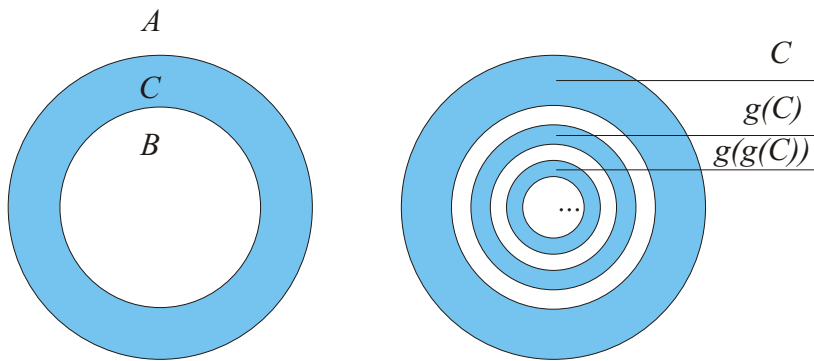
Hledané vzájemně jednoznačné zobrazení z A na B budeme definovat jako g na množině $C \cup g(C) \cup g(g(C)) \cup \dots$ a jako identitu jinde. ■

2.1.20 Věta (O potenci)

Pro žádnou množinu neexistuje vzájemně jednoznačné zobrazení X a $\mathcal{P}(X)$.

(G.Cantor 1899)

Důkaz: Necht' $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je bijekce. Necht' $Y = \{x \in X : x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}$. Označme $y = g^{-1}(Y) \in X$. Pak $y \in Y \iff y \notin g(y) \iff y \notin Y$ vytváří spor (tudíž bijekce g neexistuje). ■

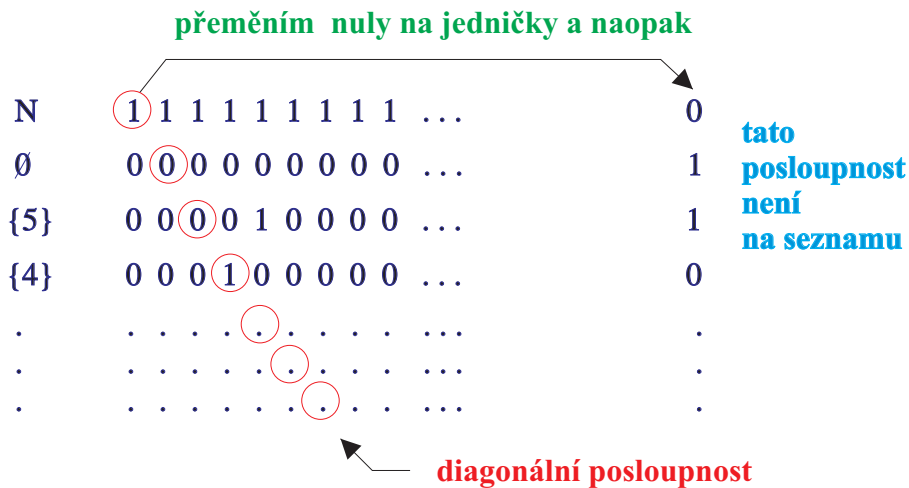


Obrázek 2.1.19: Věta o mohutnostech.

Výsledkem myšlení nemá být pocit,
ale čin.
(V.v.Gogh)

Věta mimojiné tvrdí, že pomocí prvků množiny nemůžeme očíslovat její podmnožiny. Postup použitý v důkazu se nazývá **diagonalizace**.

Například podmnožiny přirozených čísel odpovídají posloupnostem nul a jedniček. Pokud by se podařilo seřadit tyto posloupnosti do jedné posloupnosti ("seznamu") posloupností, můžeme vytvořit novou posloupnost modifikací "diagonální posloupnosti". Takto vytvořená posloupnost není na "seznamu".



Obrázek 2.1.20: Diagonální posloupnost.

Podobně můžeme dokázat, že některých objektů je více než spočetně. Metodou diagonalizace jde často sestavit nový objekt, který není na "seznamu".

2.1.21 Paradox (O potenci největší množiny)

Množina všech množin X a její potenční množina $\mathcal{P}(X)$ mají (a nemohou mít díky větě o potenci) stejnou mohutnost.

(G.Cantor 1899)



Uvnitř zeměkoule měla prý být ještě jedna větší ...

2.1.22 Definice (Upravená definice množiny)

Základní schéma

$$M = \{x : x \text{ má vlastnost } \dots \}$$

v naivní teorii množin nahradíme konstrukcí:

Nechť X je množina. Pak $M = \{x : x \in X \ \& \ x \text{ má vlastnost } \dots \}$ je také množina.

(A.Zermelo 1904)

2.1.23 Axiomatická teorie množin

Základní linií, která se táhne celou axiomatickou teorií množin je usilovná snaha neudělat podobnou chybu jako naivní teorie množin. Proto jsou přesně stanovena pravidla "povolených činností". Množinou je prázdná množina \emptyset , množina $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin dané množiny X je též množina. Obecně pro to, abychom o něčem tvrdili, že je to množina, potřebujeme vždy nějaký axiom. Objekty, které jsou příliš veliké, například soubor všech množin, se nazývají **třída**.

Axiomatický systém teorie množin nazýváme **TEMNO**. Tuto teorii popíšeme v následujících paragrafech.

(A.Zermelo a A.A.Fraenkel 1908)

2.1.24 Jazyk axiomatické teorie množin

Jazyk L teorie množin se skládá ze symbolů x, y, z, \dots pro proměnné, binární relace \in (čteme **je prvek**), logické symboly $\&, \neg$ (čteme **a zároveň, neplatí**), kvantifikátor $\exists x$ (čteme **existuje x takové, že**), znak rovnosti $=$, závorky $(\)$. Pro proměnné x a y a formule α a β jsou formulemi též $x = y, x \in y, \alpha \& \beta, \neg \alpha$ a $\exists x \alpha$.

Rozšíříme jazyk o známé výrazy

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta &= \neg((\neg\alpha) \& \neg(\beta)) \\ \alpha \Rightarrow \beta &= ((\neg\alpha) \vee \beta) \\ \alpha \iff \beta &= (\alpha \Rightarrow \beta) \& (\beta \Rightarrow \alpha) \\ \forall x \alpha &= \neg \exists x (\neg\alpha) \end{aligned}$$

a čteme **nebo**, **implikuje**, **právě tehdy** a **pro každé** x Podobně $\exists!$ znamená **existuje právě jeden**.

Myslím, tudíž jsem.

(R.Descartes 1637)

Přidáme základní pravidla výrokového počtu

- (i) $\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$
- (ii) $[\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \chi)]$
- (iii) $(\neg\phi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$ (**důkaz sporem**)
- (iv) $(\phi \& \psi) \Rightarrow \phi$ a $(\psi \& \phi) \Rightarrow \phi$
- (v) $\phi \Rightarrow (\phi \vee \psi)$ a $\psi \Rightarrow (\phi \vee \psi)$
- (vi) $[\chi \Rightarrow \phi] \Rightarrow [(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow [\phi \& \psi])]$
- (vii) $[\phi \Rightarrow \chi] \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ([\phi \vee \psi] \Rightarrow \chi)]$

a pravidla pro rovnost

- (i) $x = x$
- (ii) $(x = y) \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$
- (iii) $(x = y) \Rightarrow ((x \in z) \Rightarrow y \in z)$
- (iv) $(x = y) \Rightarrow ((z \in x) \Rightarrow z \in y)$.

Nakonec pravidla odvozování:

- (i) ψ is vyplývá z ϕ a $\phi \Rightarrow \psi$. ("Modus Ponens")
- (ii) $(\forall x \phi) \Rightarrow \psi$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$.
- (iii) $\phi \Rightarrow (\exists x \psi)$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$.
- (iv) $\phi \Rightarrow (\forall x \psi)$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$, kde x není volná proměnná v ϕ .
- (v) $(\exists x \phi) \Rightarrow \psi$ vyplývá z $\phi \Rightarrow \psi$, kde x není volná proměnná v ψ .

2.1.25 Axiomy teorie množin (TEMNO)

Teorii množin nazývanou **TEMNO** tvoří následujících 9 axiomů:

- (i) Axiom existence množin: $\exists x \forall y (\neg (y \in x))$
Existuje množina bez prvků.
- (ii) Axiom extenzionality: $\forall x \forall y (x = y \iff \forall z (z \in x \iff z \in y))$
Dvě množiny jsou rovny právě když mají stejné prvky.
- (iii) Axiom dvojice: $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \iff (w = x \vee w = y))$
Pro dvě množiny x a y existuje množina mající za prvky právě tyto množiny.
- (iv) Schéma axiomů vydělení: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff (z \in x \ \& \ \phi(z)))$
kde $\phi(z)$ je formule jazyka \mathcal{L} s volnou proměnnou z .
- (v) Axiom potence: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \subseteq x)$
Pro každou množinu x existuje množina všech podmnožin x .
- (vi) Axiom sjednocení: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff \exists w (z \in w \ \& \ w \in x))$
Pro každou množinu x existuje množina která je sjednocením prvků x .
- (vii) Axiom nekonečna: $\exists x (\emptyset \in x \ \& \ \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
Existuje **induktivní množina**.
- (viii) Schéma axiomů nahrazení: $\forall x \exists y \forall y' (y' \in y \iff \exists x' (x' \in x \ \& \ \phi(x', y')))$
kde $\phi(s, t)$ je formule taková, že $\forall s \exists t (\phi(s, t) \ \& \ \forall t' (\phi(s, t') \Rightarrow t' = t))$.
- (ix) Axiom fundovanosti: $x = \emptyset \vee \forall x \exists y (y \in x \ \& \ x \cap y = \emptyset)$
Každá množina je fundovaná, tedy obsahuje \in -minimální prvek.

Použili jsme i symboly mimo \mathcal{L} , např. $\subseteq, \emptyset, x \cup y, x \cap y, \{y\}$ se zřejmým významem.

Nechť \mathcal{S} je relační struktura pro jazyk \mathcal{L} splňující devět uvedených axiomů. Objektu náležejícímu do \mathcal{S} říkáme **množina**. Jestliže $x \in y$ platí pro množiny x a y , říkáme, že x je prvek y .

(A. Zermelo a A.A.Fraenkel 1908)

2.1.26 Axiom výběru (AC, axiom of choice)

Pro libovolný systém neprázdných množin existuje množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny zadaného systému.

(A.Zermelo 1904)



V každé množině mám svého informátora, jejich seznam se mi nepodařilo sepsat ...

AC má řadu důležitých důsledků a je řadou matematiků považován za součást teorie množin. Teorie **TEMNO** spolu s **AC** se nazývá **TEMNO + AC** a je běžně používána v různých partiích matematiky.

Pravidla "povolených činností" v teorii množin neposkytovala automaticky možnost některých zdánlivě samozřejmých operací. Existence množiny, která obsahuje po jednom prvku z předem zadaných množin, se stala zatěžkávací zkouškou teorie množin. Na první pohled se tato existence zdála samozřejmá, její axiomatizace v podobě axiomu výběru však přinesla mnohé těžkosti (existence neměřitelných množin a další paradoxy v teorii míry).



Já mu věřím, i když se mi nepovedl ten seznam ...

2.1.27 Paradox (O shodných množinách na sféře s AC)

S pomocí axiomu výběru lze povrch jednotkové koule rozdělit na disjunktní sjednocení $A \cup B \cup C \cup D$, kde D je spočetná množina a množiny A , B , C a $B \cup C$ jsou shodné.

(F.Hausdorff ~ 1930)



Koupím si z pozlacené koule díl B , ten je stejně velký jako $B \cup C$, tak si odloupnu C a vrátím B . Tady bych se asi mohl snadno napakovat ...

2.1.28 Paradox (O dvou koulích s AC)

Jednotková koule v prostoru jde rozdělit na 5 identických částí, ze dvou z nich jde opět sestavit jednotková koule, ze zbývajících tří také.

(S.Banach a A.Tarski ~ 1925)

"Všechno," řekl K. - zvykl si na to vyčítání a vzpamatoval se - "všechno, co říkáš, je v jistém smyslu správné; není to nepravdivé, jen je to nepřátelské."

(F.Kafka ~ 1925)



Paradox je šílený. Představa, že hmota by šla zdvojit, je lákavá. Nicméně jde o množinovou věc. Kdyby se to odehrávalo v celém prostoru, vůbec by to nepřekvapilo. Ty kousky by byly nekonečně veliké a o nic by nešlo.

2.1.29 Ekvivalentní formulace AC

Každý vektorový prostor má bázi.

Součin neprázdných množin je neprázdný.

Každé dvě kardinální čísla jsou srovnatelná.

Každá neprázdna částečně uspořádaná množina M , ve které každý řetěz má suprémum, má maximální prvek.

(Zorn)

Axiom dobrého uspořádání (WO): Každá množina lze dobře uspořádat.

(Zermelo 1904)



Dobře uspořádat se asi nerovná uklidit
...

2.1.30 Důsledky AC

Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.

Nekonečná množina má spočetnou podmnožinu.

Reálná čísla nejsou spočetně sjednocení řídkých množin.

(R.L.Baire ~ 1920)

2.1.31 Slabší verze AC

Axiom závislého výběru (DC) : Necht v neprázdné množině má každý prvek alespoň jeden prvek, který mu něco "dluží". Pak je možné najít nekonečnou posloupnost "zřetězených" dlužníků.

Axiom spočetného výběru (CC) : Pro libovolný spočetný systém neprázdných množin existuje množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny zadaného systému.

2.1.32 Věta (Mohutnost množiny reálných čísel)

Mohutnost množiny \mathbb{R} se označuje \mathfrak{c} a platí $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

(G.Cantor 1899)

Důkaz: Podmnožiny přirozených čísel odpovídají posloupnostem nul a jedniček, tyto posloupnosti pak ve dvojkovém zápisu odpovídají reálným číslům. ■

2.1.33 Hypotéza kontinua (CH, continuum hypothesis)

Každá nekonečná podmnožina \mathbb{R} má stejnou mohutnost jako \mathbb{R} nebo jako \mathbb{N} .

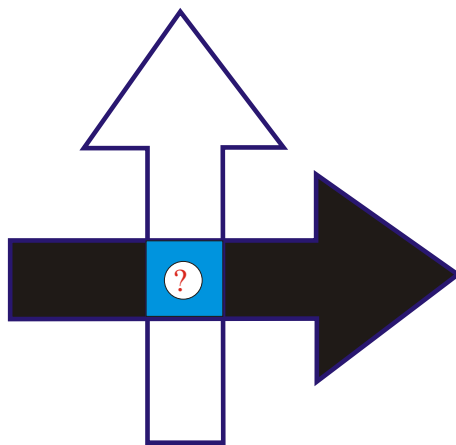
(G.Cantor 1878)



Hypotézu kontinua uvedl D. Hilbert v roce 1900 na seznam důležitých matematických problémů na první místo. Jde o rovnost $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, kde \aleph_1 označuje nejmenší nespočetné kardinální číslo.

2.1.34 Černobílá rovina s CH (Pro optimisty i pesimisty)

S pomocí **CH** je možné obarvit rovinu dvěma barvami, černou a bílou, tak, že každá vodorovná přímka bude černá, až na spočetně mnoho bílých bodů a že každá svislá přímka bude bílá, až na spočetně mnoho černých bodů.



Obrázek 2.1.34: Neměřitelná množina s divnými řezy.

(W.Sierpiński)

2.1.35 Zobecněná hypotéza kontinua (GCH)

Pro žádný nekonečný kardinál m neexistuje kardinál n splňující $m < n < 2^m$

(G.Cantor 1899)

Z GCH plyne AC.

2.1.36 Definice (Malý kardinál)

Označíme \mathfrak{d} takové kardinální číslo, že množina iracionálních čísel lze pokrýt \mathfrak{d} kompaktními podmnožinami iracionálních čísel, ale ne méně než \mathfrak{d} .

(F.Rothenberg 1939)



Sezvěme všechny kardinály a pak najdeme ty malé, pak mezi nimi ...

2.1.37 Definice (Velké kardinály)

Každé kardinální číslo má svého bezprostředního následovníka, nejmenší kardinální číslo, které je větší. Říkáme, že kardinální číslo je **limitní kardinální číslo**, pokud nemá svého předchůdce.

Říkáme, že kardinální číslo je **silně limitní kardinální číslo**, pokud je větší než velikost potenční množiny každého menšího kardinálu.

Je definována řada dalších "velkých" kardinálních čísel, které mohou a nemusí existovat v teorii množin. Jejich existence bývá přidávána k teorii množin jako další axiom. Uvedeme názvy některých takových kardinálních čísel:

slabě nedosažitelný \leq silně nedosažitelný \leq slabě kompaktní \leq subtilní \leq nevýslovný \leq měřitelný \leq silně kompaktní \leq superkompaktní \leq obří .



A jeden kardinál je můj, na ten mi nešahejte!

2.1.38 Definice (Konstruovatelné množiny)

Označíme V třídu všech množin.

Označíme L třídu všech množin, které získáme transfinitní indukcí z prázdné množiny, pokud v každém kroku použijeme pouze "konečné konstrukce" (vynecháváme nyní detaily těchto konstrukcí, nepoužijeme např. možnost vytvoření potenčních množin) z množin předcházejících kroků. Říkáme, že L je **třída konstruovatelných množin** a její prvek nazýváme **konstruovatelná množina**.

Tvrzení $V = L$ se nazývá **axiom konstruovatelnosti**. Rozšíření teorie množin **TEMNO** o tento axiom se nazývá **TEMNO + V = L**.

(K.Gödel 1938)

2.1.39 Nekonečné hry

Je dána podmnožina M reálné osy. Dva hráči střídavě určují cifry desetinného rozvoje společně vytvářeného reálného čísla x . Hráč A vyhraje, pokud bude $x \in M$, jinak vyhraje hráč B. Množina A se nazývá **determinovaná množina**, pokud má alespoň jeden hráč vyhrávající strategii.

(H.Steinhaus 1925)



Například množina iracionálních čísel má vyhrávající strategii pro hráče A vytvářením neperiodické posloupnosti.

2.1.40 Axiom determinovanosti (AD)

Každá množina reálných čísel je determinovaná.

(H.Steinhaus a J.Mycielski 1962)



Mezi důsledky axiomu determinovanosti patří měřitelnost všech podmnožin reálných čísel.

2.1.41 Konzistence teorie množin

Konzistence dané teorie znamená, že v ní nelze dokázat zároveň tvrzení i jeho negaci.



Jsou axiomy teorie množin v pořádku? Je teorie množin bezesporná? Mají (nebo mohou) se přidávat další axiomy? Těmito problémy se zabývala celá řada matematiků.

2.1.42 Věta o konzistenci s CH

Přidáním CH do TEMNO (+ AC) neporušíme případnou konzistenci.

(K.Gödel 1931)

2.1.43 Věta o konzistenci s negací CH

Přidáním $\neg \text{CH}$ do **TEMNO** (+ **AC**) neporušíme případnou konzistenci.

(P.Cohen 1963)

Bůh existuje, protože je matematika konzistentní, a Ďábel existuje, protože to nemůžeme dokázat.

(A.Weil ~ 1970)

Důkaz: Vycházíme ze základní teorie a přidáme nové tvrzení. Zde použijeme existenci \aleph_2 různých podmnožin \aleph_0 a vytvoříme rozšíření **TEMNO**, kde neplatí **CH**. ■



Metoda důkazu se nazývá **forsing**. Principem je postup podobný tomu, když se k reálným číslům přidají kořeny rovnice $x^2 + 1 = 0$ a najde se nejmenší nadtěleso reálných čísel, v němž je rovnice řešitelná.

2.1.44 Věta (Existuje nedokazatelná pravda)

Pro každý konzistentní axiomatický systém Σ teorie množin existuje pravdivé tvrzení nedokazatelné v Σ .

(K.Gödel 1931)

Nevěřím přírodním vědám.

(K.Gödel ~ 1930)

Důkaz: Nechť \mathcal{D} označuje množinu čísel, která kódují dokazatelná tvrzení (například převedením textu důkazu do počítače získáme jednoznačný číselný zápis textu). Označíme tento kód tvrzení d zápisem $\langle d \rangle$.

Tedy $\langle d \rangle \in \mathcal{D}$ právě tehdy, když je d dokazatelné.

Označme q větu "Tato věta je nedokazatelná." Tedy

$$q \iff \langle q \rangle \notin \mathcal{D} \iff q \text{ je nedokazatelné .}$$

Pokud je q nepravda, pak je q dokazatelné, což není možné, protože v konzistentním systému jdou dokázat pouze pravdivá tvrzení. Tedy je q pravdivé. Tedy je nedokazatelné. Tedy jsme našli pravdivé a nedokazatelné tvrzení. ■

Místo věty "Tato věta je nedokazatelná" je možné najít i jiná tvrzení, která jsou pravdivá a nedokazatelná. Například existuje celočíselný polynom P takový, že tvrzení "Polynom P nemá celočíselné řešení" je pravdivé, ale nedokazatelné.

Důležitou součástí důkazu je **diagonalizace**: Pro relaci $R(x, y)$ definujeme výrok $V(x) = \neg R(x, x)$, pak V není roven žádnému výroku R_x definovanému $R_x(y) \iff R(x, y)$, protože V nasouhlasí s R_x v x .

2.1.45 Věta (Nedokazatelnost vlastní konzistence)

Je-li Σ konzistentní a dostatečně bohatý axiomatický systém teorie množin, pak v Σ nelze dokázat konzistenci Σ .

(K.Gödel 1931)

Důkaz: Jde totiž dokázat, že tvrzení: "Tato věta je nedokazatelná." a tvrzení: "Neexistuje $\langle r \rangle$ takové, že $\langle r \rangle$ a zároveň $\langle \neg r \rangle$ jsou v \mathcal{D} ." vyjadřující konzistenci Σ jsou ekvivalentní. Tedy podle předchozí věty je důkaz hotov. ■



Když budu dost bohatý, budu klidně dokazovat cokoliv ...

2.1.46 Nová axiomatika na obzoru?

Jaká axiomatika je ta nejlepší? Je to možná axiomatika

$$\text{TEMNO} + \neg\text{AC} + \text{CC} + \neg\text{CH} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2 + \text{AD} + \dots$$

nebo zcela jiná? Podaří se sestavit axiomatický systém, aby nedokazatelná zůstala pouze tvrzení typu: "Tato věta je nedokazatelná."?

2.2 Oblíbená říkadla v matematické analýze

2.2.1 Základní ukolébavka

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

(A.L.Cauchy a B.Bolzano 1821)

Tvrzení podobná tomuto jsou v matematické analýze nejčastější. Zde uvedené tvrzení vyjadřuje spojitost funkce f v bodě x_0 .



... a je to tady :-)
Pokusíme se taková říkadla zvládnout s úsměvem :-)

2.2.2 Velký Kvantifikátor si toho navymýšlí ...

Velký Kvantifikátor \forall je formulka, která donutí všechny další výroky v řadě za ním (t.j. nás) sloužit do roztrhání těla. Musí být totiž ochotni ke každému objektu, který jim Velký Kvantifikátor předloží, dokázat zbytek tvrzení.

Ve skutečnosti se vlastně dokazuje zbytek tvrzení s "parametry", které předloží Velký Kvantifikátor.



Zbytek tvrzení (t.j. my) musí mít nutně pocit, že si Velký Kvantifikátor příliš vymýšlí :-)

Věta : "Ka každému vejci existuje slepice, která ho snesla."

Důkaz: Velký Kvantifikátor nachystá vejce, a zbytek tvrzení (my) musí hledat tu šikovnou slepici, která ho snesla. Tak se můžeme bavit do nekonečna Pokud ovšem zbytek tvrzení nejde dokázat přímo, například sporem: kdyby žádná slepice nebyla, tak by to vejce neexistovalo, spor. ■

Testem prvotřídní inteligence je schopnost pojmout dvě protichůdné myšlenky a zachovat si funkčnost.
(F.S.Fitzgerald)

2.2.3 Malý Kvantifikátor dává hádanky ...

Malý Kvantifikátor \exists je formulka, která (nás) donutí hledat odpověď na hádanku, která spočívá v platnosti dalších výroků v řadě za Malým Kvantifikátorem.

Musíme být šikovní a najít, v čem hádanka spočívá.



... a pokud je hádanka pěkná, máme pak radost :-)

Věta : "Existuje slepice, která snesla alespoň dvě vejce."

Důkaz: Malý Kvantifikátor nám zadal hádanku, my budeme buď hledat konkrétní superslepici, nebo můžeme spočítat vejce a slepice, pokud je počet vajec větší, máme existenční důkaz hotov. ■

Často zadrží kance nepříliš veliký pes.
(Ovidius)

2.2.4 Třikrát a dost !

Tři kvantifikátory již vyžadují velikou pozornost.



Obrázek 2.2.4: Jak nás kvantifikátory provází životem.

Vyšší počet kvantifikátorů než 3 již nezvyšuje náročnost.



P O Z O R !!!

Pro pochopení dalších věcí je třeba zvládnout bezpečně úlohy se třemi kvantifikátory. Těžko na cvičišti, lehký na bojišti :-)

2.2.5 Cvičíte se třemi kvantifikátory

$\forall \exists \forall$: Každý den existuje okamžik, že kdykoliv později bude již většina toho dne v tahu.



Oběd ničím nenahradíš.

Nalezněte příklady na dalších 7 možnostech. Všimněte si, že pořadí kvantifikátorů je důležité!

Člověk se nenaučí dělat matematiku **posloucháním** vybroušených výkladů při vyučovacích hodinách, nýbrž **samostatnou prací** s matematickými pojmy.

(G.Choquet ~ 1990)

2.2.6 Bojiště s

$$[(\exists x \in M) \& (\exists y \forall x (x \in M \Rightarrow x \leq y))] \Rightarrow [\exists z \forall y (\forall x (x \in M \Rightarrow x \leq y) \Leftrightarrow z \leq y)].$$



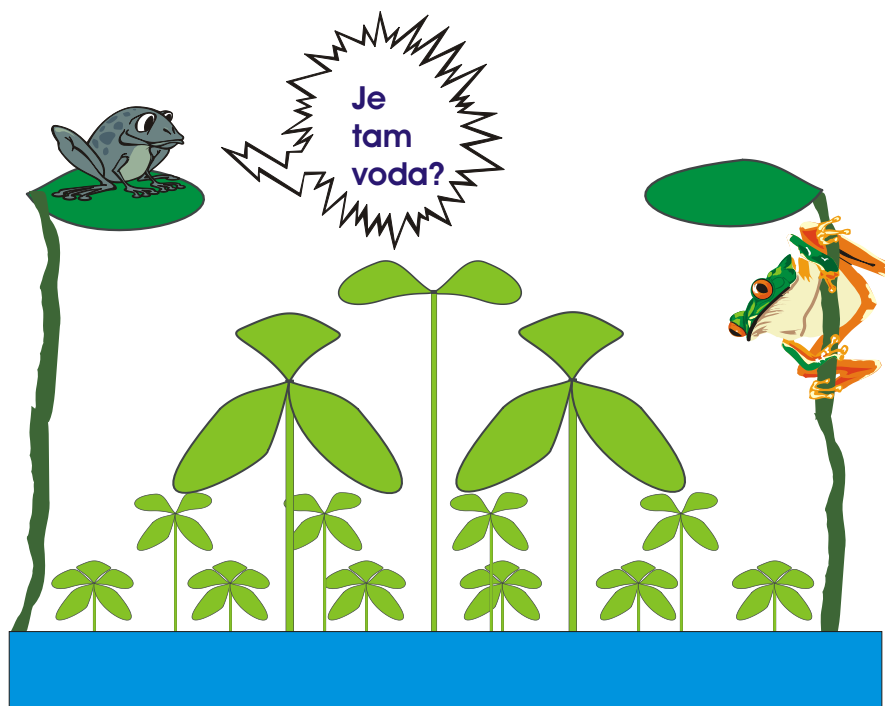
Podářilo se rozluštit? To dovede i ta nejmenší kupka sena.

2.2.7 Další záludnosti již nejsou ...

Důkazová technika v matematické analýze používá běžný výrokový počet (implikace, důkaz sporem, matematickou indukci, ...).

2.3 Reálná čísla

Představme si rybníček, ve kterém přes léto vyrašily všechny možné n -lístky, každý druh v konečném počtu exemplářů. Zbyla tam ještě nějaká voda?



Obrázek 2.3.0: Je tam kromě rostlinek i voda?

Při ideálně tenkých stoncích jistě ano.



Toto je podstata reálných čísel. Mezi racionálními čísly (rostlinky) je ještě spousta iracionálních čísel (vody).



Obrázek 2.3.0: Ano, jen ji najít.

2.3.1 Konstrukce racionálních čísel

Konstrukce racionálních čísel je příkladem na třídy ekvivalence pro vhodnou relaci. Relace \approx na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ se definuje vztahem $(a, b) \approx (c, d)$ právě tehdy, když $ad = bc$. Vlastně to znamená, že platí pro "zlomky" následující rovnost

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

zde ovšem ještě neumíme říci, co je dělení dvou celých čísel.

Hubička je nic dělené dvěma.

(anonym)

Třída ekvivalence podle této relace příslušná pro danou dvojici je tvořena všemi dvojicemi, které dávají při naznačeném "dělení" stejný výsledek. Třídou ekvivalence nazveme **racionální číslo**. S těmito třídami musíme umět počítat, definujeme tedy operace s těmito třídami tak, že počítáme s vybraným zástupcem každé třídy (ukáže se, že výsledek nezávisí na výběru prvku) a výsledek zase určí třídu, odpovídající výsledku. Nakonec se identifikují "stará" přirozená čísla n s třídou $[(n, 1)]$, ponechá se značení a najdou se na číselné ose racionální čísla (jejich obrazy).

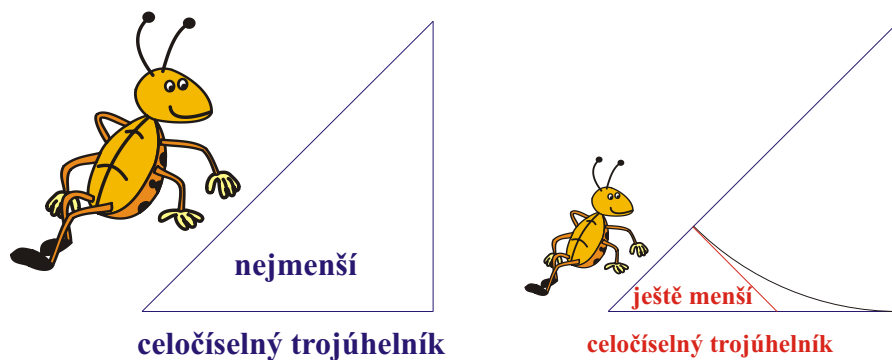


... a jede se dál :-)

Tato metoda je důležitá i v jiných situacích.

2.3.2 Věta ($\sqrt{2}$ není racionální - geometrický důkaz)

$\sqrt{2}$ odpovídá velikosti přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s jednotkovými odvěsnami. Je-li $\sqrt{2}$ racionální, pak existuje podobný trojúhelník s celočíselnými stranami. V nejmenším takovém celočíselném (q, q, p) najdeme menší celočíselný $(p-q, p-q, 2q-p)$, což je spor.



Obrázek 2.3.2: Nejmenší celočíselný nenajdeme.

(T.M.Apostol)

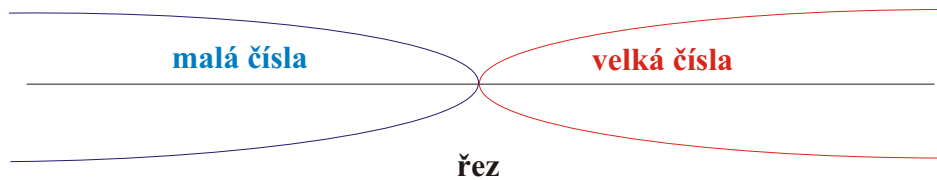
Žádný dům není tak malý, aby nepojal mnoho přátel.

(Seneca)

2.3.3 Konstrukce reálných čísel pomocí řezů

Řekneme, že rozdělení množiny racionálních čísel na dvě neprázdné podmnožiny tvoří **řez**, pokud všechny prvky první ("malé") množiny jsou menší než všechny prvky druhé ("velké") množiny (přitom navíc chceme, aby "malá" množina neměla největší prvek, přesuneme ho případně do "větší" množiny).

Tyto řezy nazveme **reálná čísla** a množinu všech řezů označíme \mathbb{R} . S těmito řezy musíme umět počítat, definujeme tedy operace s těmito řezy tak, že při operaci počítáme se všemi prvky "malé" množiny, výsledek pak určuje "malou" množinu výsledku. Nakonec se identifikují "stará" racionální čísla r s řezem $(-\infty, r), [r, +\infty)$, ponechá se značení a najdou se na číselné ose reálná čísla (jejich obrazy).



Obrázek 2.3.3: Řez množiny racionálních čísel.



... a jsme tam (v \mathbb{R}).

Každý řez tak identifikuje právě jedno místo na číselné ose. Tak se podařilo zaplnit všechny "mezery", číselné ose nyní nic nechybí.

(R.Dedekind ~ 1869)

Zřejmý důvod pro studentův nezájem je to, že nepředstavujeme celý obraz matematiky jako oboru, kde si můžete vybírat mezi mnoha kariérami, které jsou intelektuální odměnou i výzvou.
(Griffith 2000)

2.3.4 Věta (Axiomy reálných čísel)

Množina \mathbb{R} všech **reálných čísel** splňuje následující axiomy

Axiomy tělesa:

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (i) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.
- (ii) $x + y = y + x$, $xy = yx$.
- (iii) $x(y + z) = xy + xz$.
- (iv) $x + 0 = x$, $x1 = x$.
- (v) $\forall x \exists y : x + y = 0$.
- (vi) $\forall x \neq 0 \exists y : xy = 1$.

Když chce být muž šťastný, nesmí přičítat k vlastnictví, ale odečítat od potřeb.

(Seneca)

Axiomy uspořádání:

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (i) nastává právě jedna z možností $x < y, x = y, y < x$
- (ii) $x < y \ \& \ y < z \implies x < z$.
- (iii) $x < y \implies x + z < y + z$.
- (iv) $(x < y \ \& \ 0 < z) \implies xz < yz$.

Axiom zařazení \mathbb{N} do \mathbb{R} :

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$.

(Archimédés ze Syrákús ~ -250, Eudoxus)

Výchova by měla být taková, aby to, co je nabízeno, bylo přijímáno jako cenný dar, ne jako povinnost.

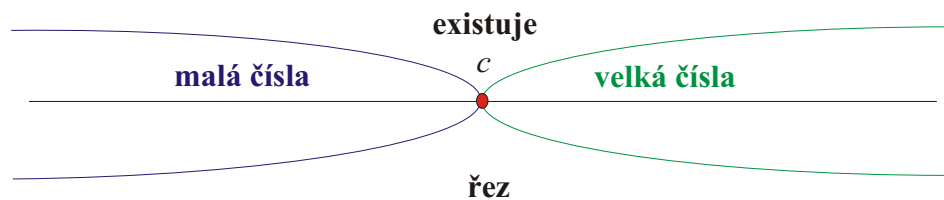
(A.Einstein ~ 1940)

Axiom úplnosti:

Je-li \mathbb{R} disjunktní sjednocení neprázdných množin A a B , přičemž všechny prvky A jsou menší než všechny prvky B , pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$A = (-\infty, c), \ B = [c, \infty) \text{ nebo } A = (-\infty, c], \ B = (c, \infty) .$$

(R.Dedekind ~ 1869)



Obrázek 2.3.4: Řez určuje nějaké "číslo".

Tyto axiomy jednoznačně popisují množinu reálných čísel.



Všimněme si, že axiom úplnosti tvoří řezy na množině řezů ;-)

2.3.5 Poznámka ke konstrukci reálných čísel

Pokud bychom definovali množinu reálných čísel pomocí výše uvedených axiomů, nebyli bychom si jisti, že taková množina existuje. Proto je potřeba nějaká konstrukce (například výše uvedená konstrukce řezů), nebo jiný důkaz existence.

Další možné konstrukce reálných čísel jsou použití fundamentálních posloupností nebo konečných desetinných rozvojų, což jsou opět metody, které "identifikují" mezery v číselné ose.

Ten, který rozumí Archimédovi a Apolloniovi, bude méně obdivovat výsledky jejich následovníků.

(G.W.Leibnitz ~ 1680)

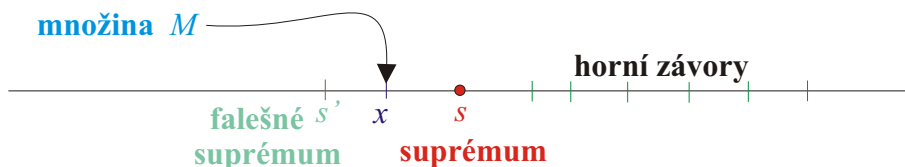
2.3.6 Definice (Suprémum)

Řekneme, že množina M reálných čísel je **omezená množina**, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \leq K$. Takové číslo K se nazývá **horní závora** množiny M . Existuje-li nejmenší horní závora množiny M , nazveme ji **suprémum**.

Číslo s je suprémem množiny M právě když

- (i) pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \leq s$ (... jde o horní závora),
- (ii) pro všechna čísla $s' < s$ existuje $x \in M$ tak, že platí $s' < x$ (... je nejmenší závora).

**k falešnému suprému s'
najdeme prvek x v množině M**



Obrázek 2.3.6: Suprémum je největší pravý kraj množiny.



Číslo s' je "falešné suprémum", něco jako falešná nevěsta ;-)

Podobně se definuje **infimum** (největší **dolní závora**).

Vzdělání má hořké kořeny, ale sladké ovoce.

(Démokritos z Abdér ~ -400)

2.3.7 Věta (Axiom o suprémumu)

Každá neprázdná shora omezená množina má suprémum.

Důkaz: Jde o tvrzení ekvivalentní s axiomem úplnosti. ■

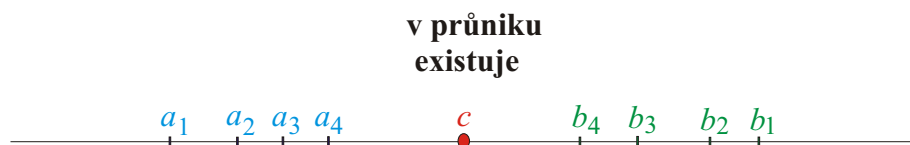
2.3.8 Věta (O neprázdném průniku intervalů)

Průnik posloupnosti intervalů

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

je neprázdný.

(K.Weierstrass 1874)



Obrázek 2.3.8: Průnik intervalů bude neprázdný.

Důkaz: Jde o tvrzení ekvivalentní s axiomem úplnosti. ■

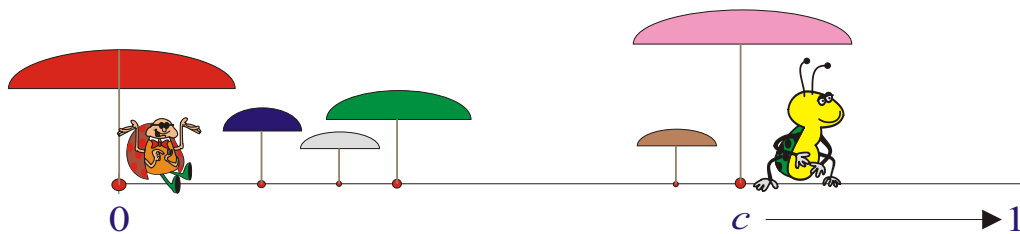


Důkaz je něco jako polapit pachatele. Musíme uzavřít všechny východy a udělat BAF!!!

2.3.9 Věta (Plážové lemma o slunečnicích)

Nechť má každý človíček (reálné číslo x) na pláži (interval $[0, 1]$) svůj slunečník (interval $U(x) = (x - \delta_x, x + \delta_x)$). Pak se mohou všichni človíčky schovat před sluncem (svítícím kolmo) pod konečně mnoha slunečníky (teda $[0, 1]$ je podmnožinou konečného sjednocení intervalů $U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_n)$ pro vhodné body $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$).

(H.E.Heine 1872, É.Borel 1875)



Obrázek 2.3.9: Plážové lemma.

Důkaz: Označíme A množinu všech záporných čísel spolu s těmi čísly $x \in [0, 1]$, pro které je možné "konečné" pokrytí na kousku pláže $[0, x]$. Množina A jako "dolní" množina definuje řez na množině reálných čísel, podle axiomu úplnosti existuje c , které tomuto řezu odpovídá. Pak $c = 1 \in A$ (jinak použijeme slunečník v bodě c a pokryjeme větší kousek pláže). ■



Běžně se tomuto tvrzení říká "plíživé lemma", neboť informace (zde konečné pokrytí) se nenápadně plíží zleva doprava a nakonec dosáhne bodu 1.

2.3.10 Definice (Rozšířená reálná osa)

Přidáme k reálným číslům dva další prvky, $-\infty$ a $+\infty$ a nazveme takto vzniklou množinu **rozšířená reálná osa**, značíme \mathbb{R}^* . Rozšíříme operace uspořádání, sčítání a násobení tam, kde to dává smysl. \mathbb{R}^* tím získá vzhledem k uspořádání strukturu intervalu $\mathbb{I} = [0, 1]$.

(J.Wallis 1655)



Obrázek 2.3.10: Rozšířená reálná osa.

Jedná se vlastně o kompaktifikaci \mathbb{R} . Nyní platí (v \mathbb{R}^*) axiom o suprémum takto: "Každá množina má suprémum."

2.4 Komplexní čísla

2.4.1 Konstrukce komplexních čísel

Množinou \mathbb{C} rozumíme množinu uspořádaných dvojic (a, b) reálných čísel s operacemi

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) , \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) .$$

Prvek \mathbb{C} nazýváme **komplexní číslo**. Reálné číslo x ztotožňujeme s dvojicí $(x, 0)$. Označíme $i = (0, 1)$ a budeme ho nazývat **imaginární jednotka**. Pak lze psát

$$(a, b) = a + ib$$

a platí všechna pravidla počítání, používáme dodatečnou informaci $i^2 = -1$.

Identifikaci komplexních čísel $a + ib$ s body $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nazýváme **komplexní rovina**.

(C.F.Gauss \sim 1800)

Nejsem nikdy spokojen, pokud neřeknu co nejvíce co nejméně slovy.

(K.F.Gauss \sim 1829)

...je jako liška, která ocasem zametá stopy.

(N.H.Abel \sim 1829)

Jiná možnost definice komplexních čísel vychází z algebry, kde se konstruuje kořenové nadtěleso tělesa reálných čísel, ve kterém je řešitelná rovnice $x^2 + 1 = 0$.

2.4.2 Definice (Rozšířená komplexní rovina)

Přidáme ke komplexním číslům další prvek ∞ a nazveme takto vzniklou množinu **rozšířená komplexní rovina**, značíme \mathbb{S} . Pro představu je možné použít zobrazení, které každému komplexnímu číslu z přiřadí bod $f(z)$ na jednotkové sféře (sféra se dotýká komplexní roviny) na spojnici "severního pólu" a bodu z . Tím zobrazíme \mathbb{C} na sféru (s výjimkou "severního pólu", ten odpovídá bodu ∞).

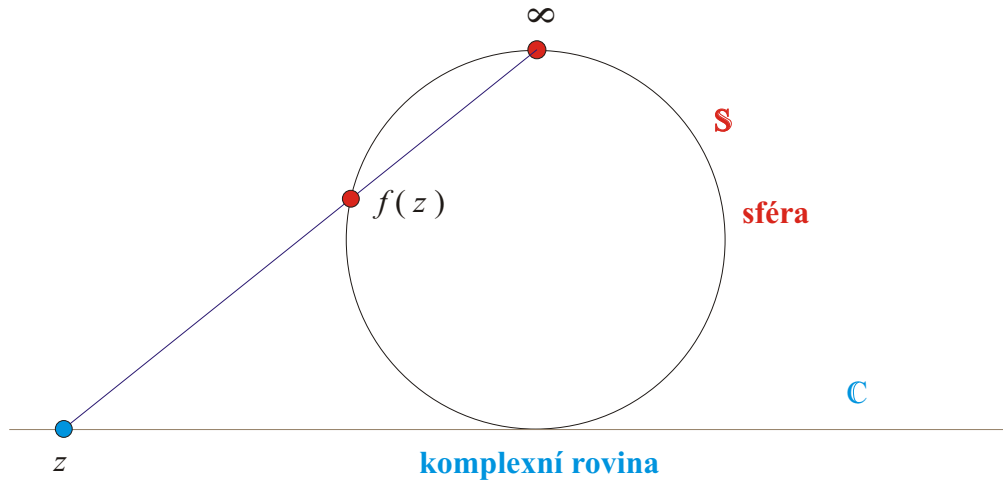


Obrázek 2.4.2: Tučňáci marně hledají severní pól.

Takto má \mathbb{S} strukturu jednotkové sféry v \mathbb{R}^3 .



Jedná se zde vlastně o kompaktifikaci \mathbb{C} .



Obrázek 2.4.2: Přidáním severního pólu dostaneme rozšířenou komplexní rovinu.

2.4.3 Věta (Základní věta algebry)

Polynom kladného stupně má kladný počet kořenů.



U stupně $n > 0$ má právě n kořenů
(počítáme-li násobnost).

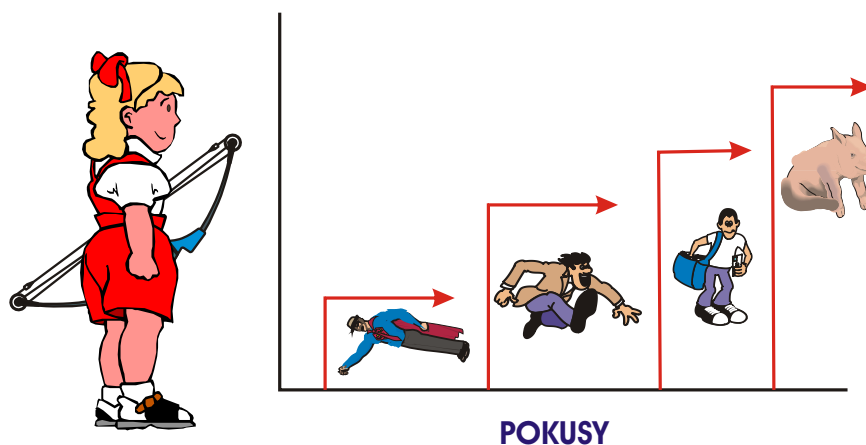
2.5 Posloupnosti

Malá Anička dostala luk a šípy. Nejprve si nebyl jistý vepřík, pošťák, souseď, prostě nikdo.

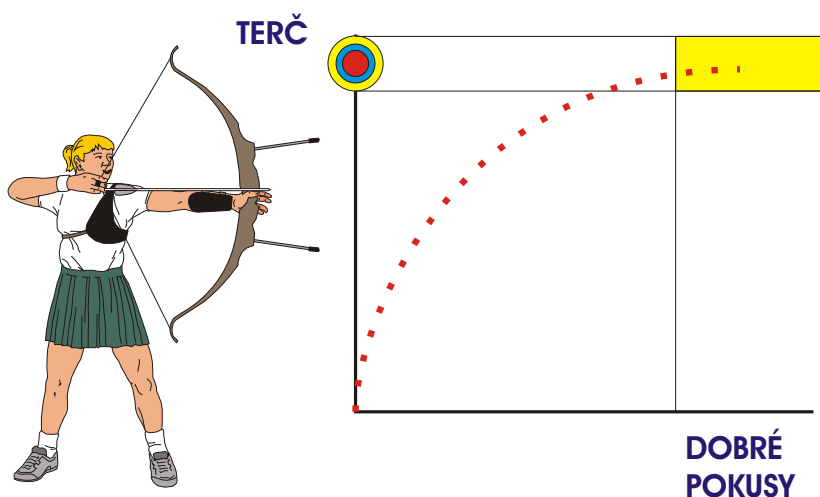


Obrázek 2.5.0: Byl to těžký život, než se to Anička naučila alespoň trochu.

Pak se zlepšila, takže se postupně souseď, pošťák i vepřík přestali bát. Když Anička vyrostla, byla skvělá. Ať dostala libovolně malý terč, vždy se vypracovala a od jisté doby jej neminula.



Obrázek 2.5.0: Ano, pak nastal klid.



Obrázek 2.5.0: Ano, Anička je skvělá.

2.5.1 Definice (Limita)

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je **limita posloupnosti** $\{x_n\}_1^{+\infty}$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|x_n - A| < \varepsilon$.

Píšeme

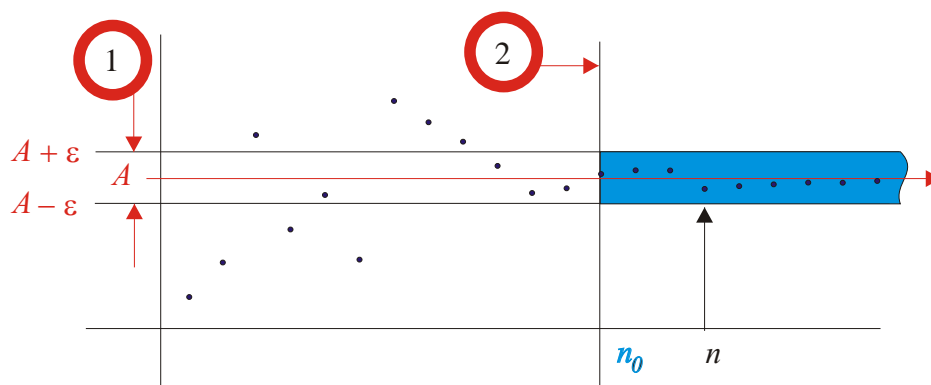
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A, \quad \text{nebo} \quad x_n \rightarrow A, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Říkáme v tom případě, že posloupnost $\{x_n\}_1^{+\infty}$ **konverguje k** $A \in \mathbb{R}$.

(A.L.Cauchy 1821)

Podobně můžeme definovat i pro $A \in \mathbb{R}^*, \mathbb{C}$.

Jde o jakousi ustálenou hodnotu v nekonečnu. Je to základní postup analýzy. Chceme, aby určitá veličina byla ve svém "finálním stádiu" nějak odhadnutelná.



Obrázek 2.5.1: Limita posloupnosti.



... a stačí 3 kvantifikátory !

2.5.2 Další pojmy

Zkoumáme tyto pojmy:

- ⇒ **monotónní posloupnost** (... hodnoty posloupnosti stále např. rostou)
- ⇒ **omezená posloupnost** (... hodnoty posloupnosti jsou omezené)
- ⇒ **vybraná podposloupnost** (... některé členy posloupnosti škrtneme)
- ⇒ **hromadný bod** (... k němuž konverguje nějaká vybraná podposloupnost)
- ⇒ **limes superior** (... největší hromadný bod)
- ⇒ **limes inferior** (... nejmenší hromadný bod)

2.5.3 Další věty

Větší posloupnost má větší (nebo stejnou!) limitu než menší posloupnost.

Limita součtu (součinu, podílu, ...) je rovna součtu (součinu, podílu, ...) limit.

Monotónní posloupnost má limitu.

2.5.4 Věta (Existence hromadného bodu)

Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.

(B.Bolzano \sim 1850, K.Weierstrass \sim 1869)

Důkaz: Půlením intervalů získáme vybranou konvergentní podposloupnost. ■

2.5.5 Věta (Podmínka ustálenosti)

Posloupnost $\{x_n\}_1^{+\infty}$ má vlastní limitu právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

(A.L.Cauchy 1821, B.Bolzano 1817)



Přednost podmínky ustálenosti před definicí limity je v tom, že nemusíme znát hodnotu limity, tedy stačí zjistit, že se hodnoty posloupnosti "již příliš nemění" (od určitého indexu ...).
POZOR !!!
Toto je opravdu chytré :-)

Posloupnost splňující podmínku ustálenosti podmínku se nazývá **ustálená posloupnost**.

2.5.6 Konstrukce reálných čísel pomocí posloupností

Prohlásíme za ekvivalentní každé dvě posloupnosti se stejnou konečnou limitou. Třída ekvivalence (podle této ekvivalence) příslušná pro danou posloupnost je tvořena všemi posloupnostmi, které mají stejnou limitu. S těmito třídami musíme umět počítat, definujeme tedy operace s těmito třídami tak, že počítáme s vybraným zástupcem každé třídy (ukáže se, že výsledek nezávisí na výběru posloupnosti) a výsledek zase určí třídu, odpovídající výsledku. Nakonec se identifikují racionální čísla s konstantními posloupnostmi. Množina tříd ekvivalence je jiný popis reálných čísel (jde ukázat, že jsou splněny příslušné axiomy).

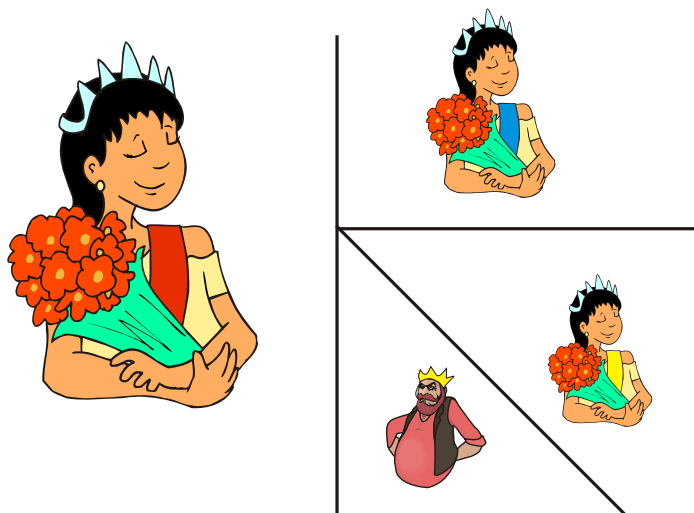
2.6 Řady

Budeme nekonečně mnohokrát sčítat (nebo odečítat).

2.6.1 Definice (Formální řada čísel)

Nechť $\{x_n\}_1^{+\infty}$ je posloupnost (komplexních) čísel. Nazveme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$



Obrázek 2.6.0: Jestli má král opravdu nekonečně mnoho dcer, tak skončí na mizině.

nekonečná řada, číslo

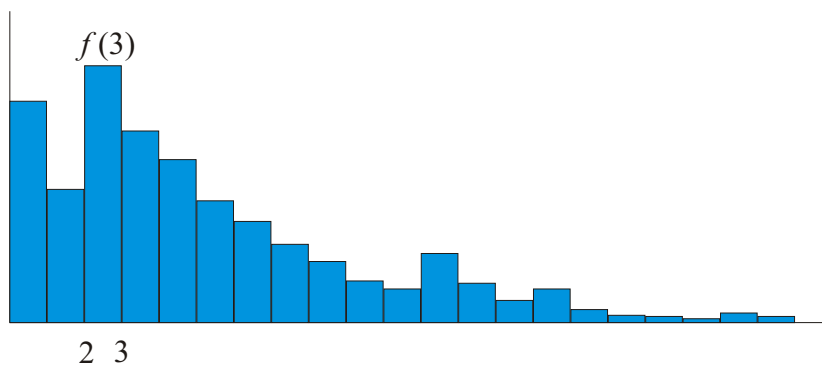
$$\sum_{k=1}^n x_k = s_n$$

nazveme n -tý **částečný součet řady**. Má-li posloupnost částečných součtů (t.j. posloupnost $\{s_n\}_1^{+\infty}$) konečnou limitu s , řekneme, že **řada konverguje** a má součet s ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = s$$

jinak říkáme, že **řada diverguje**.

(Gregory 1668)



Obrázek 2.6.1: Při konvergenci jde o konečnost plochy pod grafem po částech konstantní funkce $f \upharpoonright (n-1, n] = x_n$.

Největší věci na světě jsou působeny jinými věcmi, které podceňujeme, malými příčinami, které přehlízíme a které se posléze hromadí.

(G.Ch.Lichtenberg ~ 1770)

Řekneme, že **řada konverguje absolutně**, když konverguje řada z absolutních hodnot členů původní řady.

2.6.2 Věta (Nutná podmínka konvergence)

Je-li řada $\sum x_n$ konvergentní, pak posloupnost $\{x_n\}$ má limitu 0.

Důkaz: Vidíme, že $s_{n+1} - s_n = x_{n+1}$ a provedeme limitní přechod $n \rightarrow +\infty$. ■

Chování vědce připomíná chování průzkumníka na pochodu napínajícího všechny smysly, využívajícího postranní pěšinky a připraveného přijmout všechny podněty.

(G.Choquet ~ 1990)

2.6.3 Věta (Srovnávací kritérium)

Pokud $x_n > y_n > 0$ a $\sum x_n$ konverguje, pak $\sum y_n$ konverguje (nazýváme řadu $\sum x_n$ **majorantní řada** k řadě $\sum y_n$).

(A.L.Cauchy 1821)



Jde o často používaný test konvergence. Pro jeho používání potřebujeme řady, které jde používat jako majorantní (a minorantní). Teda budeme počítat a počítat, abychom to uměli :-)

2.6.4 Věta (Harmonická řada diverguje)

Nazveme řadu $\sum 1/n$ **harmonická řada**. Harmonická řada diverguje.

(N.Oresme 1350)

Důkaz: Ozávkujeme a vidíme, že posloupnost částečných součtů je neomezená

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

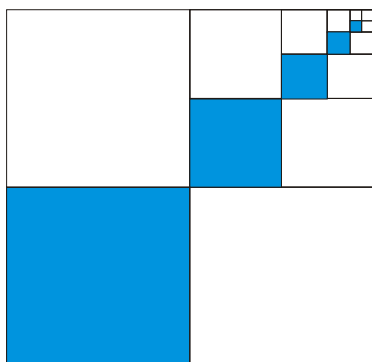
■

2.6.5 Věta (Konvergence geometrické řady)

Nazveme řadu $\sum q^n$ **geometrická řada**. Geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$.

(Archimédés ze Syrákús ~ -250, F.Vite 1593)

Důkaz: Zjistíme snadno částečné součty a spočteme limitu. ■



$$\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$

Obrázek 2.6.5: Kdo má oči k vidění, tak to vidí.

Srovnáním s geometrickou řadou dostaneme **podílové kritérium**

$$\exists q : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < q < 1 \implies \text{řada } \sum x_n \text{ konverguje}$$

(d'Alembert 1765)

a **odmocninové kritérium**

$$\exists q : \sqrt[n]{|x_n|} < q < 1 \implies \text{řada } \sum x_n \text{ konverguje .}$$

(A.L.Cauchy 1821)

2.6.6 Věta (Alternující řada konverguje, když ...)

Je-li $\{x_n\}$ monotónní posloupnost nezáporných čísel, pak $\sum (-1)^n x_n$ nazýváme **alternující řada**. Alternující řada konverguje právě tehdy, když posloupnost $\{x_n\}$ má limitu 0.

Důkaz: Ozávkujeme a vidíme, že

$$s_1 < s_3 < s_5 < \dots < s_6 < s_4 < s_2 ,$$

tedy liché i sudé částečné součty mají limitu (monotónní posloupnosti). Navíc $|s_n - s_{n+1}| = x_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$. ■

2.6.7 Operace s řadami

Řadu můžeme přerovnat, pro absolutně konvergentní se nic nestane při jakémkoliv **přerovnání**, pro neabsolutně konvergentní můžeme "nasčítat" cokoliv.

Součet řad definujeme "po členech" (tedy $\sum(x_n + y_n)$). U součinu je situace komplikovanější. Musíme zařídit, aby se vynásobil každý člen první řady s každým členem druhé řady. Nabízí se z tabulky "každý s každým" vybírat postupně všechny, rozumný postup je dávat do jedné skupiny "vedlejší diagonály".

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5

takto získáme
čtvrtý člen
výsledné řady ...

Obrázek 2.6.7: Tabulka násobení "každý s každým".



BTW. Po řádcích to nemá cenu sčítat.

Součinem řad $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ nazýváme řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, kde $z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$,



Uvědomme si, že se sčítat mohlo i jinak.

2.6.8 Věta (O součinu řad)

Je-li řada $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$ absolutně konvergentní a $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = B$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = A \cdot B$, kde $z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$.

Veličiny by se neměly zbytečně násobit.

(William z Occamu ~ 1400)

Kapitola 3

Funkce jedné proměnné



ím nejdůležitějším pro matematickou analýzu jsou funkce a zkoumání jejich vlastností. Funkce je vlastně nejjednodušší animace probíhajícího děje. Důležitá je schopnost aproximovat její funkční hodnotu a předpovědět její chování.

3.1 Pojem funkce

Zachycení pohybu pomocí grafu funkce je nejstarší animovaný film.



Herci jsou nahrazeni pohybujícím se bodem.

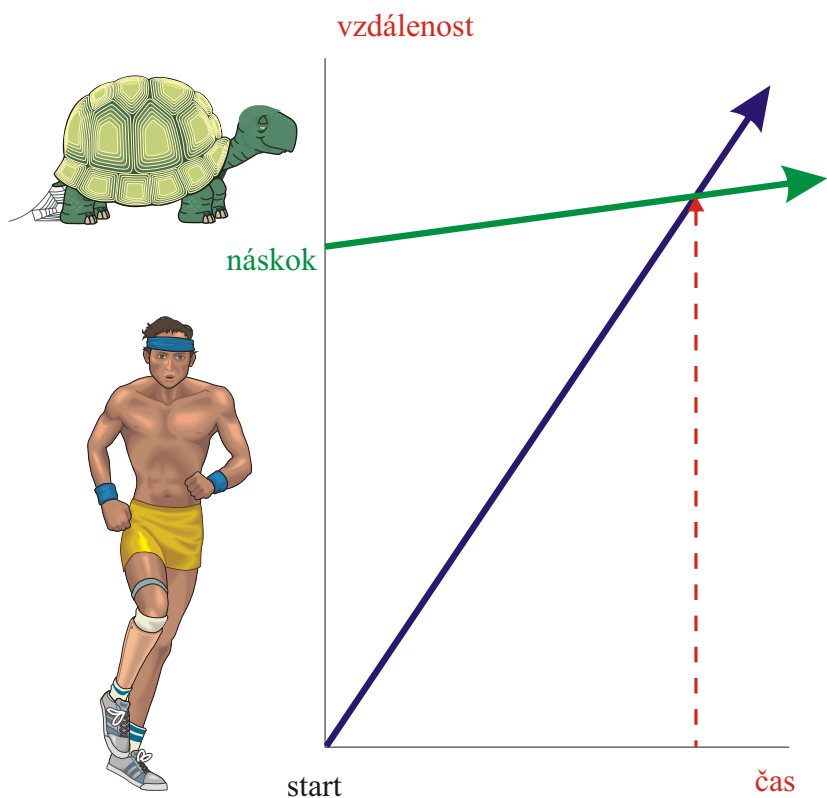
3.1.1 Definice (Funkce z \mathbb{R} do \mathbb{R})

Zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R} nazýváme **funkce** (např. $f(x) = 1 - x$). Zobrazení, které každé funkci přiřazuje reálné číslo, nazýváme **funkcionál** (např. $\varphi(f) = f(1)$). Zobrazení, které každé funkci přiřazuje funkci, nazýváme **operátor** (např. $\varphi(f) = 2f$).

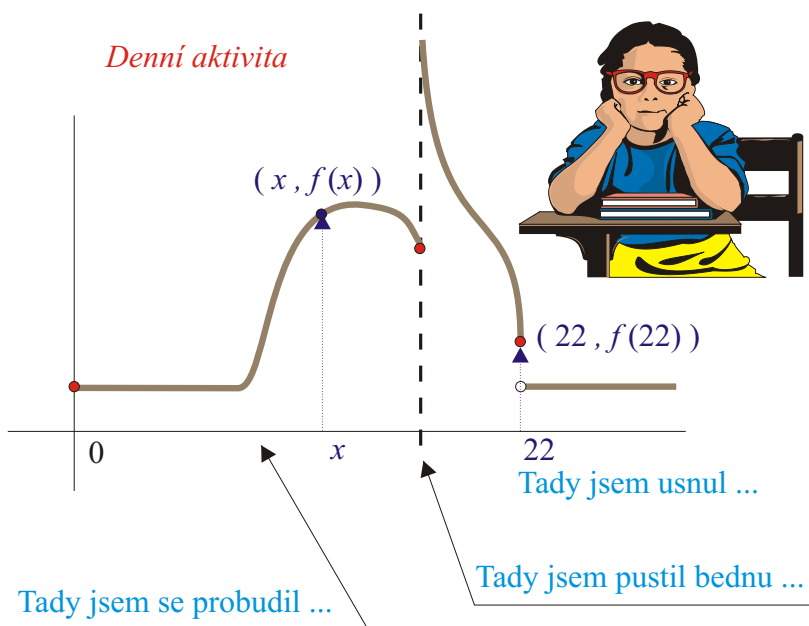
(G.W.Leibnitz 1692)



Funkce bude nejčastěji zadána v příkladech pomocí nějaké formulky, sumy, limity, popřípadě kombinací těchto funkčních předpisů na jednotlivých podmnožinách \mathbb{R} .



Obrázek 3.1.0: Probíhající závod je zachycen jako animovaný film.

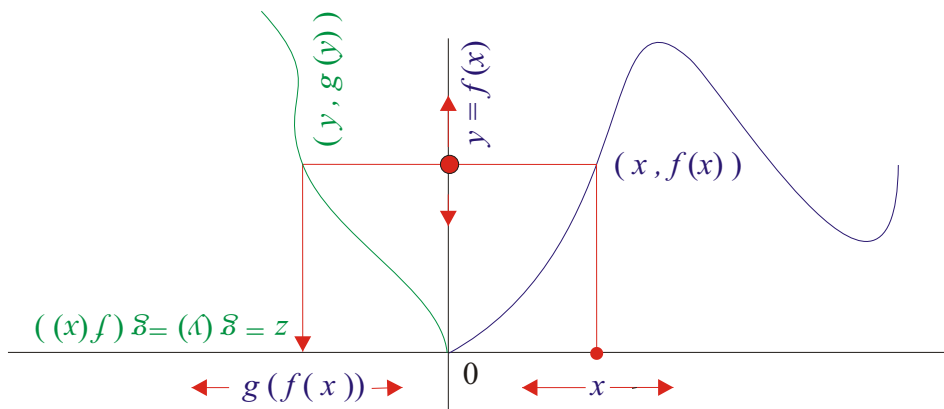


Obrázek 3.1.2: Jak probíhal den.

3.1.2 Zobrazování funkcí

Funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nejčastěji znázorňujeme jako množinu bodů $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$. Této množině říkáme **graf funkce**.

Pro znázornění složené funkce $x \mapsto g(f(x))$ můžeme (někdy!) s výhodou použít následující "dvojgraf":

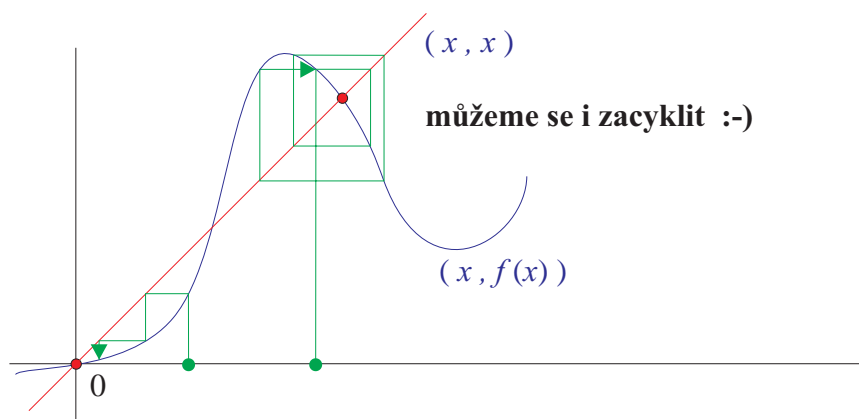


Obrázek 3.1.2: Složená funkce a její "graf".



Složená funkce je něco jako organizovaný zločin.

Opakované skládání téže funkce jde (někdy!) znázornit pomocí "odrážení" od grafu funkce $\text{Id}(x) = x$.



Obrázek 3.1.2: Hledání pevného bodu.



Takto můžeme hledat pevný bod funkce ... a je to zábava :-)
To samé dělá kalkulačka, při opakovaném mačkání funkce sinus nebo kosinus, jde to pro každou funkci?

3.1.3 Operace s funkcemi

Funkce budeme běžným způsobem sčítat, násobit, dělit, skládat, dělat restrikce, vytvářet inverzní funkce, definovat různým postupem na různých částech definičního oboru. Pro definování funkční hodnoty se budou často používat limity posloupností a řady čísel ...



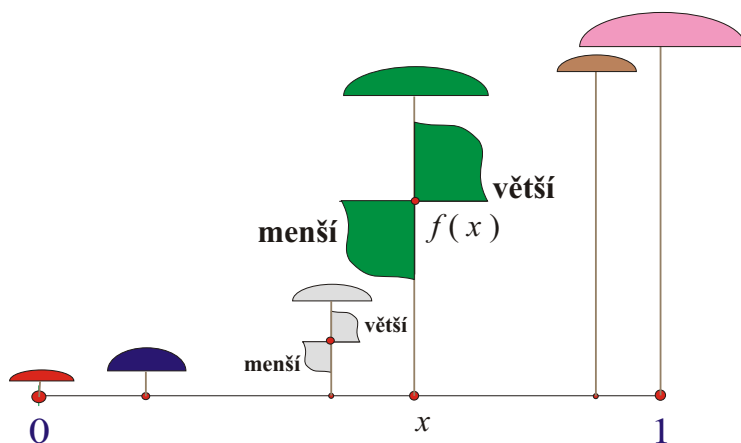
... a málokdy se setkáme s tak "hodnou" funkcí, jako je konstanta nebo identita ;-)

Budeme zkoumat různé vlastnosti (monotonii, omezenost, ...) funkcí na různých množinách.

3.1.4 Věta (O monotonii)

Funkce je rostoucí na intervalu právě tehdy když je rostoucí v každém bodě intervalu.

Důkaz: Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu $[0, 1]$. Pak ke každému bodu $x \in [0, 1]$ přiřadíme okolí $U(x)$, na němž platí "vlevo od x jsou v $U(x)$ hodnoty f menší než $f(x)$ a vpravo hodnoty větší". S těmito $U(x)$ jako slunečníky použijeme plážové lemma. Dostaneme konečně mnoho slunečnicků a vidíme, že hodnota funkce pod těmi slunečníky roste "zleva doprava". Tedy $f(1) > f(0)$. Tedy z lokální informace se podařilo sestavit globální.



Obrázek 3.1.4: Pláž se slunečníky.

Obrácená implikace je snadná. ■

Nečti to jenom; bojuj s tím! Ptej se vlastní otázky, hledej svoje příklady, objev svůj důkaz. Jsou předpoklady nezbytné? Platí opak? Co se děje v klasických speciálních případech? A co degenerované případy? Kde důkaz používá předpoklady?

(P.R.Halmos)

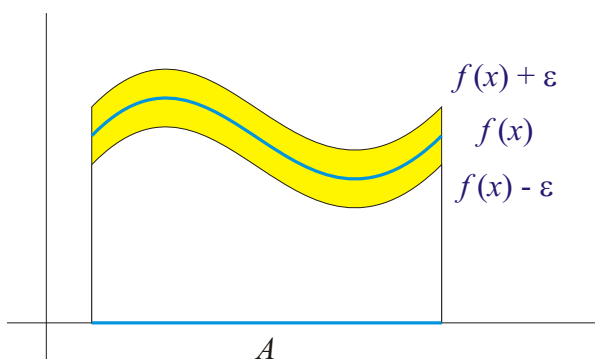
3.1.5 Definice (Stejnomořná konvergence)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a nechť $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou funkce $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$. Říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** na M k funkci f když platí: "Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $x \in M$ a $n > n_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ."$$

Píšeme $f_n \Rightarrow f$ na M .

(K.Weierstrass 1841)



Obrázek 3.1.5: Stejnomořná konvergence.

Od určitého indexu jsou všechny funkce v ε -ovém okolí limitní funkce. Stejnomořnost tkví v tom, že se ten index n_0 najde společně pro všechny body M . Podobně se zkoumá stejnoměrnost konvergence řady funkcí.



Zase tu může nastoupit ta ukrutná podmínka ustálenosti ...

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** na (a, b) k funkci f když konverguje stejnoměrně na každém $[c, d] \subset (a, b)$.



... nebo pro každý bod stejnoměrně na nějakém jeho úplném okolí ...

Píšeme $f_n \rightrightarrows_{loc} f$ na M



... lokálka = trať místního významu

Pokud je pouze zajištěna konvergence pro jednotlivá $x \in M$, říkáme této konvergenci posloupnosti funkcí **bodová konvergence**



Není problém zjistit stejnoměrnost z obrázku, potíže nastává při komplikovaném vzorečku pro funkce f_n , popřípadě naší malé "vědomosti" o limitní funkci ..., protože pak se musí hledat odhad :-)

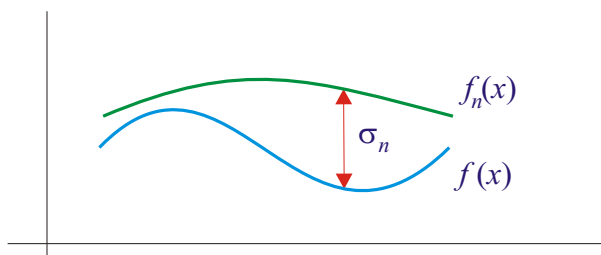
3.1.6 Věta (Test stejnoměrné konvergence)

Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na M k funkci f právě když platí:

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$



... stačí najít odhady těch suprem a poslat je k nule.



Obrázek 3.1.6: Odchylka dvou funkcí, jde o supremum rozdílů.

3.1.7 Věta (Majorantní kritérium)

Řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na M pokud existuje číselná řada $\sum c_n$ taková, že:

- (i) $|f_n| < c_n$
- (ii) $\sum c_n$ konverguje.

(K.Weierstrass \sim 1869)

3.1.8 Věta (Součinnová kritéria)

Nechť

- (i) $\sum f_n \Rightarrow$ na M ,
- (ii) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq \dots \geq 0$,

pak $\sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na M .

(N.H.Abel \sim 1824)

Nechť

- (i) $\sum f_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů na M ,
- (ii) $g_1(x) \geq g_2(x) \geq \dots \geq 0$ stejnoměrně konverguje k nule,

pak $\sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na M .

(G.P.L.Dirichlet 1840)

V důkazu se používá **parciální sumace** ve tvaru

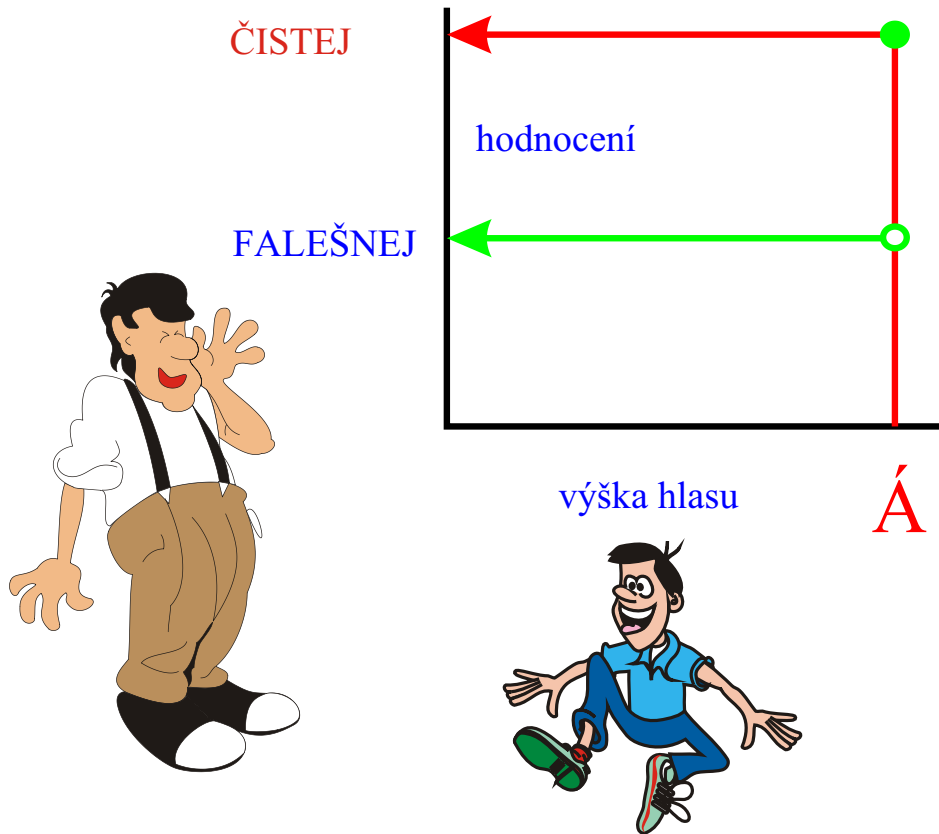
$$\sum_{k=p+1}^q f_k g_k = \sum_{k=p+1}^q F_k (g_k - g_{k+1}) + F_q g_{q+1} - F_p g_{p+1} ,$$

kde $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$.

(N.H.Abel \sim 1824)



Je to velmi málo "zřejmá" identita.
Jde ověřit, ale najít tutově nejde ...
Věty platí i pro konstantní funkce.



Obrázek 3.2.0: Nespravedlivé hodnocení je nefér.

3.2 Spojitost

Základním pojmem matematické analýzy je pojem spojitost funkce. Jde o její "spravedlivé chování" v okolí daného bodu. Spravedlivost pomůže zjistit přibližnou hodnotu funkce v daném bodě pomocí hodnot funkce v blízkých bodech.

Pokud je například hodnocení zpěvu dvojhodnotové (čisté, falešné), není spravedlivě odměněna snaha o zlepšení.

Spravedlivý kantor potěší.

Podobně očekáváme spravedlivou odměnu za práci.

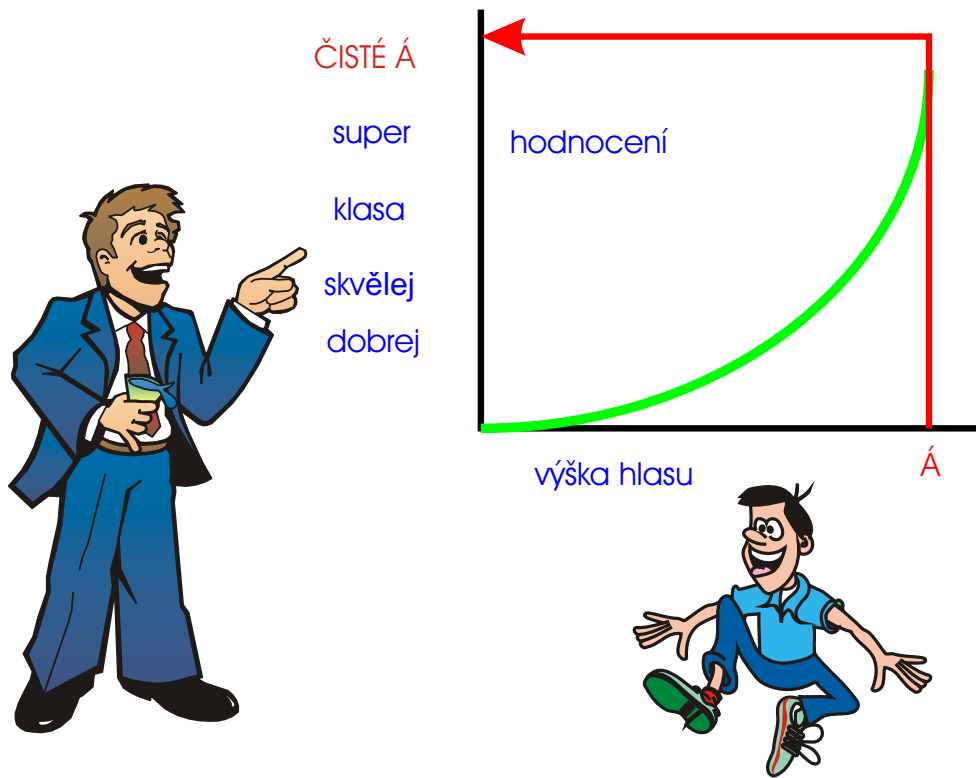
3.2.1 Definice (Spojité v bodě)

Řekneme, že funkce f je v bodě a **spojitá**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

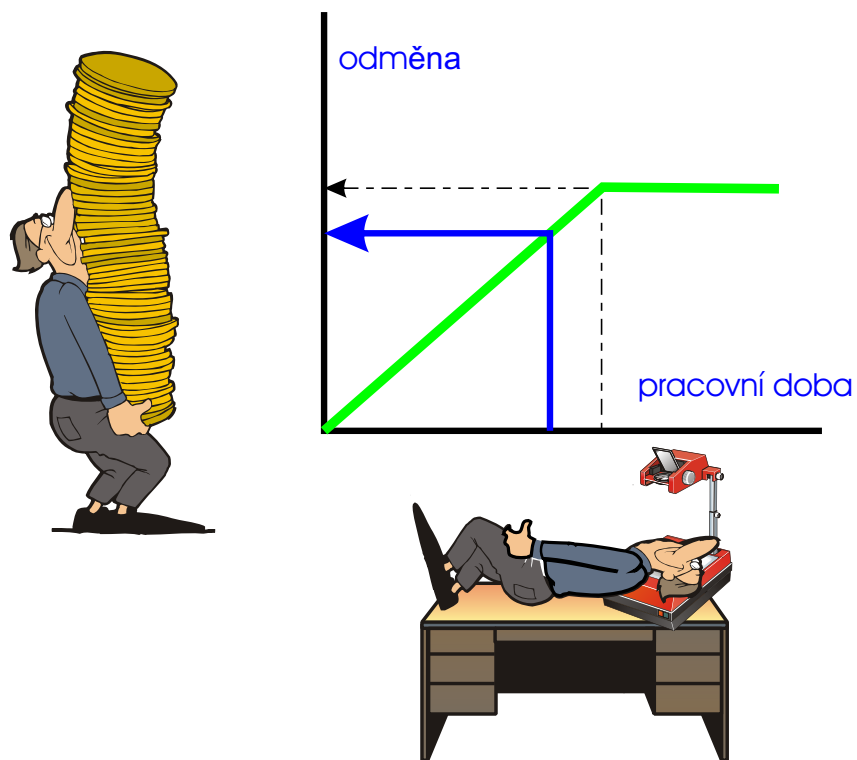
$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

(K.Weierstrass 1861)

Jedná se o definici, která vznikla po usilovných snahách zachytit situaci, kdy se funkce chová v daném bodě "hezky". Má své lepší i horší stránky.



Obrázek 3.2.0: Spravedlivé hodnocení podpoří snahu.

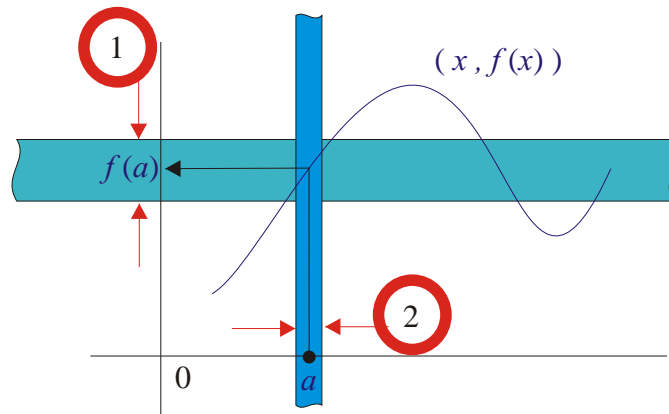


Obrázek 3.2.0: Za práci náleží spravedlivá odměna.



Uvědomme si, že ověřování spojitosti z definice spočívá v důkazu jisté nerovnosti pro všechny body x z jistého intervalu, což může být (až na triviální případy) nepříjemný úkol.

Její zdánlivá nesrozumitelnost se lehce odstraní obrázkem



Obrázek 3.2.1: Mechanismus spojitosti v bodě.



Bod a zde funguje jako "tahoun", který ovlivňuje funkci ve svém okolí tak, že má v blízkých bodech blízké hodnoty. Inu: "příklady táhnou", zde "příkladem" je bod spojitosti.

3.2.2 Definice (Limita)

Zajímá nás také prognóza budoucího vývoje dané situace.

Zvolíme vhodně funkci a zkoumáme, k jakému výsledku se funkční hodnota blíží.

Některé situace se mohou nečekaně vyvinout.

Některé chování je nečekané.

Děje nás zajímají i do minulosti, tedy zkoumáme vývoj v "obou směrech".

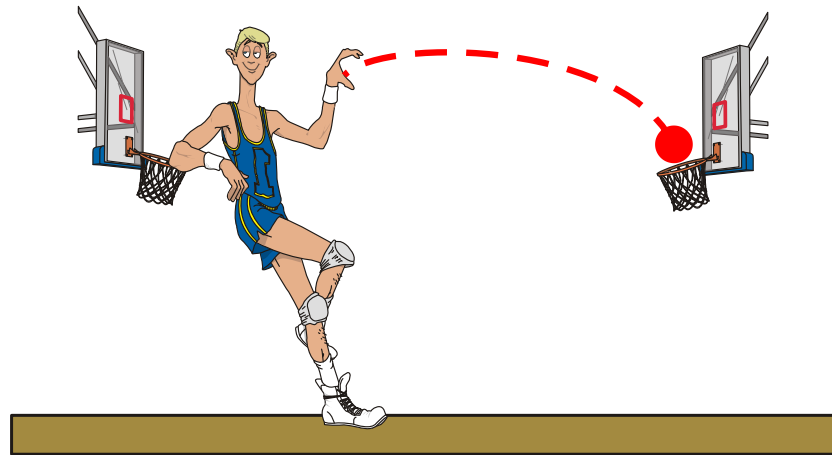
Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu** A , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A .$$

pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Vlastně je limita funkce totéž jako spojitost, až na hodnotu funkce v bodě a .



Obrázek 3.2.2: Jistě se opět trefí. Má prostě "limitu" v ruce.



Obrázek 3.2.2: Funkce a její limita.

3.2.3 Definice (Okolí a okolíčko)

Pro bod $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ definujeme (úplné) ε -ové **okolí** bodu x jako interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a značíme $U^\varepsilon(x)$. Podobně **prstencové** ε -ové okolí bodu x jako interval $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$ a značíme $P^\varepsilon(x)$. Pro levé a pravé okolí se omezíme pouze na body $\geq x$ nebo $\leq x$.

Pak definice spojitosti zní:

"Ke každému ε -ovému okolí $U^\varepsilon(f(x))$ bodu $f(x)$
existuje δ -ové okolí $U^\delta(x)$ bodu x tak,
že $f(U^\delta(x)) \subset U^\varepsilon(f(x))$."

Pokud se omezíme na jednostranná okolí, definujeme jednostrannou spojitost a limitu.

3.2.4 A zase kvantifikátory ...

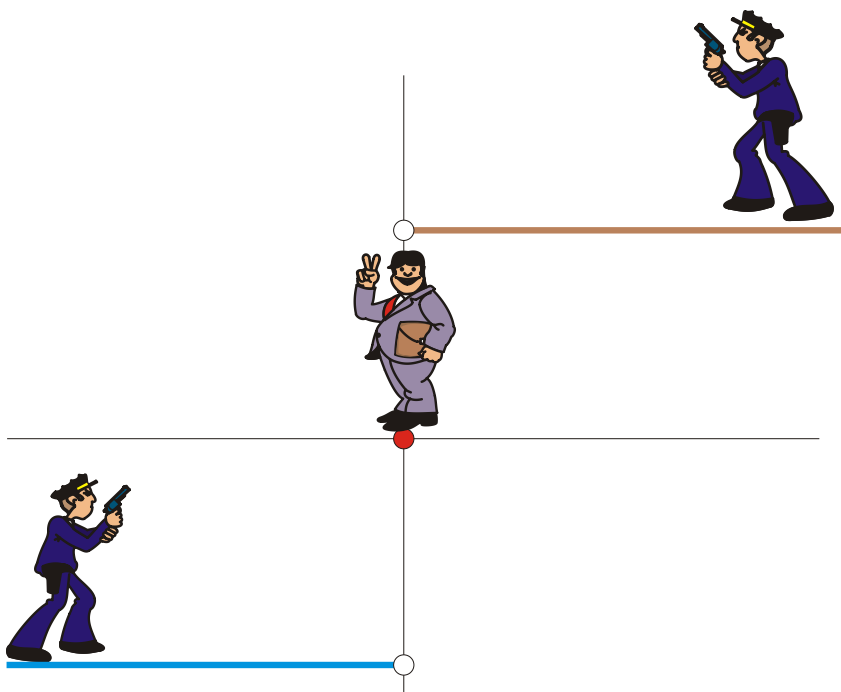
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

platí právě tehdy, když platí

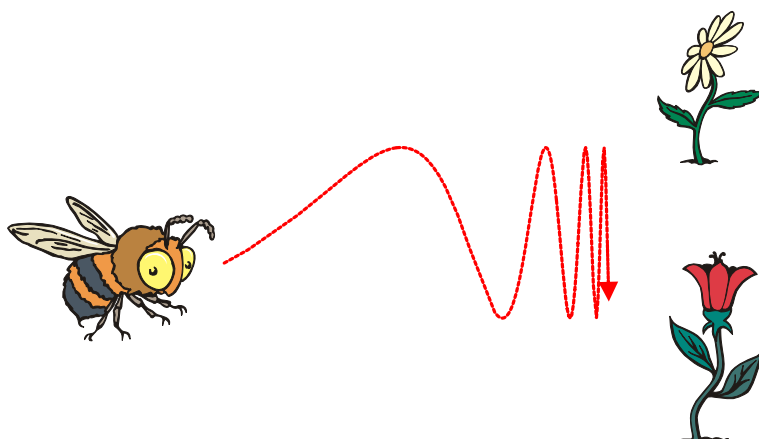
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < 7\varepsilon$$

a to platí právě tehdy když neplatí

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \ \& \ |f(x) - A| \geq \varepsilon \ .$$



Obrázek 3.2.2: Tam, kde má být není, tak ho nemohou "ulimitit".



Obrázek 3.2.2: Čmelák letí k té hezčí kytce. Když k ní přiletí blíž, nelíbí se mu její vůně a tak letí k druhé kytce. Zblízka opět nevoní a tak se opět vrací k první kytce ...

3.2.5 Věty (Pozorování obrázku limity)

Limita v bodě je nejvýše jedna.

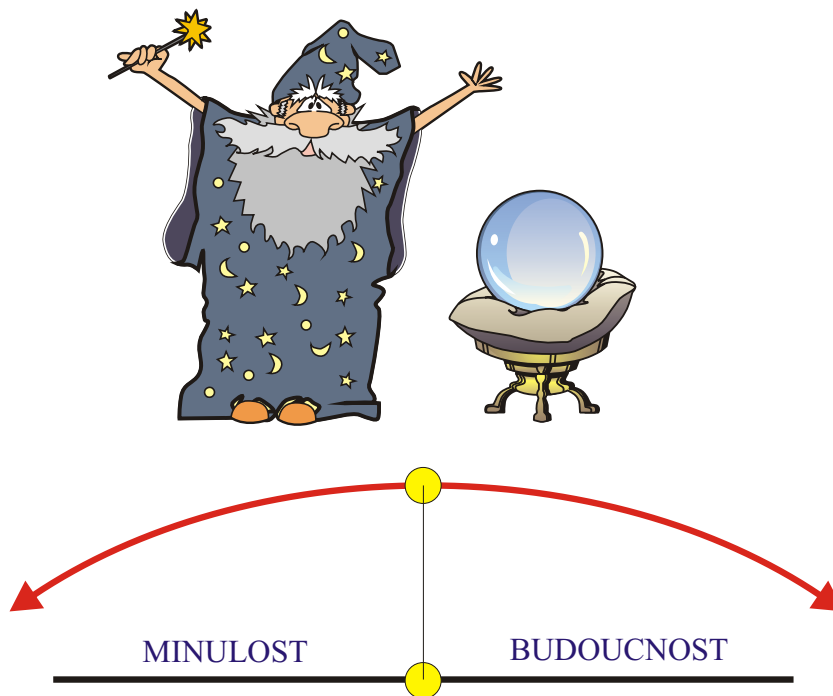
Větší funkce má větší (nebo stejnou) limitu.

Spojitosť v bodě dává omezenost na okolí.

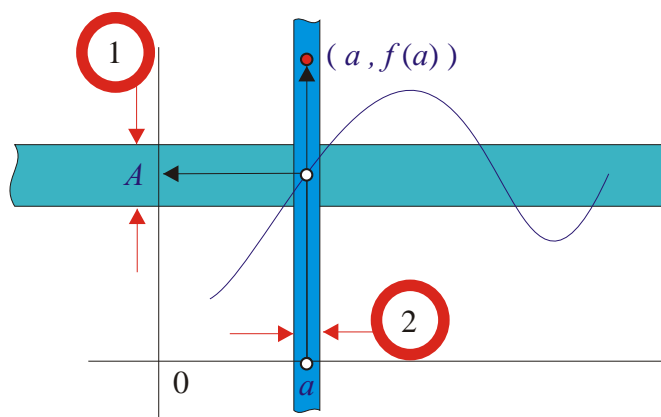
Monotonní funkce má limitu.

Limita součtu, součinu a podílu funkcí se chová očekávaně.

Polynomy jsou spojité v každém bodě.



Obrázek 3.2.2: Já to vidím.



Obrázek 3.2.2: Limita funkce.

3.2.6 Věta (O policajtech)

”Nechť Velký Policajt a Malý Policajt mají mezi sebou stále Zloděje, pak při dopadení Velký Policajt, Zloděj a Malý Policajt jedno jsou.”

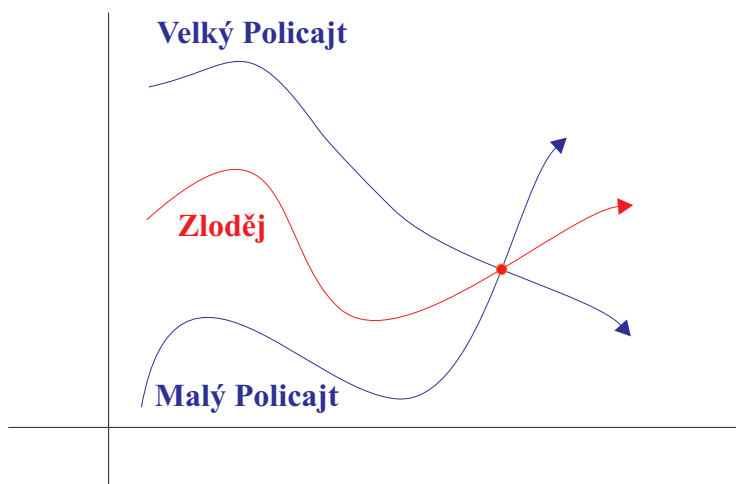
(matematický folklór na MFF UK)

Nechť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A ,$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A .$$



Obrázek 3.2.6: Mezi dvěma policajty se nic neobjeví.

3.2.7 Věta (O limitě složené funkce)

Platí

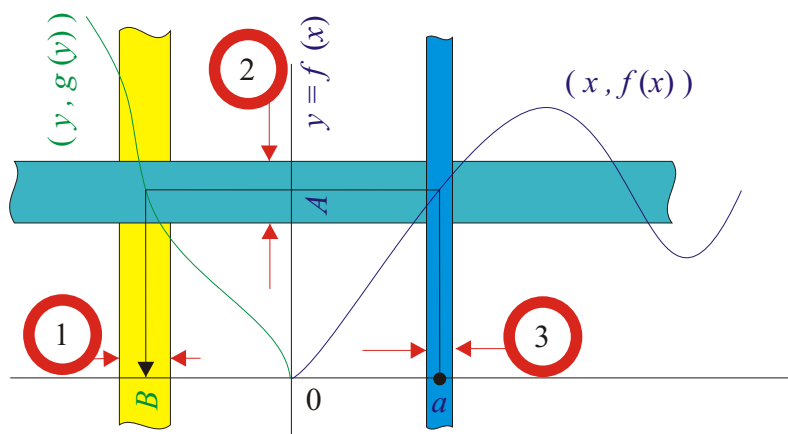
(i) Složením spojitých funkcí vznikne spojitá funkce. (Pro limitu složené funkce stačí pouze spojitost vnější funkce a limita vnitřní funkce.)

(ii) Pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$$

a existuje prstencové okolí bodu a na němž $f(x) \neq A$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B.$$



Obrázek 3.2.7: Je to snadné jako RAZ, DVA, TŘI.

Důkaz: Obecné schéma je toto: k ε existuje δ z definice spojitosti (nebo limity) pro g , k δ existuje ϑ z definice spojitosti (nebo limity) pro f . ■

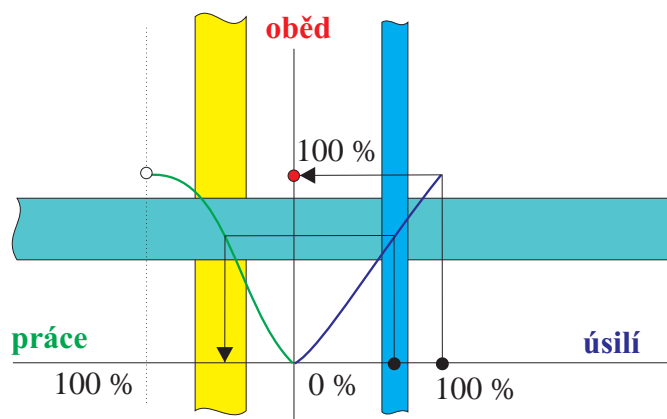


VELMI ČASTO se to používá!

Nechť například funkce $f(x)$ určuje kvalitu oběda, který připraví manželka svému muži s úsilím x , necht' $g(y)$ určuje množství užitečné práce, kterou je schopen vykonat muž po snědení oběda kvality y .

Ke každému množství vykonatelné práce manželka přesně ví, kolik musí vynaložit úsilí (případ (i)).

Pokud je mužovo chování po obědu "nejvyšší kvality" nevhodné (například okamžitě usne), musí žena dávat pozor, aby takový oběd nepřipravila (případ (ii)).



Obrázek 3.2.7: Stoprocentní oběd \implies žádná práce.



... a pokud takovému muži manželka připraví vždy nejvyšší kvalitu, je ztracena ;-)

3.2.8 Ukázky (ne)spojitosti v bodě

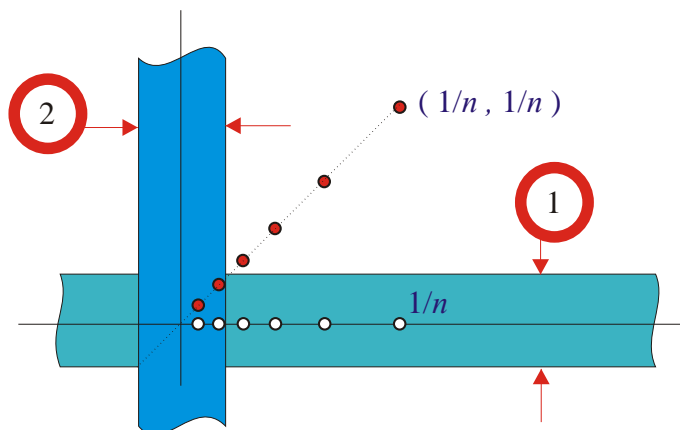
Funkce $(\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{n}, \text{ jinde } 0)$ je spojitá v nule.

Křivé racionální síto (racionální $\frac{p}{q} \rightarrow \frac{1}{q}$, iracionální $\rightarrow 0$) má v každém bodě limitu (a je spojitá mimo \mathbb{Q}).

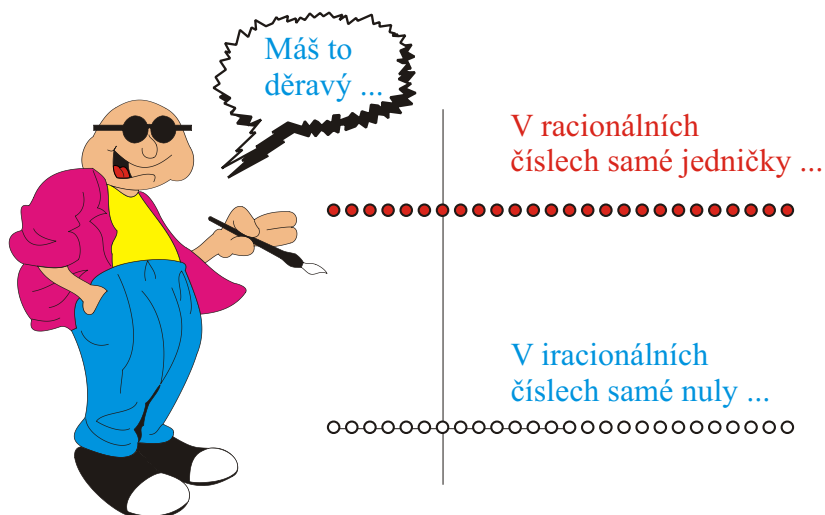
(B.Riemann \sim 1850)

Rovné racionální síto (racionální $\rightarrow 1$, iracionální $\rightarrow 0$) není spojitá nikde.

(G.P.L.Dirichlet \sim 1840)



Obrázek 3.2.8: Spojitost (spravedlivost) v počátku.



Obrázek 3.2.8: Rovné racionální síto.

3.2.9 Věta (Jiné definice spojitosti v bodě)

Funkce f je v bodě a spojitá, právě tehdy když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x, y platí

$$|x - a| < \delta \quad \& \quad |y - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad .$$

(A.L.Cauchy 1821, B.Bolzano 1817)



Jedná se opět o podmínku ustálenosti.

Funkce f je v bodě a spojitá právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ platí (při $n \rightarrow \infty$)

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a) \quad .$$

(H.E.Heine 1872)



... a kdo má rád posloupnosti může zapomenout na ε a δ .

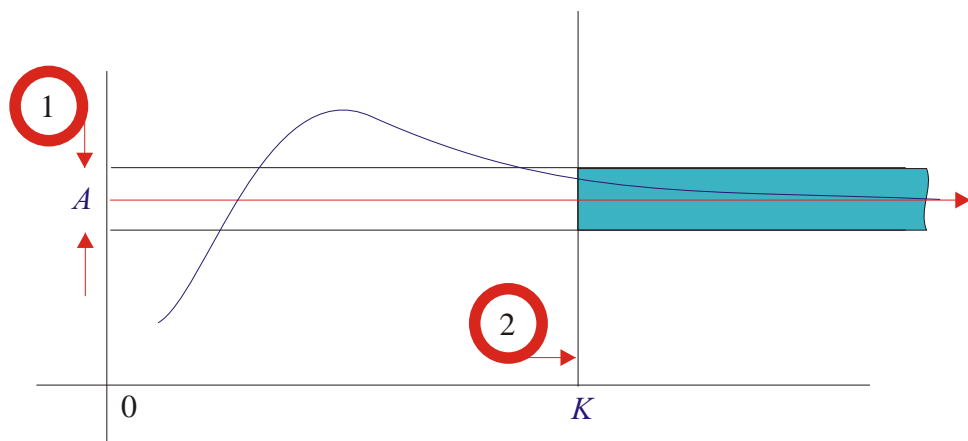
3.2.10 Definice (Nevlastní limity)

Nazveme pro $K \in \mathbb{R}$ interval $(K, +\infty)$ (prstencové K -) **okolí nekonečna** (úplná okolí nyní nepoužíváme). Pak jde definice limity (NE definice spojitosti!) rozšířit na "nevlastní limity" a "nevlastní body" (tím jsou míněny $+\infty$ a $-\infty$).

Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ když ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje okolí $U(a)$ bodu a takové, že $f(U(a)) \subset U(A)$.



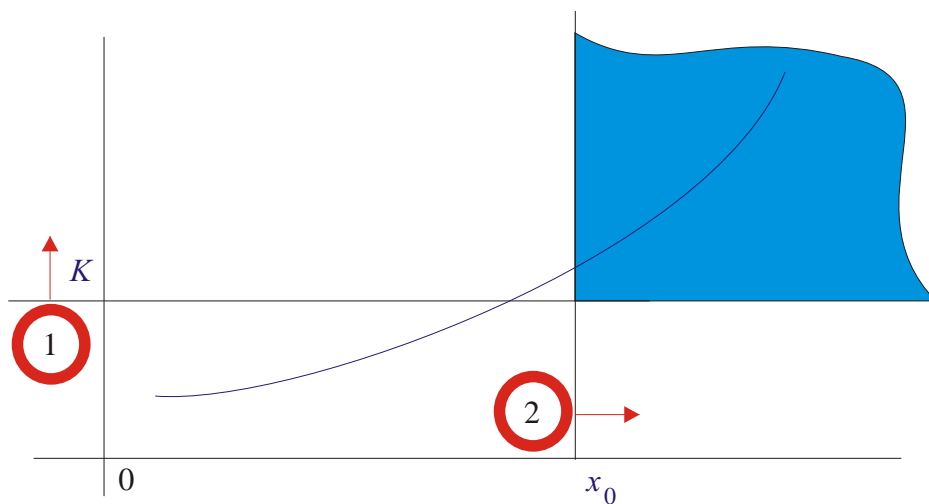
SUPERDEFINICE :-)



Obrázek 3.2.10: Vlastní limita v nevlastním bodě.

3.2.11 Věta (O nevlastních limitách)

Algebraické operace s limitami jdou dělat i v případě "nevlastních limit" a "nevlastních bodů" (pokud příslušná operace s výsledkem dává smysl).



Obrázek 3.2.10: Nevlastní limita v nevlastním bodě.

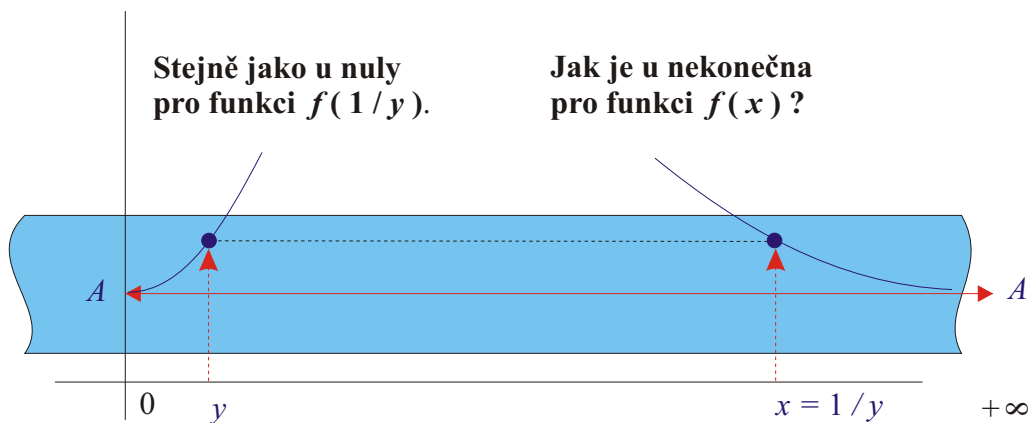


Kuchařka:

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty,$$

3.2.12 Věta (O nevlastních bodech)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \iff \lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right) = A.$$



Obrázek 3.2.12: Jak se dostat do konečna.

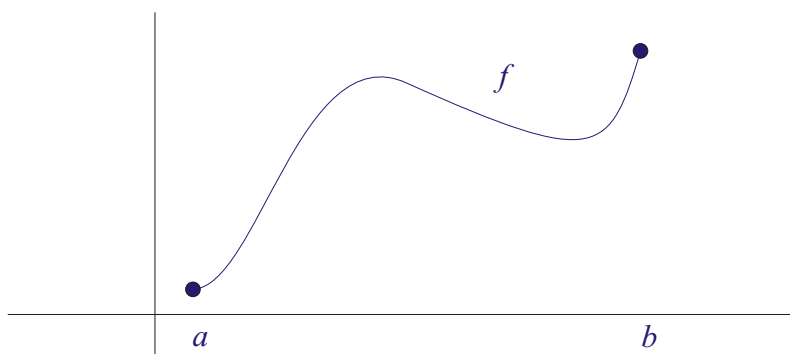


... takové triky ovšem můžeme dělat kdykoliv !!!

Důkaz: Jde o použití věty o limitě složené funkce (nebo přímo z definice). ■

3.2.13 Definice (Spojitost na intervalu)

Řekneme, že funkce je **spojitá na intervalu**, když je spojitá v každém jeho bodě (v krajních bodech jednostranná spojitost).



Obrázek 3.2.13: Funkce spojitá na intervalu je vždy takto "hezká".



Definice spojitosti na intervalu dává výsledky, které již přesně odpovídají našim představám o "hodné funkci" !!!

Následující věty ukazují dobré vlastnosti funkce spojitě na intervalu.

3.2.14 Věta (Omezenost spojitě funkce)

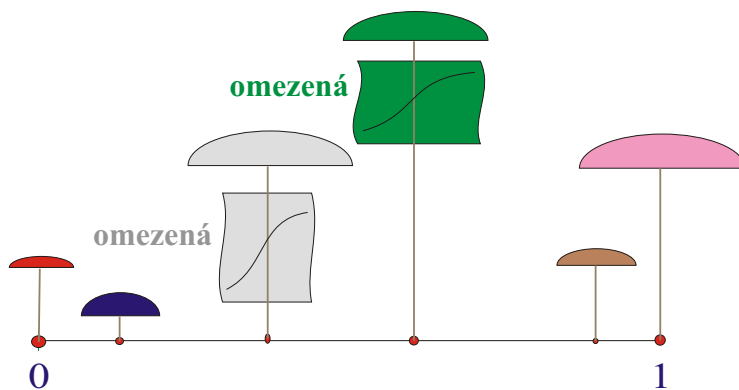
Na uzavřeném omezeném intervalu plyne ze spojitosti funkce její omezenost.

Důkaz: Necht' f je spojitá na $[0, 1]$. Každému bodu $x \in [0, 1]$ přiřadíme okolí $U(x)$, na němž je f omezená (ze spojitosti v bodě x).

Použijeme nyní plážové lemma (slunečník = $U(x)$). ■



... nebo sestrojíme množinu $\{x \in [0, 1] : f \text{ je omezená na } [0, x]\}$ a použijeme axiom o suprém.



Obrázek 3.2.14: Slunečníky omezenosti.

3.2.15 Věta (Spojitá funkce nabývá maxima)

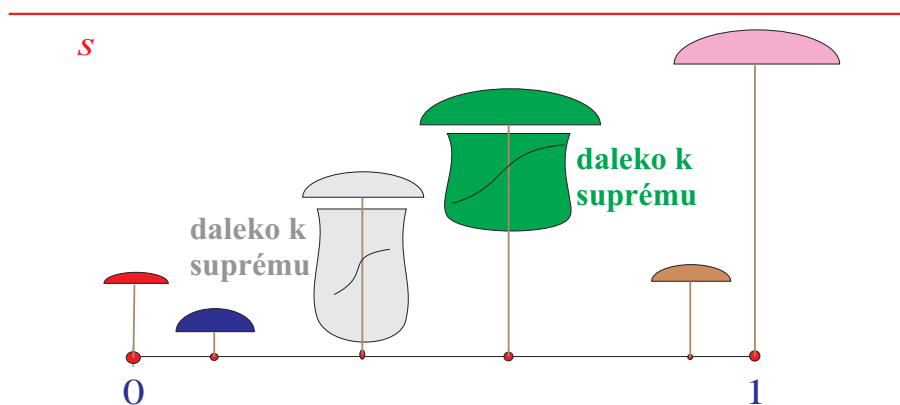
Na uzavřeném omezeném intervalu spojitá funkce nabývá maxima.

(K.Weierstrass 1861)



Spojitosť v bodě je vlastnost lokální. Spojitosť na intervalu je použití spojitosti v bodě globálně, výsledkem je vytvoření pěkné křivky. Souboj lokálních a globálních vlastností je důležitá část matematické analýzy.

Důkaz: Použijeme z předchozí věty omezenost množiny M funkčních hodnot funkce f na intervalu $[0, 1]$. Označme s suprénum M . Necht' se hodnoty s nenabývá v žádném bodě intervalu $[0, 1]$. Odvodíme spor. Každému bodu $x \in [0, 1]$ přiřadíme okolí $U(x)$, na němž f nedosahuje do poloviny vzdálenosti od $f(x)$ k s . (ze spojitosti v bodě x).



Obrázek 3.2.15: Slunečníky malosti.

Použijeme nyní plážové lemma (slunečník = $U(x)$). Získáme spor s tím, že s je suprénum (s konečně mnoha slunečníky najdeme "falešné suprénum"). ■



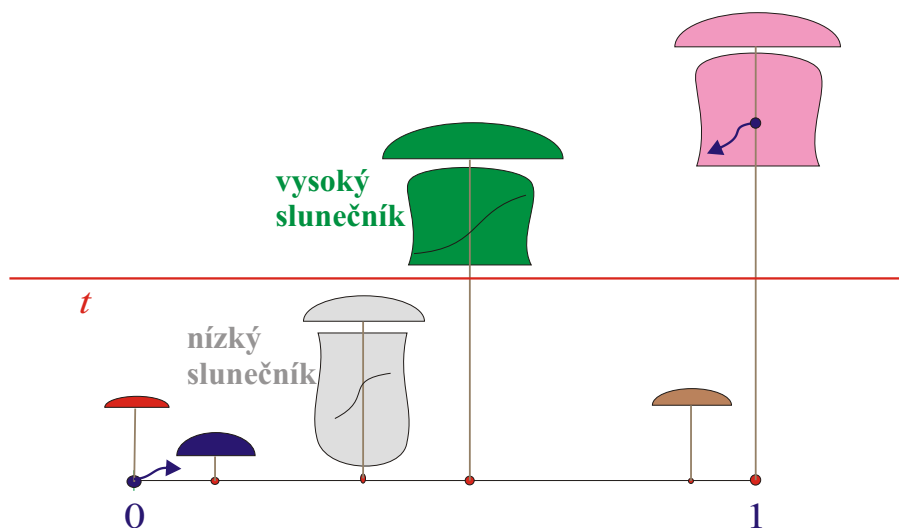
... anebo označíme funkci $F(x) = 1/(s - f(x))$, bude to kladná spojitá funkce, tedy bude omezená konstantou K , pak $f(x) < s - 1/K$ a opět máme "falešné suprémum"!

3.2.16 Věta (Spojitá funkce nabývá mezihodnot)

Funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu nabývá všech mezihodnot.

(B.Bolzano 1817)

Důkaz: Nechť f je spojitá na $[0, 1]$ a $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Zvolme $t \in (0, 1)$. Nechť f nenabývá hodnotu t v žádném bodě intervalu $[0, 1]$, odvodíme spor. Každému bodu $x \in [0, 1]$ v němž $f(x) > t$ pak přiřadíme okolí $U(x)$, na němž je $f > t$ (ze spojitosti v bodě x) a nazveme toto okolí "vysoký slunečník". Analogicky každému bodu $x \in [0, 1]$ v němž $f(x) < t$ pak přiřadíme okolí $U(x)$, na němž je $f < t$ (ze spojitosti v bodě x) a nazveme toto okolí "nízký slunečník".



Obrázek 3.2.16: Slunečníky odlišnosti.

Použijeme nyní plážové lemma (slunečník = $U(x)$). Pak alespoň jeden bod pláže pokrývá zároveň vysoký i nízký slunečník, což nelze. Spor. ■

3.2.17 Věta (Spojitost inverzní funkce)

Je-li f spojitá a rostoucí na intervalu J a $f(J) = I$, pak inverzní funkce je spojitá a rostoucí na I .

3.2.18 Definice (Stejnoměrná spojitost)

Řekneme, že funkce f je na intervalu J **stejnoměrně spojitá**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in J$ platí

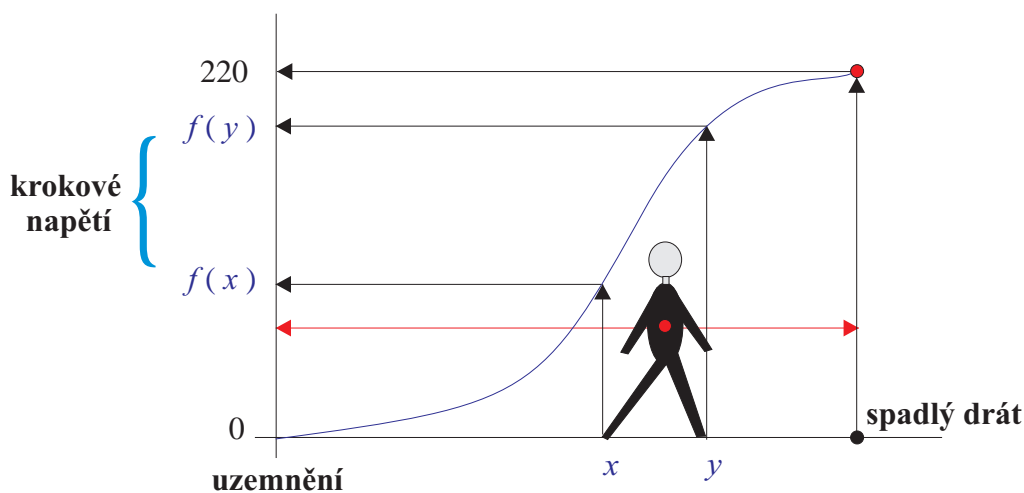
$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

(A.L.Cauchy 1821, B.Bolzano 1817)



Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$
NEZÁVISLE na volbě x . Proto říkáme
 "stejnoměrně".
O B T Í Ž N É !!!

Představme si, že na reálné ose je v každém bodě určité napětí. Pokud funkce určující napětí je stejnoměrně spojitá, můžeme najít délku kroku, se kterou se po reálné ose můžeme (bezpečně) procházet (takzvané "krokové napětí"). Pokud budeme mít požadavek na rozdíl napětí (ε), najdeme velikost kroku (δ).



Obrázek 3.2.18: Stejnoměrnou spojitost poznáme na vlastní kůži.

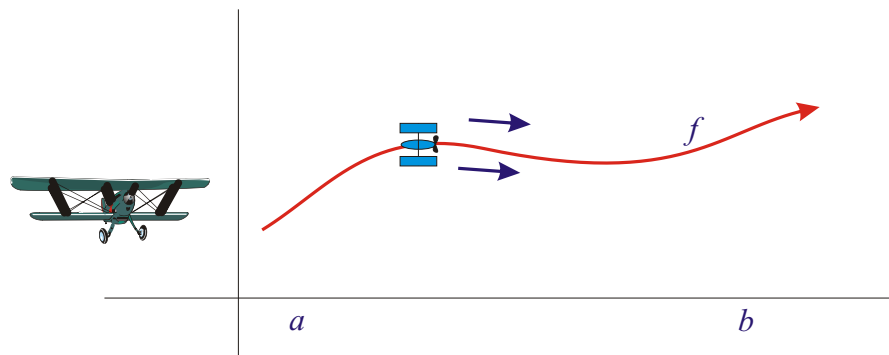


Na každé zadané funkci hned vidíme,
 kde je "nejhorší" místo, kde se bude
 hledat to skutečné δ k zadanému ε .

3.2.19 Definice (Sublinearita)

Řekneme, že funkce f je na intervalu J **sublineární**, pokud existuje $L > 0$ tak, že $\forall x, y \in J$ platí

$$|x - y| \leq L|f(x) - f(y)| .$$

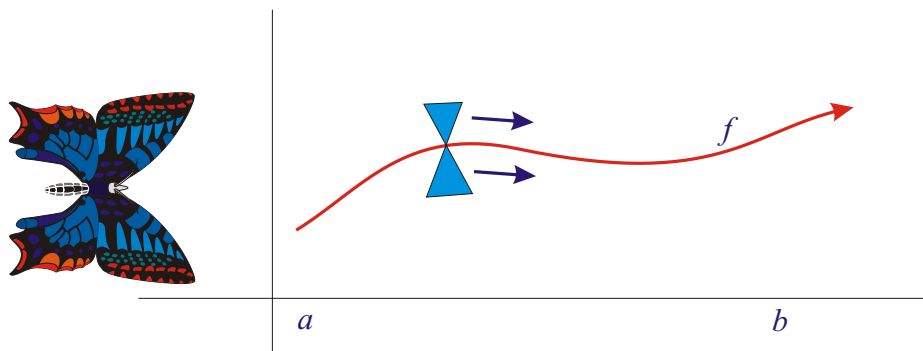


Obrázek 3.2.18: Stejněměrnou spojitost si představujeme tak, že po grafu letí dvojplošník, který se nesmí dotknout grafu dolním ani horním křídlem. Před letem si můžeme upravit letadlo (křídla jsou od sebe vzdálena o ε a jsou dlouhá δ). Pokud se let podaří, je funkce stejněměrně spojitá.

(Lipschitz)



Funkce neroste rychleji než lineární funkce se směrnicí L .



Obrázek 3.2.19: Sublinearitu poznáme podle toho, že na grafu může proletět "motýlek", který má křídla v úhlu odpovídajícím konstantě L tak, že se křídly nedotkne grafu.

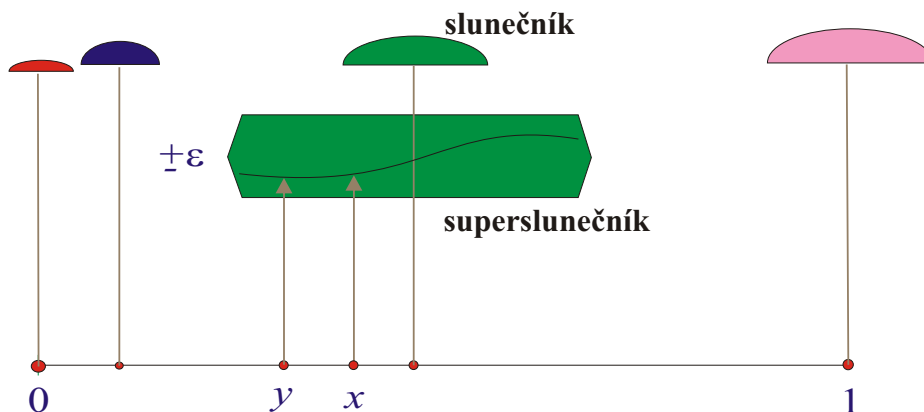


Tedy máme kontrolu růstu globálně na celém definičním oboru. V každém bodu si můžeme sestavit dvě různoběžky vymezující zóny, kde se funkce nemůže vyskytovat.

3.2.20 Věta (O stejněměrné spojitosti)

Funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[0, 1]$ je na $[0, 1]$ stejněměrně spojitá.

Důkaz: Zvolíme $\varepsilon > 0$ a budeme hledat $\delta > 0$. Se zvoleným ε ke každému bodu $x \in [0, 1]$ najdeme $V(x)$ ("superslunečník") z definice spojitosti a přiřadíme bodu x okolí $U(x)$ ("slunečník") se polovičním poloměrem než má $V(x)$.



Obrázek 3.2.20: Konstrukce superslunečníku.

Použijeme plážové lemma a najdeme konečně mnoho slunečníků pokrývajících $[0, 1]$. Položíme δ rovno poloměru nejmenšího vybraného slunečníku. Nyní pro každé dva body vzdálené od sebe maximálně δ najdeme slunečník, pod kterým leží jeden z nich. Pak oba dva leží pod stejným superslunečníkem. ■



... a dostaneme 2ε , což nevádí :-)

Stejněměrná spojitost a sublinearita mají k sobě blízko, ale nejde o totéž.



Když pojedete auto sublineárním způsobem, tak si jde koupit rychloměr takový, který bude vždy ukazovat správně. Když pojedete stejněměrně spojitým způsobem (například $\sqrt[3]{x}$), tak se může každý rychloměr pokazit.

3.2.21 Věty (O spojitosti a stejněměrné konvergenci)

Stejněměrná limita posloupnosti spojitých funkcí je spojitá.

(A.L.Cauchy 1853)

Stejněměrná limita funkcí majících limitu v pevně zvoleném bodě má v tom bodě limitu.

(E.H.Moore 1900, Osgood 1897)

Tedy (při stejnoměrné konvergenci) píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \quad .$$



Taková kouzla se budou používat často.

Nechť posloupnost $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí, která konverguje na intervalu $[0, 1]$ ke spojitě funkci f . Pak konverguje stejnoměrně.

(Dini 1878)

Důkaz: Můžeme předpokládat, že f_n jsou nezáporné a konvergují bodově k nule. Zvolme $\varepsilon > 0$, najdeme v každém bodě "slunečnick" a použijeme plážové lemma. ■

3.3 Derivace

Základní otázkou při zkoumání dějů je rychlost, s jakou probíhají. Zjištění okamžité rychlosti jde jednoduše zvládnout s pomocí jednoduchého limitního procesu. Budeme zkoumat limitu sečen, které odpovídají průměrné rychlosti a které se blíží k tečně grafu. Tato tečna pak odpovídá okamžité rychlosti, derivaci.

3.3.1 Definice (Derivace v bodě)

"Řekneme, že funkce má v bodě derivaci, pokud má graf funkce v daném bodě tečnu."

Matematika je umění dávat stejné jméno různým věcem.
(J.H.Poincaré ~ 1890)

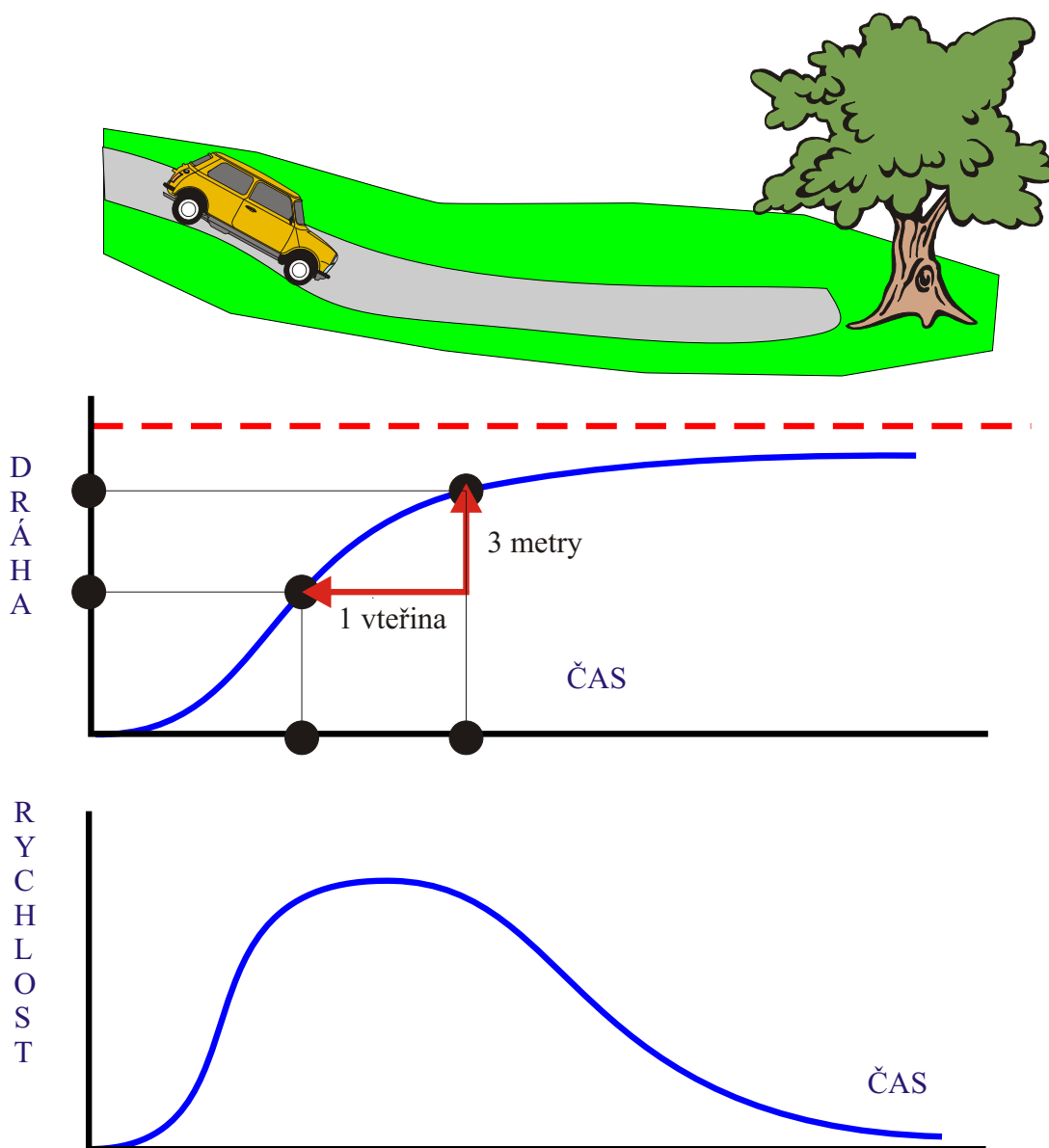
Přesněji řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **derivaci** $f'(x_0)$, pokud existuje (vlastní či nevlastní)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad .$$

Tomuto zlomku se říká **diferenční podíl**. Podobně definujeme i jednostranné derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ jako jednostranné limity diferenčního podílu.

Infinitezimální veličiny nejsou ani konečné veličiny, ani veličiny nekonečně malé, ani to není prostě nic. Nemohli bychom je nazývat duchy zesnulých veličin?

(G.Berkeley 1734)



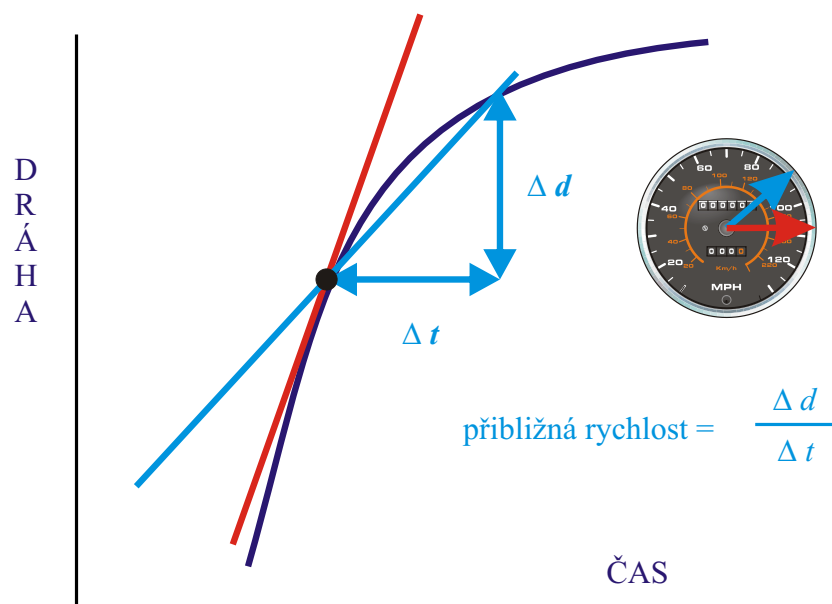
Obrázek 3.3.0: Auto brzdí, aby nenarazilo.

Jak kdo vidí derivaci:

- ⇒ Geometr vidí derivaci jako tečnu, limitu sečen.
- ⇒ Fyzik vidí derivaci jako převodní koeficient pohybu x a $y = f(x)$.
- ⇒ Algebraik vidí derivaci jako podíl, se kterým se dá počítat.
- ⇒ Analytik vidí derivaci jako nedokonalé nahrazení funkce f lineární funkcí.



... a student jako mlýnek, do kterého se dá funkce a po zatočení kličkou vypadne derivace.



Obrázek 3.3.0: Okamžitá rychlost je aproximována průměrnou.

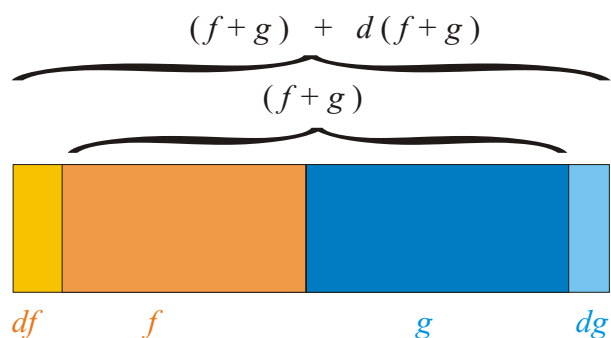
3.3.2 Věty (Pozorování derivace v bodě)

Z vlastní derivace v bodě plyne spojitost v bodě.

Polynomy mají derivaci všude.

Funkce sign a $\sqrt[3]{x}$ mají v počátku nevlastní derivaci.

Derivace součtu je součet derivací.



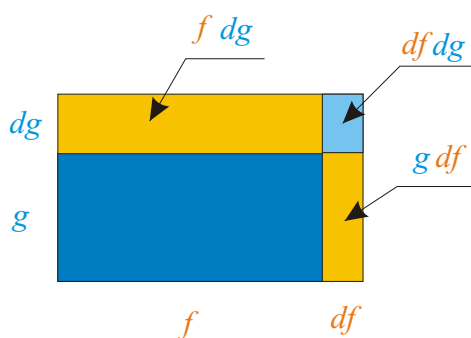
Obrázek 3.3.2: Derivace součtu.

Derivace součinu není součin derivací.

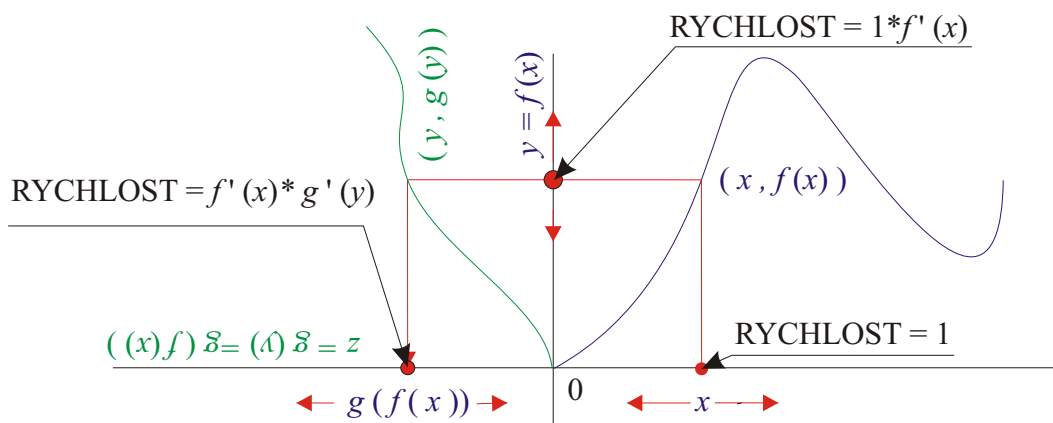


je to z obrázku jasné ?

Derivace složené funkce je součin derivací.



Obrázek 3.3.2: Derivace součinu.



Obrázek 3.3.2: Derivace složené funkce.



... to prostě fyzik "vidí", analytik se však "nezapotí": označí si jako novou funkci rozdíl diferenciálního podílu a funkce, pak se to dosadí a ulimití ...

Derivace inverzní funkce je převrácená hodnota derivace.



... to prostě vidíme z obrázku, nebo použijeme derivaci složené funkce ...
A podobně to zjistíme i pro nevlastní nebo nulovou derivaci :-)

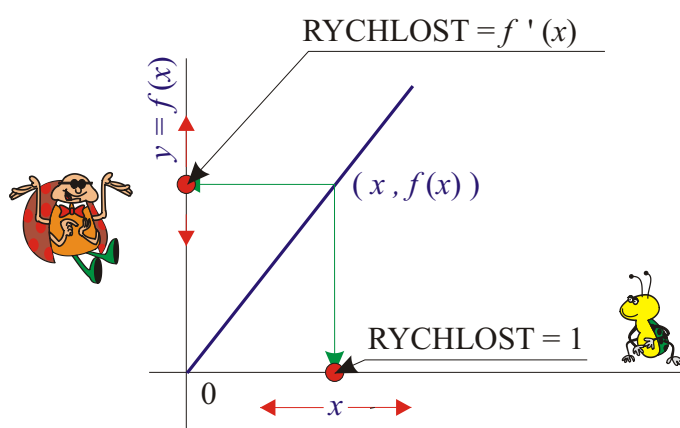
3.3.3 Věty (Pozorování derivace)

Pokud má funkce v bodě kladnou derivaci, je v tom bodě rostoucí.

Pokud má funkce na intervalu nezápornou derivaci, je v tom intervalu neklesající.



Obrázek 3.3.2: Derivace inverzní funkce v praxi.



Obrázek 3.3.2: Derivace inverzní funkce na grafu.



... vidíme, že $f(x) + \varepsilon x$ je rostoucí pro každé ε .

Pokud má funkce na intervalu nulovou derivaci, je v tom intervalu konstantní.



Derivace je vlastně lineární aproximace funkce. Každá rozumná funkce půjde lokálně nahradit konstantou, pro lepší výsledek lze vzít přímkou (derivace), popřípadě parabolou a polynomy vyšších stupňů.

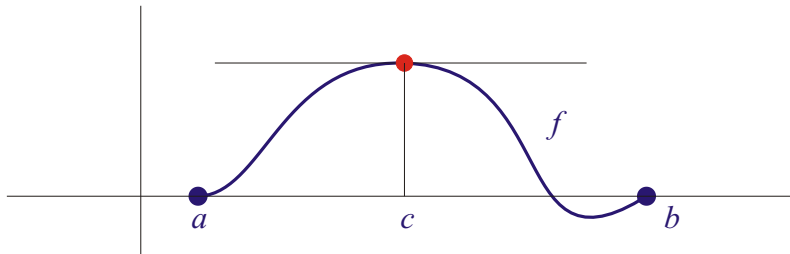
Pokud mají dvě funkce na jednom intervalu stejnou vlastní derivaci, pak se liší o konstantu.

3.3.4 Věty (O tečně ke grafu funkce)

Nechť je f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má na (a, b) derivaci.

- (i) Pokud $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (0, 1)$ takové, že $f'(c) = 0$.

(Rolle 1691)



Obrázek 3.3.4: Existuje nejvyšší (nebo nejnižší) bod s vodorovnou tečnou.



... to je teda jasná tečna ke grafu funkce f !

- (ii) Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

(J.L.Lagrange 1797)



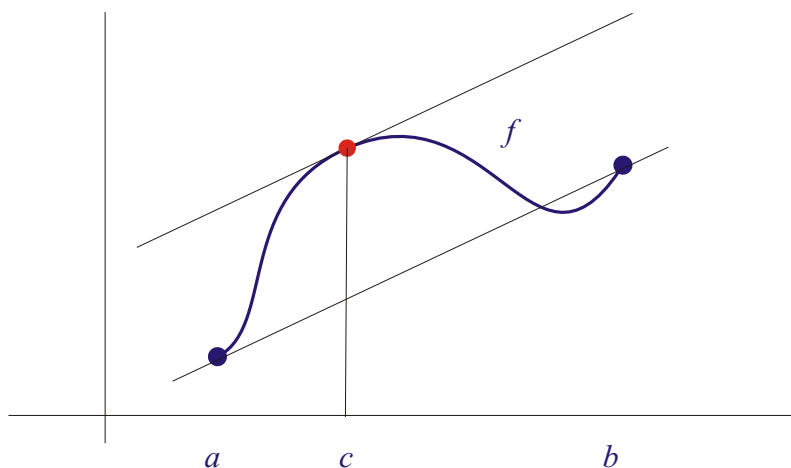
... a je to jenom trochu natočené ...

Pro tato tvrzení se používá název **věta o střední hodnotě**.

3.3.5 Věta (Zobecněná věta o střední hodnotě)

Nechť

- (i) Funkce f, g jsou spojitě na intervalu $[a, b]$.
- (ii) Funkce f má derivaci na intervalu (a, b) .
- (iii) Funkce g má vlastní nenulovou derivaci na intervalu (a, b) .



Obrázek 3.3.4: Existuje dotyk v daném směru.

Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(A.L.Cauchy 1823)

Důkaz: Pro funkci $(f(x) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a)) \cdot (f(b) - f(a))$ použijeme větu o tečně ke grafu funkce. ■

Uvažujme zobrazení z $[a, b]$ do \mathbb{R}^2 s předpisem $x \mapsto (g(x), f(x))$. Jde vlastně o křivku v rovině. Tečna k této křivce ve směru z bodu $(g(a), f(a))$ do bodu $(g(b), f(b))$ má směrnici

$$\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)} = \frac{\frac{f(d) - f(c)}{d - c}}{\frac{g(d) - g(c)}{d - c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



... všimněme si, že "klička" na obrázku nemůže být díky monotonii g

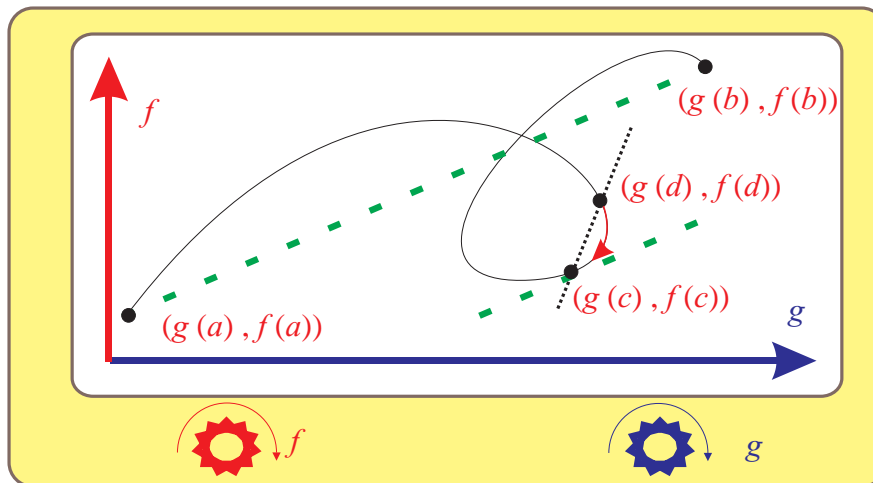
3.3.6 Věta (Pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$)

Nechť funkce f, g mají nulovou limitu v bodě a . Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud existuje limita vpravo.

(J.Bernoulli \sim 1691)



Obrázek 3.3.5: Oblíbená dětská hračka



NEČTE SE: "umíme-li derivovat, nepotřebujeme umět limitit"

Důkaz: Odvodíme podle zobecněné věty o střední hodnotě, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

a zlimitíme pro $x \rightarrow a$. ■



Podobné pravidlo platí i pro $\frac{?}{+\infty}$.

3.3.7 Věta (O jednostranné derivaci)

Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a . Pak platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x),$$

pokud existuje limita vpravo.

Důkaz: Odvodíme z podle věty o tečně ke grafu funkce, že

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c(h))$$

a zlimitíme pro $h \rightarrow a$. ■

3.3.8 Věta (O rozvoji funkce)

Je-li n -tá derivace $f^{(n)}$ spojitá v bodě x_0 , pak existuje právě jeden polynom $T(x) = T_n^{f,x_0}(x)$ tak, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{(x - x_0)^n} = 0 .$$

Polynomu $T(x) = T_n^{f,x_0}(x)$ se říká n -tý **aproximační polynom** funkce f v bodě x_0 .

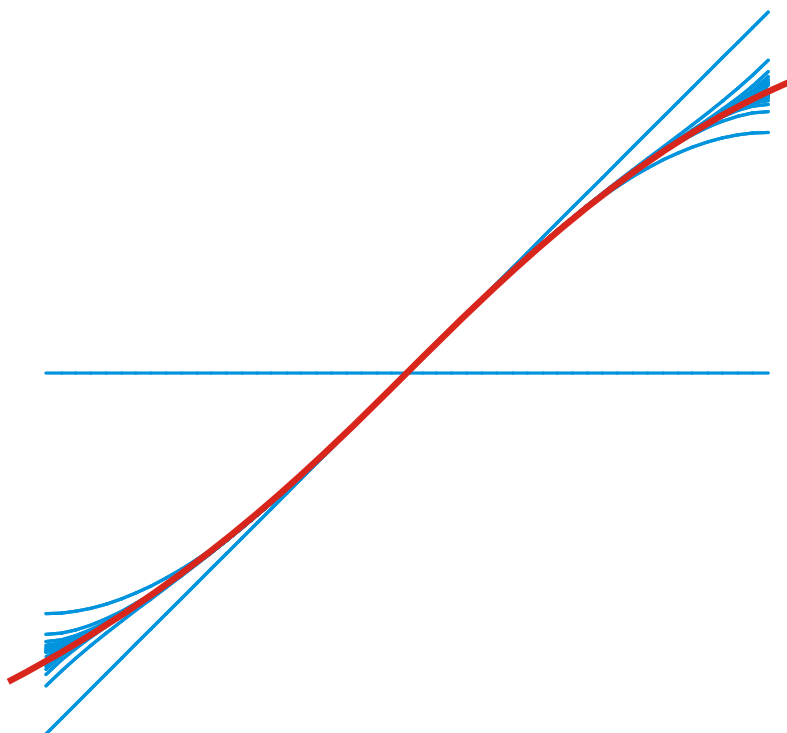
(B.Taylor 1715)

Důkaz: Použijeme pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$ a limitu spočteme. ■



Jedná se o nejlepší aproximaci daného (zde n -tého) řádu. Pro $n = 0$ jde o konstantní funkci, pro $n = 1$ jde o tečnu ke grafu, pro $n = 2$ o parabolu a tak dál. Přesnost "dotyku" grafu f a T se zpřesňuje.

Důkaz: Použijeme pravidlo pro limity $\frac{0}{0}$ a limitu spočteme. ■



Obrázek 3.3.8: Konstantní, lineární, kvadratická, kubická a další aproximace funkce arktangens na intervalu $(-1, 1)$.

Tedy můžeme psát

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

kde \approx znamená, že se jedná o aproximační polynom.

3.3.9 Definice (Symbol "malé o")

Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

píšeme $f(x) = o(g(x))$, pro $x \rightarrow x_0$ a říkáme "ef iks je malé ó gé iks pro iks se blíží k iks nula".

(Landau \sim 1930)



Symbolem o zde vlastně zavádíme lokální pomocnou funkci $o(g(x))$, o které se neví skoro nic, jenom to, že jakási limita je rovna nule. Takových lokálních funkcí se může objevit více, my je můžeme sčítat, násobit a podobně (a není je potřeba nějak rozlišovat, např. "indexovat"). Až bude potřeba o nějakém výrazu něco dokázat, použijeme tu informaci o limitě ...

Například pokud $f(x) = o(x^2)$, pro $x \rightarrow x_0$ a $g(x) = o(x^3)$, pro $x \rightarrow x_0$, pak $(f(x)+g(x)) = o(x^2)$, pro $x \rightarrow x_0$.



Je dobré si myslit, že $f(x) = o(g(x))$, pro $x \rightarrow x_0$ znamená, že f je "řádově mnohem menší" než g poblíž x_0 (což ve skutečnosti doslova neplatí). Pak je pochopitelné $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$.

Takže se dá psát (pro $x \rightarrow x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o(x^n).$$

Zápisu $f - T = o(x^n)$, $x \rightarrow x_0$ říkáme **óčkový tvar zbytku**.

(G.Peano \sim 1900)



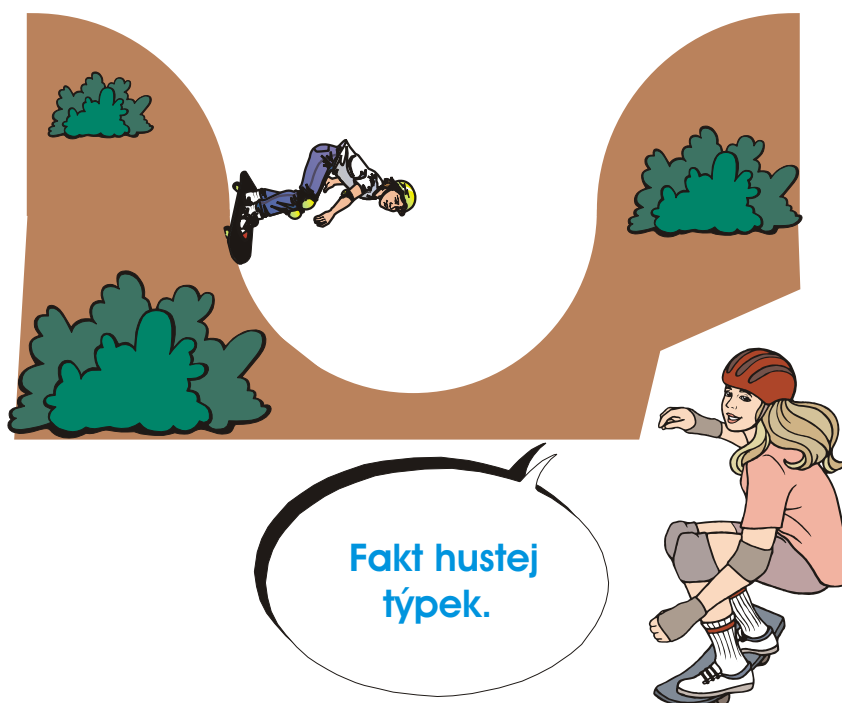
Pomocí vět o střední hodnotě lze najít další tvary zbytku.

3.3.10 Věta (Pravidla počítání rozvoju)

Aproximační polynom součtu je součet aproximačních polynomů sčítanců. Podobně pro součin, skládání a podobné operace.

3.4 Průběh funkce

Průběh daného děje a jeho zkoumání je užitečnou pomůckou k přežití. Pokud je situace přehledná, pomůže pouhý pohled. Pokud jsme v nepřehledné situaci, pomůže počítání derivací a podobně.

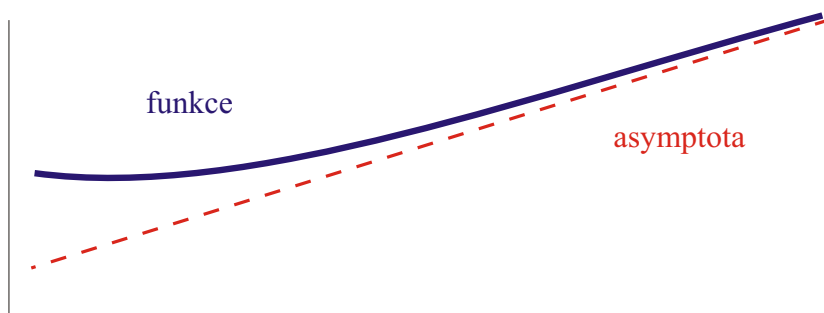


Obrázek 3.4.0: Ano, to je výkon. Mládenec dosáhl inflexního bodu na grafu funkce a bodu obdivu v dívčím srdci.

3.4.1 Definice (Průběh funkce)

Průběhem funkce rozumíme "promyšlený obrázek" grafu funkce, na kterém je vidět (pokud pro danou funkci existují):

- ⇒ definiční obor, obor hodnot
- ⇒ hodnoty (limity) ve významných bodech
- ⇒ monotonie
- ⇒ spojitost
- ⇒ derivace
- ⇒ **asymptota** (přímka přimykající se ke grafu funkce v nevlastním bodě)



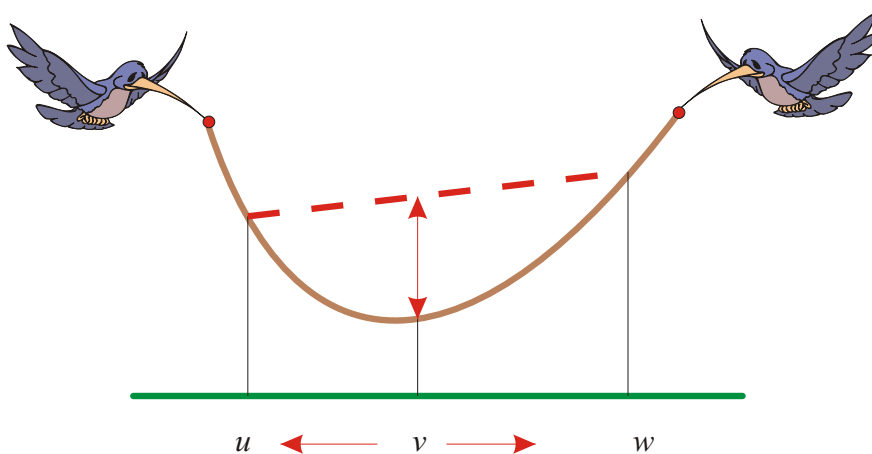
Obrázek 3.4.1: Asymptota. Jde o "téměř linearitu" u nekonečna.

⇒ **konvexita** (graf funkce je pod sečnou)



... funkce je "ohnutá" nahoru

⇒ **konkavita** (graf funkce je nad sečnou)

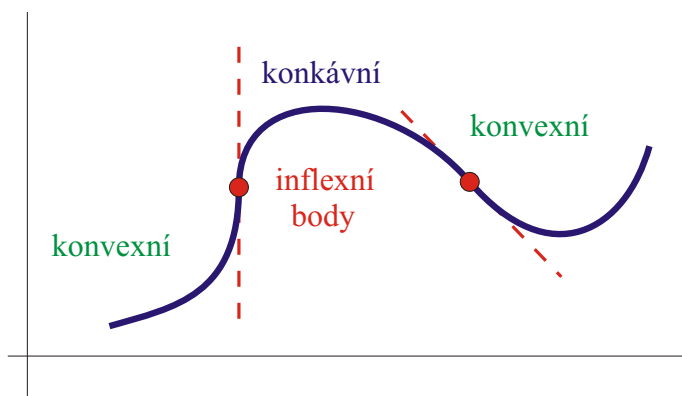


Obrázek 3.4.1: Konkavní funkce. Je to tažené nahoru.



... funkce je "ohnutá" dolů

⇒ **inflexní bod** (kde se mění konvexita na konkavitu).



Obrázek 3.4.1: Jde o samozřejmosti.

3.4.2 Věty (O konvexitě)

Je-li druhá derivace kladná, je první derivace rostoucí a funkce je konvexní. Konvexní funkce je spojitá ve vnitřních bodech intervalu.

3.4.3 K čemu se hodí průběh funkce

Pomocí vyšetření průběhu funkce lze dokázat řadu tvrzení, např.:

- ⇒ nerovnost ($\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$),
- ⇒ existence řešení rovnice ($\exists x \in \mathbb{R} : x^3 - 2 = 0$).

Pro hledání nulových bodů funkce můžeme použít například metodu půlení intervalů nebo metodu tečen.

Je mnoho lidí, kteří čtou jen proto, aby nemuseli přemýšlet.
(G.Ch.Lichtenberg ~ 1770)

3.4.4 Věta (Exponenciála je pěkná funkce)

Existuje právě jedna funkce \exp definovaná na \mathbb{R} , pro kterou platí

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Této funkci budeme říkat **exponenciála**.

(A.L.Cauchy 1821)

Jde o funkci

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

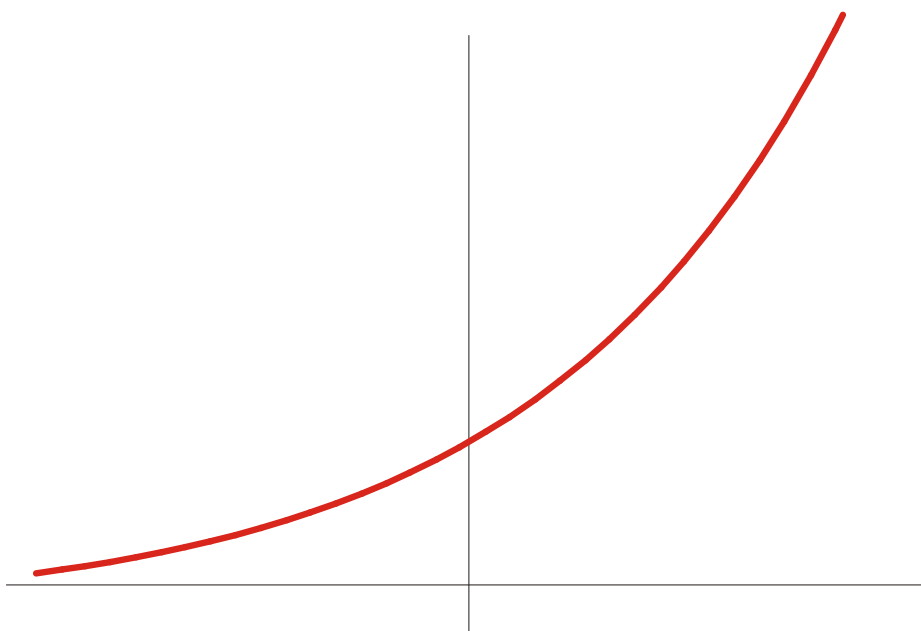
kde limita i řada konvergují lokálně stejnoměrně na \mathbb{R} .

A dále samozřejmě platí řada věcí

- Exponenciála je rovna své derivaci.
- Exponenciála je rostoucí a konvexní na \mathbb{R} .
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.



... součin řad !



Obrázek 3.4.4: Graf exponenciály.

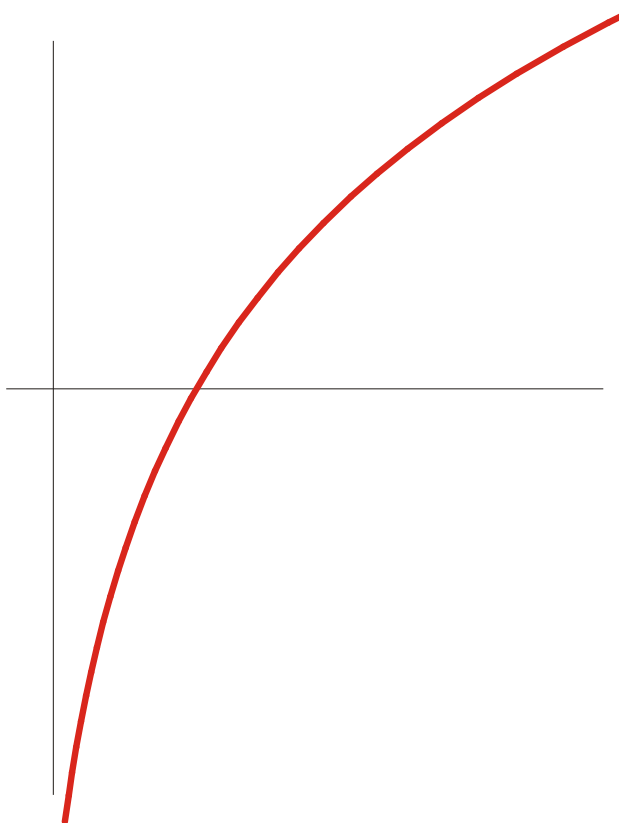
Inverzní funkci k exponenciále nazveme **logaritmus**.

(L.Euler ~ 1748)



... přirozeně ;-)

Označíme $e = \exp(1)$



Obrázek 3.4.4: Graf logaritmu.



... a jde ukázat, že
 $e - 1 - 1/2! - \dots - 1/n! < 1/n \cdot n!$, z
 čehož vyplývá, že číslo e je iracionální
 "drobeček"

a budeme místo $\exp(x)$ používat i zápis e^x . Podobně definujeme

$$a^b = \exp(b \cdot \log(a))$$

pro kladné a ,

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \cdot \log(f(x)))$$

pro kladnou funkci g . Této operaci se říká **obecná mocnina**.



A většina jde provést i v \mathbb{C}

A vzorečky se množí samy od sebe:

$$\exp(x + i \cdot y) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) ,$$

kde funkce **sinus** a **kosinus** se definují

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots , \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Ke starým známým \sin , \cos , tg , cotg přidáme inverzní funkce **arkus sinus**, ... a nic nám nemůže chybět ke spokojenosti.

Číslo π je nejmenší kladné reálné číslo, pro které je sinus nulový.



Zcela nedůležitou, ale praktickou otázkou je, zda se neměla konstanta π zvolit dvojnásobná, pak by řada vzorečků vypadala lépe (např. plný úhel by byl π , kvadrant by byl $\pi/4$, platilo by $e^{\pi \cdot i} = 1$). To, co platí, je $e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$.

Kapitola 4

Integrace podle jedné proměnné



ato kapitola se zabývá měřením rovinných objektů. Budeme zkoumat velikost plochy rovinného obrazce omezeného funkcí. Překvapivým zjištěním bude to, že velikost plochy pod grafem funkce souvisí s operací derivování a k ní inverzní operaci integrování.

4.1 Konečně aditivní integrace

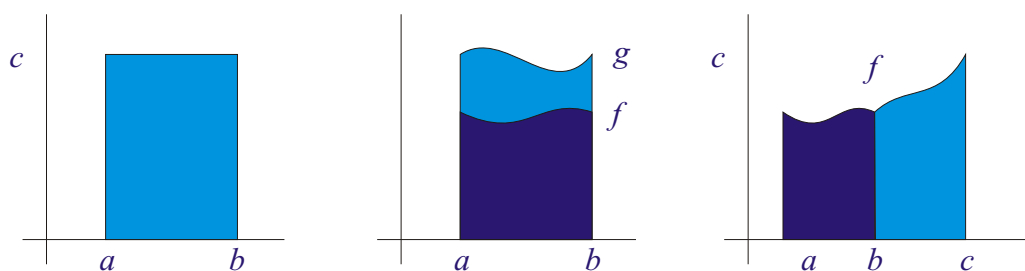
4.1.1 Definice (Plocha pod grafem funkce)

Označme \mathcal{M} množinu

$$\mathcal{M} = \{(f, [a, b]) : \text{funkce } f \text{ je spojitá na intervalu } [a, b]\} .$$

Zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **plocha pod grafem funkce**, pokud platí následující podmínky:

- (i) $\mathcal{P}(c, [a, b]) = c \cdot (b - a)$... (pro konstantní funkci se rovná obsahu obdélníka),
- (ii) pokud $f \leq g$, pak $\mathcal{P}(f, [a, b]) \leq \mathcal{P}(g, [a, b])$... (pro menší funkci je plocha menší),
- (iii) pokud $a < b < c$, pak $\mathcal{P}(f, [a, b]) + \mathcal{P}(f, [b, c]) = \mathcal{P}(f, [a, c])$... (sousední plochy lze sčítat).



Obrázek 4.1.1: Základní vlastnosti plochy pod grafem funkce.

Ukážeme za okamžik, že toto zobrazení skutečně existuje a je určeno jednoznačně.



Kdo to vidí již teď má vyhráno.

4.1.2 Definice (Konečně aditivní integrace)

Pro funkci f omezenou na omezeném intervalu $[a, b]$ a **dělení** intervalu

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

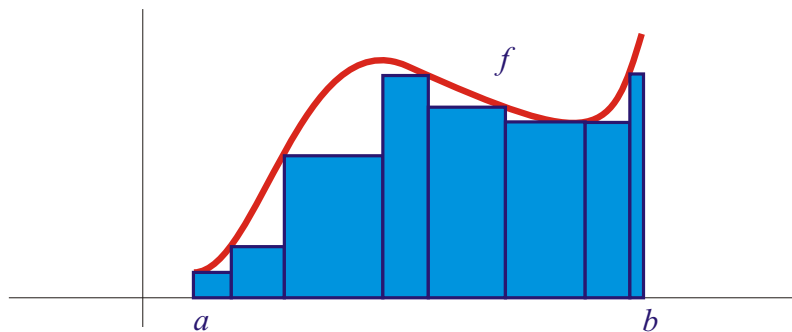
na $n \in \mathbb{N}$ intervalů definujeme

- ⇒ **horní funkci** \overline{fD} jako nejmenší funkci větší než (nebo rovnou) f , která je konstantní na vnitřcích intervalů D
- ⇒ **horní součet** $S(D, f)$ plochu mnohoúhelníka pod grafem funkce \overline{fD} (sjednocení obdélníků)
- ⇒ **horní integrál** jako infimum horních součtů přes všechna dělení intervalu $[a, b]$:

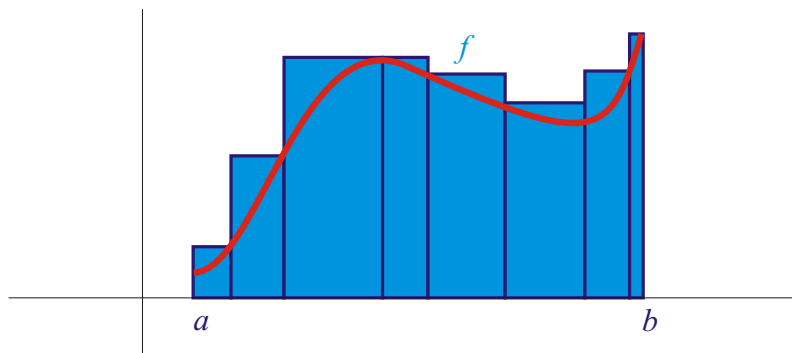
$$\int_a^b f = \inf\{S(D, f) : D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

- ⇒ **dolní funkci** \underline{fD} jako nejmenší funkci menší než (nebo rovnou) f , která je konstantní na vnitřcích intervalů D
- ⇒ **dolní součet** $s(D, f)$ plochu mnohoúhelníka pod grafem funkce \underline{fD} (sjednocení obdélníků)
- ⇒ **dolní integrál** jako supremum dolních součtů přes všechna dělení intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f = \sup\{s(D, f) : D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$



Obrázek 4.1.2: Dolní součet.



Obrázek 4.1.2: Horní součet.

Když se dolní a horní integrál rovnají, říkáme, že funkce je **integrovatelná** a společnou hodnotu nazveme **integrál** funkce f na intervalu $[a, b]$ a značíme

$$\int_a^b f.$$

(B.Riemann \sim 1850)

Tak, jak je snadné derivování, tak ne-snadné je integrování. Navíc někdy ani nevíme, jestli integrál lze najít.
(J.Bernoulli \sim 1720)

Budeme pojem integrovatelnosti ještě rozšiřovat, pro jednoznačnost můžeme takto integrovatelné funkci říkat **integrovatelná podle dělení**.

Všimněme si, co se stane, když místo daného dělení D použijeme jeho **zjemnění** $D^* \supset D$.

4.1.3 Věta (Kritérium integrovatelnosti)

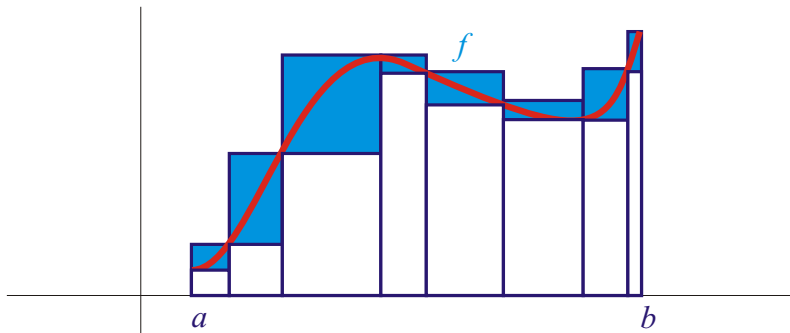
Funkce f je integrovatelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

4.1.4 Věta (Plocha pod grafem funkce)

Plocha pod grafem funkce se rovná integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\mathcal{P}(f, [a, b]) = \int_a^b f.$$



Obrázek 4.1.3: Integrovatelnost se pozná podle toho, že se dá graf funkce pokrýt obdélníčky s libovolně malou celkovou plochou.

Celek je víc než součet součástí.
(Aristotelés ze Stageiry ~ -350)

Důkaz: Necht' je dána spojitá funkce f . Zvolíme $\varepsilon > 0$. Ke každému bodu x přiřadíme okolí $U(x)$ (slunečník), na němž se hodnoty liší nejvýše o 2ε . Použijeme plážové lemma a najdeme konečně mnoho slunečnicků pokrývajících interval $[a, b]$. Krajní body těchto slunečnicků určují dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že se horní a dolní součet pro toto dělení neliší více než $2\varepsilon(b - a)$. Tedy je funkce integrovatelná. Další vlastnosti se dokáží snadno. ■

4.1.5 Věta (Integrace je lineární funkcionál)

Jsou-li f a g integrovatelné, pak je integrovatelný i jejich součet $f + g$ a integrál ze součtu je roven součtu integrálů. Podobně pro násobek reálným číslem.

Důkaz: Vezmeme společné zjemnění dělení pro f a pro g . ■

4.1.6 Věta (Spojitá funkce nezkaží integrovatelnost)

Je-li f integrovatelná na $[a, b]$ a g spojitá na \mathbb{R} , pak je $g(f)$ integrovatelná.



Je třeba zvolit šikovně dělení pro funkci f , pomocí funkce g :
 $\varepsilon \Rightarrow \delta \Rightarrow D : S(D) - s(D) < \delta^2$.

4.1.7 Výhody a nevýhody

Výhody:

- Integrál je jednoduchý.
- Spojité funkce jsou integrovatelné.

Nevýhody:

- ⇒ Neumí integrovat neomezené funkce.
- ⇒ Neumí integrovat na neomezených intervalech.
- ⇒ Neumí limitní přechod (integrál z limitní funkce).



U charakteristické funkce množiny racionálních čísel (rovné racionální síto) jsou nastaveny "ochranné štíty" před "útokem" shora. Takhle můžeme "ochránit" každou funkci zdola i shora - a horní funkce a dolní funkce se vůbec nic nedozví o naší funkci ...

A co znamená ta "konečná aditivita"? Integrace probíhá na konečně mnoha sousedních intervalech a je lineární pro konečně mnoho sčítanců.

4.2 Spočetně aditivní integrace

4.2.1 O počítání drobných

Představme si člověka, který počítá své kapesní úspory tak, že vytahuje z kapsy drobné mince a postupně připočítává jejich hodnotu k průběžnému výsledku (konečně aditivní integrace).

Nabízí se ovšem i jiný postup, vyndat všechny mince a roztrdit je podle hodnoty, pak sčítat podle jednotlivých druhů mincí součiny "počet x hodnota" ("jinak" aditivní integrace).

Převáděno do řeči integrace tato "jiná" integrace znamená připustit jiné množiny než pouze intervaly. Pro tyto množiny musíme být schopni zjistit jejich velikost, "pochvou míru". Pokud to dovedeme, pak se "jiná" integrace definuje podobně jako konečně aditivní integrace.

4.2.2 Definice (Plocha pod grafem funkce)

Označme \mathcal{N} množinu $\mathcal{N} = \{(f, A) : \text{funkce } f \text{ je nezáporná na množině } A\}$. Zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **plocha pod grafem funkce**, pokud platí následující podmínky:

- (i) $\mathcal{P}(f, A) \geq 0$, $\mathcal{P}(0, A) = 0$ (je nezáporná).
- (ii) $\mathcal{P}(f_1 + f_2 + \dots, A) = \mathcal{P}(f_1, A) + \mathcal{P}(f_2, A) + \dots$
(pro funkce je spočetně aditivní).
- (iii) Pro disjunktní A_1, A_2, \dots platí

$$\mathcal{P}(f, A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mathcal{P}(f, A_1) + \mathcal{P}(f, A_2) + \dots$$

(přes disjunktní množiny je **spočetně aditivní**).



Například je to hodnota funkce v pevném bodě, to jste chtěli?

4.2.3 Definice (Nulová míra)

Podmnožina \mathbb{R} se nazývá **nulová množina**, pokud jde pokrýt spočetně mnoha otevřenými intervaly, součet jejichž délek je libovolně malý.

Řekneme, že vlastnost \mathcal{V} platí **skoro všude**, pokud \mathcal{V} platí až na množinu nulové míry.



Racionální čísla jsou nulovou množinou. Taková množina by neměla z hlediska plochy hrát žádnou roli a plocha pod grafem charakteristické funkce množiny racionálních čísel (která je rovna nule skoro všude) by měla být nulová.

4.2.4 Definice (Vnější míra)

Soubor podmnožin \mathbb{R} nazveme σ -algebra, pokud je uzavřený na doplňky, spočetná sjednocení a spočetné průniky.

Prvek nejmenší σ -algebry obsahující otevřené množiny nazveme **topologická množina**.

(É. Borel ~ 1920)

Prvek nejmenší σ -algebry obsahující všechny topologické a všechny nulové množiny nazveme (pochtivě) **měřitelná množina**.



To je nejpřímější metoda a nejpochtivější !!! Jde to i jinak ...

Pro otevřenou množinu $G = \cup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n)$ definujeme $m(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n)$.

Pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ definujeme

$$m^*(A) = \inf\{m(G) : G \text{ je otevřená nadmnožina } A\}$$

a tomuto číslu říkáme **vnější míra** množiny A .



Poctivější než vnější míru jen tak ne-najdeme ...

4.2.5 Věta (Spočetná subaditivita vnější míry)

Vnější míra m^* splňuje

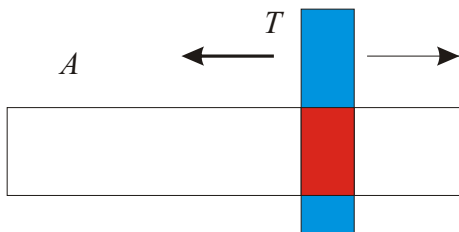
- (i) $m^*(\emptyset) = 0$
- (ii) jestliže $A \subset B$, pak $m^*(A) \leq m^*(B)$
- (iii) $m^*(f, A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq m^*(f, A_1) + m^*(f, A_2) + \dots$
(je **spočetně subaditivní**).

4.2.6 Věta (Charakteristika měřitelných množin)

Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) Množina A je měřitelná
- (ii) Pro každé ε existuje otevřená množina G tak, $m^*((A \setminus G) \cup (G \setminus A)) < \varepsilon$
- (iii) $m^*(T) = m^*(T \cap A) + m^*(T \setminus A)$ platí pro každou ("testovací") $T \subset \mathbb{R}$

(Carathéodory \sim 1920)



Obrázek 4.2.6: Použití testovací množiny.



... technické podmínky :-)

4.2.7 Věta (Míra na měřitelných množinách)

Platí následující

- (i) $m^*(\emptyset) = 0$
- (ii) Pro A měřitelnou platí $m^*(A) \geq 0$
- (iii) Pro vzájemně disjunktní měřitelné množiny A_i platí

$$m^*(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = m^*(A_1) + m^*(A_2) + \dots$$

(je **spočetně aditivní** na disjunktních měřitelných množinách).

Vnější míře na měřitelných množinách budeme říkat (**poctivá**) **míra** a na systému měřitelných množin budeme místo m^* psát m .

4.2.8 Věta (Axiom výběru a neměřitelná množina)

Definujeme na $[0, 1]$ relaci $x \approx y$ pokud rozdíl $x - y$ je racionální. Pomocí axiomu výběru z každé třídy ekvivalence vybereme jeden prvek a z těchto prvků sestavíme množinu A , která je neměřitelná.

Důkaz: Jestliže je A měřitelná, pak musí být míra nulová, protože sjednocení spočetně mnoha jejich posunutých kopií se vejde do omezeného intervalu. To ale nejde, protože interval $[0, 1]$ se vejde do sjednocení spočetně mnoha posunutých kopií množiny A . ■

Změř všechno, co je měřitelné a učiň měřitelným to, co není.

(G.Galilei ~ 1620)

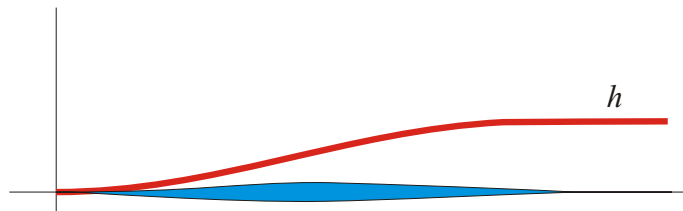
4.2.9 Definice (Míra na tlustější reálné ose)

Místo $b - a$ jako velikosti intervalu $[a, b]$ lze vzít i jinou "velikost". Pro libovolnou neklesající zprava spojitou funkci h (určující "tloušťku" reálné osy v daném místě) můžeme za "velikost" intervalu $[a, b]$ vzít číslo $h(b) - h(a)$, pak vnější míra, měřitelné množiny a míra se definuje zcela stejně jako v předchozím textu. Takto vzniklá nová "míra" se nazývá **nepoctivá míra** a dá se s ní také vybudovat teorie integrace.

(T.J.Stieltjes ~ 1913)



Dvakrát měř, jednou ŘEŠ!



Obrázek 4.2.9: Jak se nad tlustší reálnou osou integruje s pomocnou funkcí h .

4.2.10 Definice (Měřitelné funkce)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **měřitelná**, pokud jsou "vrstevnicové množiny" $\{x : f(x) > c\}$ měřitelné pro každé $c \in \mathbb{R}$.

4.2.11 Věta (O měřitelných funkcích)

Součet, součin, maximum, limes superior, ... měřitelných funkcí je měřitelný.



A nyní již nic nebrání spočetně aditivním hrátkám.

4.2.12 Definice (Spočetně aditivní integrace)

Pro množinu A je **charakteristická funkce množiny** A funkce definovaná předpisem $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ jinde.

Součet tvaru

$$s(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \chi_{A_j}(x)$$

nazveme **jednoduchá funkce** a pokud jsou množiny A_j měřitelné a funkce s nezáporná, definujeme (**pocitivý**) **integrál** předpisem

$$\int s = \sum_{j=1}^n c_j \cdot m(A_j) .$$

Pro nezápornou měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f = \sup \left\{ \int s : 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá měřitelná funkce} \right\} .$$



Zde vystačíme s aproximací zdola, horní nic nového nedá.

Pro měřitelnou funkci f definujeme $f^+ = \max(f, 0)$ (**kladná část**) a $f^- = -\min(f, 0)$ (**záporná část**), s nimi dokončíme definici integrálu

$$\int f = \int f^+ - \int f^- .$$

Je-li hodnota obor integrálů vpravo konečná, říkáme funkci f (**pochtivě**) **integrovatelná**.

(H. Lebesgue 1901 a 1902, F. Riesz 1912 a 1920)

Příroda se směje potížím při integrování.

(P.S.de Laplace ~ 1790)

4.2.13 Věty (Limitní chování spočetně aditivní integrace)

Věta o monotónní konvergenci: Nechtě $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ jsou měřitelné funkce. Pak

$$f_n \rightarrow f, n \in \mathbb{N} \implies \int f_n \rightarrow \int f, n \rightarrow +\infty$$

(B.Levi 1906)

Věta o limes inferior: Nechtě f_1, f_2, \dots jsou nezáporné měřitelné funkce. Pak

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n .$$

(P.J.L.Fatou 1906)

Důkaz: Funkce $g_n = \inf_{i \geq n}$ tvoří neklesající posloupnost konvergující k f . ■

Věta o majorizované konvergenci: Nechtě f_1, f_2, \dots jsou nezáporné měřitelné funkce. Nechtě existuje integrovatelná g tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$. Pak

$$f_n \rightarrow f, n \in \mathbb{N} \implies \int f_n \rightarrow \int f, n \rightarrow +\infty$$

(H.Lebesgue 1910)

Důkaz: Použijeme pro $f_n + g$ a $g - f_n$ větu o limes inferior. ■



Jde o nejdůležitější vlastnosti integrálu, jeho schopnost spolupracovat s limitními přechody. Je namístě nasávat sílu spočetně aditivního integrování :-)

4.2.14 Věty (Vztah měřitelných a spojitých funkcí)

Věta o spojitosti skoro všude: Nechť je f měřitelná na intervalu $[0, 1]$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce g na intervalu $[0, 1]$ tak, že se f a g liší na množině míry menší než ε .

(N.N.Luzin 1912)

Jak dokazovat věty "chytrým způsobem"?

(Griffith)

Důkaz: Napíšeme funkci f jako řadu z jednoduchých funkcí. Každou z nich zapproximujeme spojitou funkcí a řada z těchto funkcí konverguje stejnoměrně ke spojitě funkci. ■

Věta o polospojité aproximaci: Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $[0, 1]$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují funkce g, h tak, že $g < f < h$ a platí

$$\int (h - g) < \varepsilon .$$

Funkce g, h lze volit tak, že g je **shora polospojitá** (v každém bodě x ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí, kde jsou funkční hodnoty $< g(x) + \varepsilon$), že h je **zdola polospojitá** (v každém bodě x ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí, kde jsou funkční hodnoty $> g(x) - \varepsilon$).

(Vitali, Carathéodory \sim 1920)

Důkaz: Funkci f vyjádříme řadou z charakteristických funkcí měřitelných množin. Tyto množiny aproximujeme zevnitř uzavřenými množinami (z nich se udělá funkce g) a zvenčí otevřenými množinami (z nich se udělá funkce h). ■

4.2.15 Definice (Integrace na podmnožině)

Pro měřitelnou $A \subset \mathbb{R}$ definujeme

$$\int_A f = \int f \cdot \chi_A .$$

Početivou míru budeme označovat m a integraci podle početivé míry

$$\int f \, dm$$

a pro $A = [a, b]$ budeme psát

$$\int_A f = \int_a^b f \, dm = \int_a^b f(x) \, dx .$$

Pro A měřitelnou a f integrovatelnou rozšíříme definici plochy pod grafem funkce předpisem

$$\mathcal{P}(f, A) = \int_A f \, dm .$$

4.2.16 Věta (Plocha pod grafem funkce)

Plocha pod grafem funkce \mathcal{P} má vlastnosti:

- (i) \mathcal{P} je nezáporná pro nezáporné funkce.
- (ii) \mathcal{P} je spočetně aditivní pro nezáporné měřitelné funkce.
- (iii) \mathcal{P} je spočetně aditivní pro disjunktní měřitelné množiny.

4.3 Základní věta analýzy

4.3.1 Věta (Základní věta analýzy)

Je-li funkce F derivovatelná v každém bodě intervalu $[a, b]$ a její derivace F' integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pak platí

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) .$$



Každý čtenář, který došel až sem a který vidí tuto krásu, je mi velmi drahý.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, pak pro

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

(neurčitý integrál funkce f) platí $F'(x) = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ a tedy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) .$$



Při derivování nahradíme (v podstatě lineární) funkci $x \mapsto cx$ konstantou c . Při integrování konstanty c dostaneme lineární funkci cx a jsme zase doma.

Důkaz: Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 . Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje δ -okolí bodu x_0 tak, že na něm platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pak na δ -okolí bodu x_0 máme odhad

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| < \varepsilon ,$$

čili $F'(x_0) = f(x_0)$. Dokázali jsme spojitý případ. Nyní dokážeme první část věty.

K $\varepsilon > 0$ najdeme zdola polospojitou aproximaci g na intervalu $[a, b]$ splňující $g > F'$ a

$$\int_a^b g(x) dx < \int_a^b F'(x) dx + \varepsilon$$

podle věty o polospojité aproximaci.

Dokážeme později, že

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(x) dx < \int_a^b F'(x) dx + \varepsilon,$$

z toho pro $\varepsilon \rightarrow 0$ dostaneme

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b F'(x) dx$$

a zopakováním celého postupu pro $-F$ dostaneme i opačnou nerovnost, což je znění věty.

Zbývá dokázat, že

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(t) dt.$$

K tomu dokážeme pro $x \in [a, b]$ podobnou nerovnost

$$F(x) - F(a) \leq \int_a^x g(t) dt,$$

nebo ještě snáze nerovnost

$$F(x) - F(a) \leq \int_a^x g(t) dt + c \cdot (x - a)$$

pro kladnou malou konstantu c (kterou pak pošleme k nule). Tato nerovnost platí pro $x = a$. Všimneme si, že levá strana roste lokálně v okolí bodu x nanejvýš jako lineární funkce se směrnici $F'(x) + c$, pravá strana lokálně roste (díky polospojitosti funkce g) jako lineární funkce se směrnici $g(x) + c > F'(x) + c$, tedy vidíme, že nerovnost zůstane platit na celém intervalu $[a, b]$. ■



Kouzlo věty spočívá v tom, že dovedeme spočítat plochu pod grafem funkce F' , tedy že platí

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

4.3.2 Definice (Integrace podle základní věty analýzy)

Nechť pro konečnou funkci f na intervalu (a, b) existuje funkce F tak, že platí $F'(x) = f(x)$ na (a, b) . Definujeme (pokud dává pravá strana smysl)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+)$$

a nazýváme výslednou hodnotu (**primitivním**) **integrálem** funkce f na (a, b) .

(I.Newton ~ 1665)

Dosud jsme používali integrál podle dělení a jeho rozšíření poctivý integrál. Primitivní integrál není rozšířením. Existují primitivně integrovatelné funkce, které nejdou poctivě integrovat (např. $\int \sin(x)/x$ a naopak ($|\sin(x)|$)). Pokud je daná funkce integrovatelná více způsoby, dávají stejný výsledek.

4.3.3 Definice (Primitivní funkce)

Funkci F nazýváme **primitivní funkce** k funkci f na intervalu J , pokud $F'(x) = f(x)$. Množinu primitivních funkcí (lišících se navzájem o konstantu) k funkci f označujeme tradičně

$$\int f(x) dx$$

a při výpočtech lze psát

$$\int f(x) dx = F(x) + c, x \in J$$

nebo

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), x \in J.$$

4.3.4 Věty (O primitivních funkcích)

Každé dvě primitivní funkce na tomtéž intervalu se liší o konstantu.



Definice primitivního integrálu nazývávisí na volbě primitivní funkce.

Primitivní funkce k součtu je součet primitivních funkcí.

Ke spojitě funkci existuje primitivní funkce.

Primitivní funkce na dvou sousedních intervalech jdou "slepovat".

4.3.5 Věta (Integrace po částech)

Nechť známe primitivní funkce k f a g :

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), x \in J, \quad \int g(x) dx \stackrel{c}{=} G(x), x \in J.$$

Pak platí rovnost

$$\int f(x)G(x) dx + \int F(x)g(x) dx \stackrel{c}{=} F(x)G(x), x \in J,$$

existuje-li alespoň jedna primitivní funkce vlevo.

Důkaz: Jde o derivování součinu vpravo. ■



Po částech zde znamená, že zvlášť integrujeme jednotlivé činitele a pak si výsledek vhodně namícháme. Jde o přepracování poučky o derivování součinu funkcí.

4.3.6 Věta (Integrace pomocí derivovatelné substituce)

Nechť I a J jsou otevřené intervaly a zobrazení $\varphi : J \rightarrow I$ je na a má konečnou nenulovou derivaci v J .

Platí-li

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t), t \in J, \text{ např. } \int \exp(t) \cdot \frac{1}{2} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \exp(t), t \in \mathbb{R}$$

pak (zde máme $x = \varphi(t) = (t - 1)/2$, $t = \varphi^{-1}(x) = 2x + 1$)

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), x \in I, \text{ např. } \int \exp(2x + 1) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \exp(2x + 1), x \in \mathbb{R}.$$

Platí-li

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), x \in I, \text{ např. } \int x^7 dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{8} x^8, x \in \mathbb{R}.$$

pak (zde máme $x = \varphi(t) = t^3 + 1$, nepotřebujeme $\varphi' \neq 0$)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), t \in J, \text{ např. } \int (t^3 + 1)^7 \cdot 3t^2 dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{8} (t^3 + 1)^8, t \in \mathbb{R}.$$

Je-li f spojitá na $[A, B]$ a pro $t \in [\alpha, \beta]$ platí $A \leq \varphi(t) \leq B$, označíme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \text{ např. } \int_1^2 x^7 dx = \int_0^1 (t^3 + 1)^7 \cdot 3t^2 dt.$$



Jde o přepsání věty o derivaci složené funkce.

4.3.7 Věta (Kritéria integrovatelnosti)

Srovnávací kritérium: je-li $f \leq g \leq h$ na intervalu $[a, b)$ a funkce f a h mají konečný primitivní integrál, pak jej má konečný i funkce g .

První součinné kritérium: Nechť funkce f je spojitá a má omezenou primitivní funkci v $[a, b)$, nechť g má vlastní derivaci a je klesající v $[a, b)$, $g(b-) = 0$. Pak existuje primitivní integrál ze součinu fg na $[a, b)$.

(G.P.L.Dirichlet 1840)

Druhé součinné kritérium: Nechť funkce f je spojitá a má primitivní integrál v $[a, b)$, nechť g má vlastní derivaci a je monotónní a omezená $[a, b)$. Pak existuje primitivní integrál ze součinu fg na $[a, b)$.

(N.H.Abel 1863)

Jak se hodně naučit? Studujte mistry,
ne jejich žáky.

(N.H.Abel ~ 1829)

Důkaz: Použije se podmínka ustálenosti pro konečnou limitu funkce a integrace po částech. ■

4.3.8 Funkce derivovatelné skoro všude

Budeme nyní usilovat o další verzi základní věty analýzy. V její formulaci a odvozování se bude podstatným způsobem objevovat derivování (zejména monotónních funkcí) skoro všude. Často se používá následující "skoro pokrývací lemma".

4.3.9 Věta (O konečném skoro pokrytí)

Nechť množina $A \subset \mathbb{R}$ konečné míry je pokryta souborem S intervalů. Nechť je každý bod A obsažen v libovolně malém intervalu systému S . Pak v S existuje konečný podsoubor disjunktních intervalů pokrývajících A až na množinu libovolně malé míry.

(Vitali)

Důkaz: V každém kroku si vezmeme interval alespoň poloviční délky ze "supremální" délky mezi "použitelnými" intervaly. Tak sestavíme posloupnost intervalů I_1, I_2, \dots , jejichž délky tvoří konvergentní řadu. Pokud si vezmeme do konečného podsouboru tolik, aby zbytek řady poloměrů byl $< \varepsilon$, pak pětinašobně zvětšené zbývající intervaly pokrývají zbytek, tedy náš konečný podsoubor nepokryl míru $< 5\varepsilon$. ■

4.3.10 Věta (Derivace monotónní funkce)

Monotónní funkce má derivaci skoro všude.

(G.Faber 1910, G.C.Young a W.H.Young 1911)

Důkaz: Nechť je f neklesající na $[a, b]$. Ukážeme, že množina $A = \{x \in [a, b] : f'_+(x) > c > d > f'_-(x)\}$ má nulovou míru. Nechť je $m(A) = s > 0$, odvodíme spor.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Množinu A skoro (až na ε) pokryjeme (podle předchozí věty o konečném skoro pokrytí) konečně mnoha intervaly $(x_n - h_n, x_n)$, na nichž funkce f nevzroste o více než

$$d \cdot \sum h_n < d \cdot (s + \varepsilon) .$$

Sjednocení těchto intervalů opět skoro pokryjeme konečně mnoha intervaly $(y_n, y_n + k_n)$, na nichž funkce f vyroste o více než

$$c \cdot \sum k_n > c \cdot (s - 2\varepsilon) .$$

Tedy

$$c \cdot (s - 2\varepsilon) < d \cdot (s + \varepsilon)$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$, Tedy $s = 0$, spor.

Podobně bychom ukázali totéž i pro jednostranná limes superior a limes inferior diferenčních podílů (horní a dolní jednostranná derivovaná čísla). Vhodnou volbou c a d dokážeme, že množina, kde se rovnají všechna derivovaná čísla, má v intervalu $[a, b]$ plnou míru. ■

4.3.11 Definice (Funkce omezené variace)

Řekneme, že u funkce f je na intervalu $[a, b]$ **omezená variace**, pokud existuje konstanta M , že pro každé dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| < M .$$

4.3.12 Věta (O omezené variaci)

Funkce má omezenou variaci právě když lze napsat jako rozdíl dvou neklesajících funkcí.

(C.Jordan 1881)

Důkaz: Pro dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y$ máme

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|^+ = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|^- + f(y) - f(a) .$$

Pak vezmeme suprémum přes všechna dělení a dostaneme $R(y) = K(y) + f(y) - f(a)$ (kde R je neklesající a K nerostoucí). ■

4.3.13 Definice (Absolutní spojitost)

Řekneme, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ **absolutně spojitá**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje δ tak, že pro disjunktní intervaly $[x_k, x'_k]$ platí

$$\sum_{k=1}^n |x_k - x'_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x'_k)| < \varepsilon .$$

4.3.14 Věta (O absolutní spojitosti)

(i) Absolutně spojitá funkce má omezenou variaci.

Důkaz: Zvolíme $\varepsilon > 0$, najdeme δ a najdeme $K > (1 + b - a)/\delta$. ■

(ii) Má-li absolutně spojitá funkce nulovou derivaci skoro všude, pak je konstantní.

Důkaz: K $\varepsilon > 0$ najdeme δ z absolutní spojitosti. Množinu nulových bodů derivace skoro pokryjeme až na množinu míry δ konečně intervaly, na nichž se neroste rychleji, než " ε ". Na zbytku se také neroste více než (celkově) " ε ". ■

4.3.15 Věta (Základní půlvěta analýzy)

Je-li funkce F neklesající na intervalu $[a, b]$, pak skoro všude na intervalu $[a, b]$ existuje její derivace F' , ta je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b F'(x) dx \leq F(b) - F(a) .$$

Důkaz: Existence derivace F' skoro všude plyne z věty o derivaci monotónní funkce. Rozšířme funkce F konstantou $F(b)$ pro $x > b$ a položme

$$g_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n} .$$

Pak $g_n \rightarrow F'$ skoro všude, tedy je F' měřitelná. Navíc je $g_n \geq 0$, tedy podle věty o limes inferior

$$0 \leq \int_a^b F'(x) dx \leq \liminf \int_a^b g_n(x) dx \leq F(b) - F(a) .$$

4.3.16 Věta (Základní věta analýzy - verze "skoro všude")

Je-li funkce F absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$, pak skoro všude na intervalu $[a, b]$ existuje její derivace F' , ta je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) .$$

(H.Lebesgue 1904)

Důkaz: Je-li F absolutně spojitá, má konečnou variaci, je rozdílem dvou neklesajících funkcí a existuje skoro všude F' . Pak

$$|F'(x)| \leq F'_1(x) + F'_2(x)$$

a

$$\int_a^b |F'(x)| dx \leq \int_a^b F'_1(x) dx + \int_a^b F'_2(x) dx \leq F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a)$$

podle základní půlvěty, tedy je F' integrovatelná.

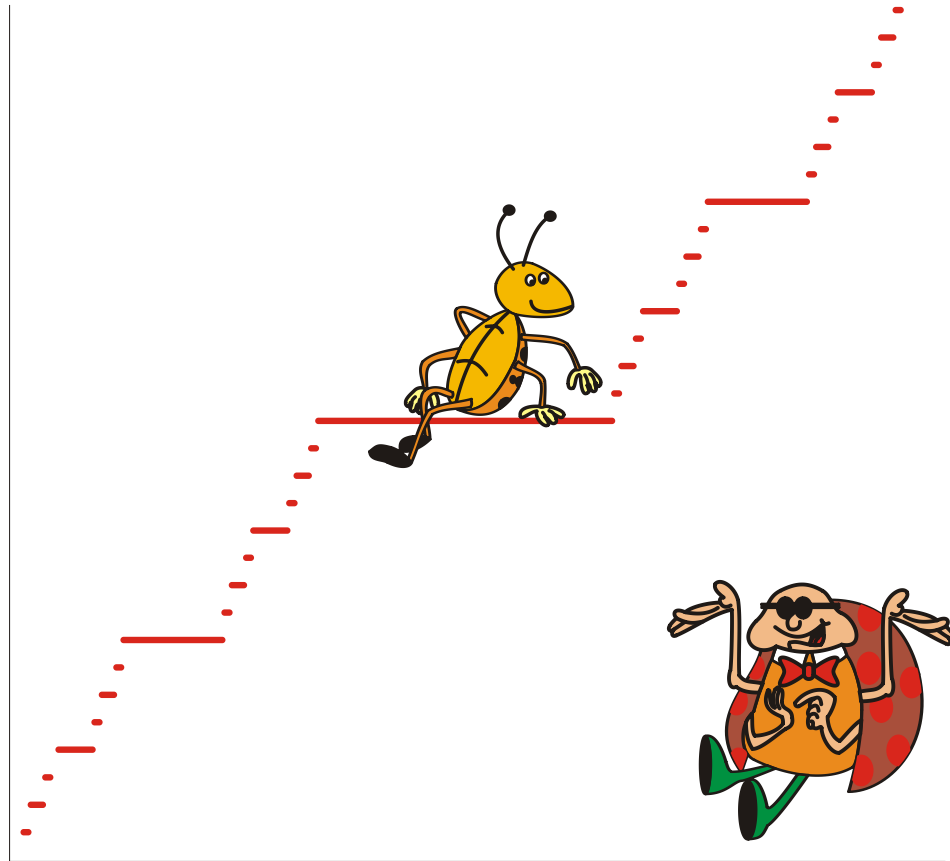
Nechť je $G(x) = \int_a^b F'(t) dt$. Pak je G absolutně spojitá, tedy $F - G$ je absolutně spojitá a její derivace je skoro všude nulová. Tedy $F = G$. ■

Představa, že by platilo obecně

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

pro každou funkci F , není správná. K tomu stačí zkusit **děbelské schody**, které mají nulovou derivaci skoro všude.

(G.Cantor ~ 1910)



Obrázek 4.3.16: Funkce má derivaci rovnou nule skoro všude.

4.3.17 Věta (Základní věta analýzy - verze "singulární")

Má-li funkce F omezenou variaci na intervalu $[a, b]$, pak existuje funkce G s derivací rovnou nule skoro všude a existuje skoro všude derivace F' , ta je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí že

$$F(x) = G(x) + \int_a^x F'(t) dt .$$

Funkci G říkáme **singulární část** funkce F . Pak platí

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) + \int_a^b F'(x) dx .$$

4.3.18 Poznámka o absolutní spojitosti

Vidíme, že v každé monotónní funkci je "schována" singulární část a absolutně spojitá část. To samé platí pro funkce s omezenou variací. Pro srovnání se nyní můžeme podívat na podobnou situaci s měrami.

4.3.19 Definice (Absolutní spojitost míry)

Funkci ze systému \mathcal{A} podmnožin reálné osy do $(-\infty, +\infty]$ budeme nazývat **znaménková míra** na \mathcal{A} , pokud je spočetně aditivní na disjunktních množinách \mathcal{A} a nulová na prázdné množině.

Řekneme, že míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře m , pokud je pro nulovou množinu A míra μ nulová: $(m(A) = 0 \implies \mu(A) = 0)$.

4.3.20 Věta (O absolutní spojitosti měr)

Jestliže f je nezáporná integrovatelná funkce, pak funkce μ definovaná předpisem

$$\mu(A) = \int_A f \, dm$$

je absolutně spojitá vzhledem k m .

Naopak, pokud je konečná míra μ absolutně spojitá vzhledem k m , pak existuje integrovatelná funkce f tak, že

$$\mu(A) = \int_A f \, dm$$

pro všechny měřitelné množiny A .

(J.Radon \sim 1913, Nykodým)

4.3.21 Věta (Integrace pomocí sublineární substituce)

Nechť I a J jsou otevřené množiny a funkce $\varphi : J \rightarrow I$ je lokálně sublineární, nechť f je měřitelná na $\varphi(J)$ a $E \subset J$ je měřitelná množina. Definujeme $N(x, \varphi, E)$ jako počet prvků množiny $E \cap \varphi^{-1}(x)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} N(x, \varphi, E) f(x) \, dx = \int_E f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt .$$



Sublinearita deformuje slušným způsobem.

Důkaz: Ze sublinearity φ plyne derivace φ skoro všude. Zvolíme f nejprve jako charakteristickou množinu měřitelné funkce. Pečlivým odhadováním ... dokážeme větu. ■

Kapitola 5

Funkce více proměnných



Techniku pro zkoumání dějů v prostoru rozvineme v této kapitole. Spojitost a derivace jsou zde pouze přeformulovány do více rozměrů, více proměnných.

5.1 Pojem funkce a zobrazení více proměnných

5.1.1 Definice (Body, vzdálenost a okolí v \mathbb{R}^n)

Prvek v \mathbb{R}^n budeme nazývat **bod** a označovat $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Vzdálenost mezi body \mathbb{R}^n budeme značit

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Vzdáleností dvou množin nazýváme infimum vzdáleností jejich bodů. **Okolí** bodu $a \in \mathbb{R}^n$ je množina

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Množina A je **otevřená**, pokud s každým svým bodem obsahuje nějaké okolí. Množina B je **uzavřená**, pokud její doplněk je otevřená množina. Množina bodů, které mají nulovou vzdálenost od množiny A i od jejího doplněku se nazývá **hranice** množiny A a značí ∂A .

Výzkumný pracovník by se při snaze vyjádřit základní zákony přírody v matematickém tvaru měl snažit hlavně o matematickou krásu.

(P.A.M.Dirac 1939)

Postupujeme podobně jako u jedné proměnné. Např. řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_1^{+\infty}$ bodů v \mathbb{R}^n má **limitu** (nebo **konverguje k**) $A \in \mathbb{R}^n$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|x_n - A| < \varepsilon$.

5.1.2 Definice (Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k a jejich zobrazování)

Zkoumáme zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k . Zapisujeme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, \dots, f_k)$, kde $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá j -tá **složka** zobrazení. Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} nazýváme **funkce více proměnných**.

Zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ nejčastěji znázorňujeme jako množinu bodů $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Např. zobrazení $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ nazýváme **šroubovice**.



Obrázek 5.1.2: Prostorové objekty si dělá příroda sama.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nejčastěji znázorňujeme jako množinu bodů $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Této množině budeme říkat **graf funkce**. Např. zobrazení $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ určuje **vzdálenost** bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od počátku $(0, 0)$.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ můžeme znázorňit jako množinu bodů $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ pro vhodnou množinu A a chápeme toto zobrazení jako "deformaci" roviny. Např. zobrazení $P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ nazýváme **polární souřadnice**.



Poklad je zakopán 100 kroků na západ od počátku.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ můžeme znázorňit jako množinu bodů $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w), (u, v, w) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$ pro vhodnou množinu A a chápeme toto zobrazení jako "deformaci" prostoru. Např. zobrazení $S(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ nazýváme **sférické souřadnice**.



$S(430 \text{ světelných let}, 0, \pi/2)$ je Severka.

5.1.3 Definice (Parciální zobrazení a funkce)

Pokud u zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ považujeme za konstantní všechny proměnné až na jednu vybranou (J -tou) proměnnou, nazývá se takto získané zobrazení j -té **parciální**

zobrazení. Např.

$$g(y) = (x_0 + y, y + z_0) \quad \text{kde } f(x, y, z) = (x + y, y + z),$$

je druhé parciální zobrazení.



Jde zde o cosi jako "řez" funkcí ve směru druhé proměnné. Tento řez je funkcí jedné proměnné :-)

5.2 Spojitost

5.2.1 Definice (Spojité v bodě)

Řekneme, že zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ **spojité**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x platí

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Podobně je možné definovat limitu.

Obecně se postupuje velmi podobně jako u jedné proměnné, některé věci jsou někdy formálně komplikovanější.

5.2.2 Věty (Někdy více proměnných nevadí)

Pro zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ platí hodně věcí stejně nebo podobně jako pro funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Například

- ⇒ Polynomy jsou spojité.
- ⇒ Složením spojitých zobrazení vznikne spojité zobrazení.
- ⇒ Spojitá funkce na uzavřené omezené množině nabývá maxima.

5.2.3 Věta (Komplikace nepřináší "kam")

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojité právě když jsou spojité všechny jeho složky $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro $j = 1, \dots, n$.

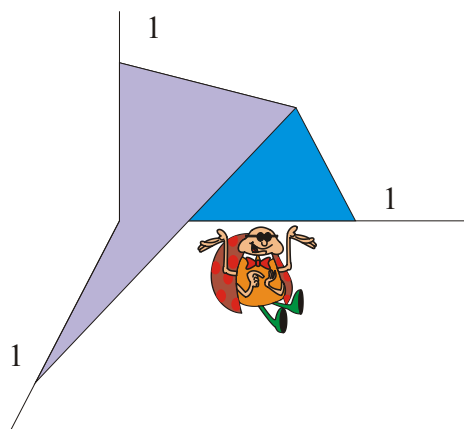
Důkaz: Z konečně mnoha "jednorozměrných" okolí je "vícerozměrné" okolí. ■

5.2.4 Příklad (Komplikace přináší "odkud")

Existuje nespojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pro které jsou všechna parciální zobrazení ve všech bodech spojitá.

Důkaz: Zvolme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby pro každé x kladné graf funkce f (jako podmnožina \mathbb{R}^3) obsahoval úsečku z bodu $(x, 0, 0)$ do bodu $(x, x, 1)$ a úsečku z bodu $(0, x, 0)$ do bodu $(x, x, 1)$ (tím je funkce definovaná pro $\{(x, y) : x > 0 \ \& \ y > 0\}$), jinde necháme funkci f nulovou. ■

Zde zlobí chování funkce ve směru osy prvního kvadrantu.



Obrázek 5.2.4: Funkce nespojitá v počátku.

5.2.5 Příklad (Ke spojitosti nestačí "všechny směry")

Existuje nespojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pro které jsou všechna parciální zobrazení ve všech bodech a ve všech směrech spojitá.

Důkaz: Zvolme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby pro každé x kladné graf funkce f (jako podmnožina \mathbb{R}^3) obsahoval úsečku z bodu $(x, 0, 0)$ do bodu $(x, x^2, 1)$ a úsečku z bodu $(0, x^2, 0)$ do bodu $(x, x^2, 1)$ (tím je funkce definovaná pro $\{(x, y) : x > 0 \ \& \ y > 0\}$), jinde necháme funkci f nulovou. ■



... slavný "parabolický trik"

5.2.6 Klasická zlobidla - nespojitost skrytá ve vzorečku

V předchozích příkladech byla nespojitost téměř součástí definice funkce. V praxi jsou předkládány funkce zpravidla vzorečkem, ze kterého se musí "zlobivá" přímka (popřípadě parabola a spol.) vymyslet.

Klasické parabolické zlobidlo:

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2} \quad \text{jinde .}$$

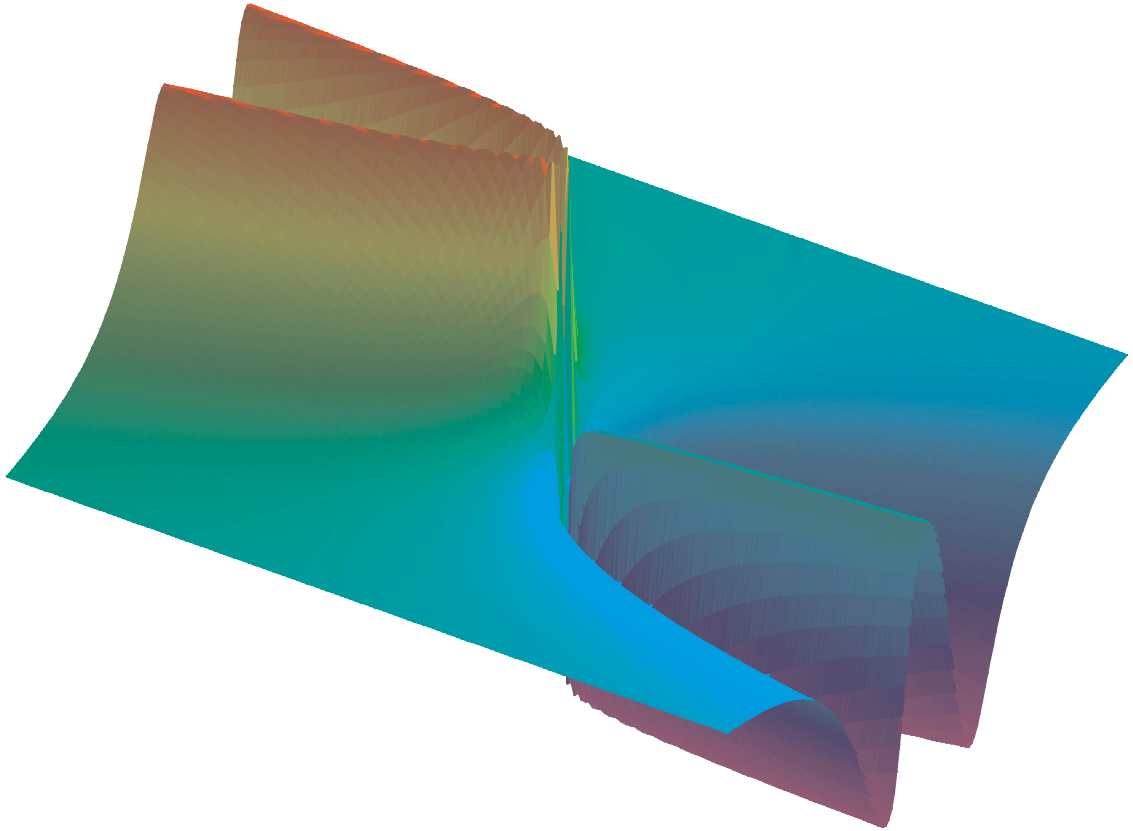
Čtyřlístek:

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{jinde .}$$

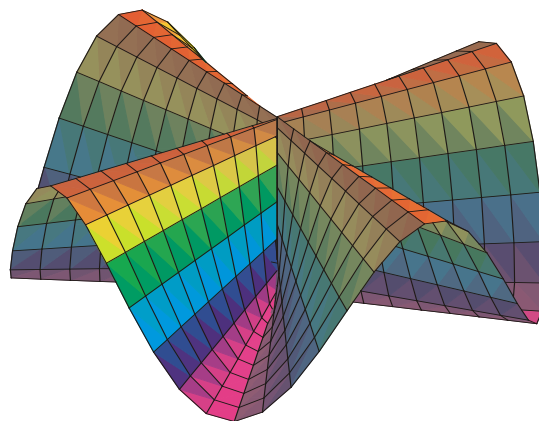
5.2.7 "Stejná" spojitost parciálních zobrazení

Pokud pro všechny směry vycházející z bodu x je řez spojitý a podaří se k danému ε najít společné δ pro všechny směry, jsme schopni najít okolí bodu x vyžadované v definici spojitosti.

Podobně pro parciální zobrazení.



Obrázek 5.2.6: Parabolické pohoří s vodopádem do parabolické hlubiny s bodem nespojitosti.



Obrázek 5.2.6: Čtyřlístek je přímková plocha s bodem nespojitosti.

5.3 Derivace

5.3.1 Definice (Derivace v bodě)

”Řekneme, že zobrazení má v bodě derivaci, pokud má v bodě lineární chování podobné tečně, tečné rovině, ...”



Jasná definice kruhem :-)

Přesněji řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je **derivace** funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ v bodě x_0 , pokud platí

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(|h|), \quad h \rightarrow 0.$$

Chceme, aby odchylka od lineárního zobrazení byla řádově menší než vzdálenost od bodu, v němž zkoumáme derivaci.



Takže zobrazení $f(x)$ a $f(a) + L(x-a)$ mají poblíž bodu a "dotyk", mohou se protínat, ale "naplacato" ...

Dříve se říkalo derivaci u více proměnných říkalo "diferenciál", nebo "totální diferenciál".

5.3.2 Definice (Parciální derivace funkce v bodě)

Pro funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^n$ definujeme **parciální derivaci** v bodě a podle j -té proměnné jako derivaci j -té parciální funkce v bodě a a značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Například

$$\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x}(3, 7) = 6.$$

Definujeme **gradient** (nebo též **nabla** ∇) funkce

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

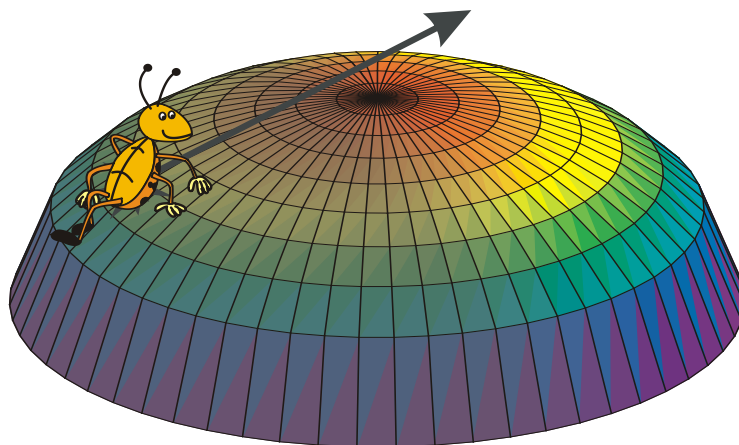


Tímto směrem funkce f nejvíce roste.

5.3.3 Věty (Derivace a parciální derivace funkce)

(i) Nechť pro funkci $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existuje derivace v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Pak existují v bodě a všechny parciální derivace a platí

$$L(h) = L(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(a)h_n.$$



Obrázek 5.3.2: Kudy se nejrychleji dostat nahoru.

- (ii) Nechť pro funkci $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité parciální derivace v bodě a , pak existuje v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivace.

Důkaz: Pro $n = 2$ je možno použít obrázek. Mezi bodem (a_1, a_2) a bodem (a_1+h_1, a_2+h_2) se pohybujeme ve směru souřadnicových os a pro parciální zobrazení použijeme větu o střední hodnotě. ■

5.3.4 Derivace a její maticový zápis

Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ má v bodě a derivaci $F'(a)$. Matici tohoto lineárního zobrazení budeme značit $[F'(a)]$ a nazývat **funkční matice** zobrazení F v bodě a . Pro tuto matici platí

$$[F'(a)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} .$$

Pro $n = k$ jde o čtvercovou matici, její determinant nazýváme **funkční determinant** funkcí F_1, \dots, F_k a značíme

$$J_F(a) , \text{ nebo } \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) .$$

(C.G.J.Jacobi \sim 1828)

Podobně budeme používat i funkční determinant pro funkce s více proměnnými, tedy např.

$$\frac{D(F_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), F_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), F_3(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3))}{D(y_1, y_2, y_3)}(a) .$$

5.3.5 Věta (Derivace složeného zobrazení)

Nechť $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ má derivaci v bodě a , nechť $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivaci v bodě $F(a)$. Pak složené zobrazení $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má derivaci v bodě a a tato derivace vznikne složením derivací $F'(a)$ a $G'(F(a))$ (jde o složení dvou lineárních zobrazení). V maticovém zápisu platí

$$[H'(a)] = [G'(F(a))][F'(a)] \dots$$



... jde o součin matic. Platí to i v \mathbb{R} .

Roznásobením získáme takzvané **řetězkové pravidlo**.

5.3.6 Derivace vyšších řádů

Pro funkce $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dají definovat derivace i parciální derivace vyšších řádů a získá se obdoba věty o aproximačním polynomu.

5.3.7 Extrémy funkcí více proměnných

Vyšetřování lokálních extrémů funkcí více proměnných probíhá podobně jako v případě jedné proměnné. V bodě podezřelém z nabývání extrému jsou derivace (zde parciální) nulové. V podezřelém bodě se používá navíc "kvadratický test", spočívající v porovnání funkce s parabolou:

Pokud existuje kladná konstanta K tak, že

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \geq K|h|^2$$

(zde jde o "pozitivně definitní formu"), pak

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(|h|^2) \geq f(a) + \frac{1}{2} K|h|^2 + o(|h|^2), \quad h \rightarrow 0$$

a funkce má v bodě a ostré lokální minimum.

5.3.8 Jak si zajistit inverzní zobrazení

Funkce jedné reálné proměnné má inverzní funkci v různých situacích. Nejsnáze se k ní (ve skutečnosti k prostotě funkce) dostaneme použitím monotonie na intervalu. Pokud chceme použít jako základní argument existenci derivace, musíme si dát pozor. Z existence derivace v daném bodě inverzní funkci nezískáme. Nabízí se možnost požadovat spojitost a kladnost derivace na okolí. Tato podmínka je použita v základní větě o existenci inverzního zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n .

5.3.9 Věta (O inverzním zobrazení)

Nechť má zobrazení F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n spojité parciální derivace na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Nechť $F'(a)$ je bijekce \mathbb{R}^n na \mathbb{R}^n . Pak existuje okolí bodu a na němž má F^{-1} spojité parciální derivace.

Důkaz: Pro jednoduchost nechť je $a = F(a) = 0$, $F'(a)$ nechť je identita. K důkazu existence inverzního zobrazení použijeme následující trik. Pro y hledáme x tak, aby $F(x) = y$. To je ekvivalentní s $x = y + x - F(x)$. Najdeme takové x jako pevný bod zobrazení $g(x) = y + x - F(x)$. Tento pevný bod bude limitou posloupnosti $x_0 = 0, x_{n+1} = g(x_n)$. Konvergenci této posloupnosti pro malá y je možné dokázat. ■

5.3.10 Definice (Regulární zobrazení)

Zobrazení F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n se nazývá **difeomorfismus**, pokud F je bijekce otevřené množiny U na otevřenou množinu V tak, že F má spojité parciální derivace na U a F^{-1} má spojité parciální derivace na V .

Zobrazení F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n se nazývá **regulární**, pokud má F spojité parciální derivace a nenulový funkční determinant.

5.3.11 Věta (O regulárním zobrazení)

Platí

- Regulární zobrazení je lokálně prosté (difeomorfismus).
- Regulární obraz otevřené množiny je otevřená množina.
- Zobrazení je difeomorfismus právě tehdy, když je regulární a prosté.

5.3.12 Implicitní funkce (Povídání o šťastném houbařovi)

Nechť jsme v lese "Na rovince", popsaném rovnicí $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Nechť M je "vlnoplocha" optimálních podmínek (vlhkost, živiny, ...) pro růst hříbků a je dána funkcí $g(x, y) = 0$, tedy $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y) = 0\}$. Nastávají 3 základní možnosti

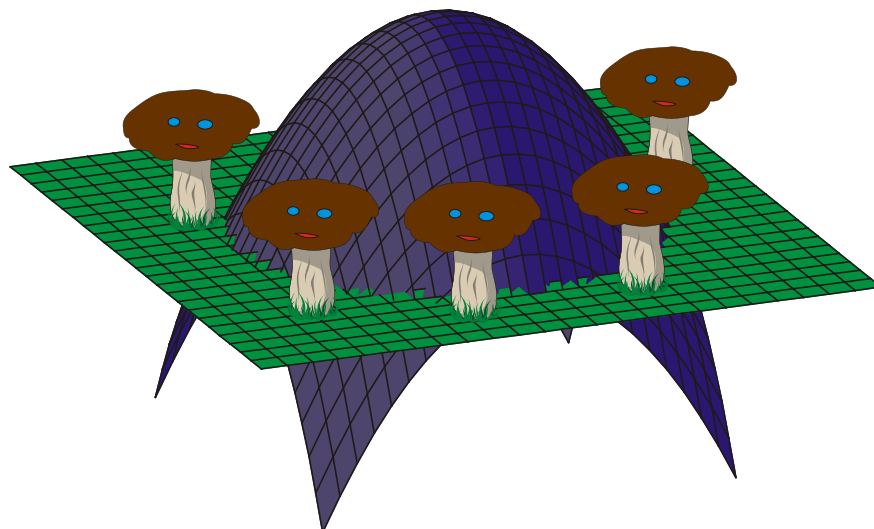
- (i) Houby ještě nerostou ($L \cap M = \emptyset, g(x, y) < 0$).
- (ii) Houby už nerostou ($L \cap M = \emptyset, g(x, y) > 0$).
- (iii) Houby ROSTOU ($L \cap M \neq \emptyset, \text{někdy } g(x, y) = 0$).

Pokud rostou a najdememe hříbek, pravděpodobně se les L a "vlnoplocha" M protínají v nějaké křivce. Pokud ji určíme jako funkci $y = f(x)$, máme vyhráno. Zpravidla se v okolí naleznou další hříbky, které pomohou určit první derivaci ...

5.3.13 Věta (Implicitní funkce v rovině)

Nechť pro funkci $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ platí

- (i) $g(a, b) = 0$.
- (ii) g má spojité parciální derivace v okolí bodu (a, b) .



Obrázek 5.3.12: Jak rostou houby? Nejčastěji v linii nebo v čarovných kruzích.

(iii) $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Pak existuje funkce f na okolí V bodu (a, b) tak, že na V je $g(x, y) = 0$ právě když $y = f(x)$. Navíc má f tolik derivací, kolik jich má g spojitých.



Funkce $y = f(x)$ byla zadána rovnicí, "implicitním způsobem", proto hovoříme o "implicitní funkci", což je nesmysl ;-)

Důkaz: Je-li funkce g ve směru y rostoucí a prochází nulou v bodě (a, b) , pak musí procházet nulou i na přímkách rovnoběžných s osou y poblíž bodu (a, b) ■



... cestou ze Záporna do Kladna se musí přes Nulu ;-)

5.3.14 Implicitní funkce (Řešení soustavy rovnic)

Pokud chceme pracovat s více proměnnými a implicitní funkcí, není v tom problém. Podmínka $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ znamenala v podstatě, že z pohledu y není funkce g "znehodnocená". Pro více proměnných $y = (y_1, \dots, y_k)$ budeme testovat nenulovost funkčního determinantu

(předpokládáme, že budeme mít tolik rovnic g_j jako neznámých y_j)

$$\frac{D(g_1, \dots, g_k)}{D(y_1, \dots, y_k)}(a, b) \neq 0.$$

Ukážeme metodu na řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + y_1 - y_2 &= 0 \\x_1 y_2 + y_1 y_2 + y_3 &= 0 \\x_1 + x_2 - y_1 y_3 + y_2 &= 0\end{aligned}$$

v okolí bodu $(a, b) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = ((0, 0), (0, 0, 0))$. Zde

$$\frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}(a, b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Tedy existují na okolí bodu (a, b) funkce

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x_1, x_2) \\y_2 &= f_2(x_1, x_2) \\y_3 &= f_3(x_1, x_2)\end{aligned}$$

k naší spokojenosti.



Ti x_1, x_2 a x_3 jsou něco jako parametři.

5.3.15 Implicitní funkce a inverzní zobrazení - kámoši

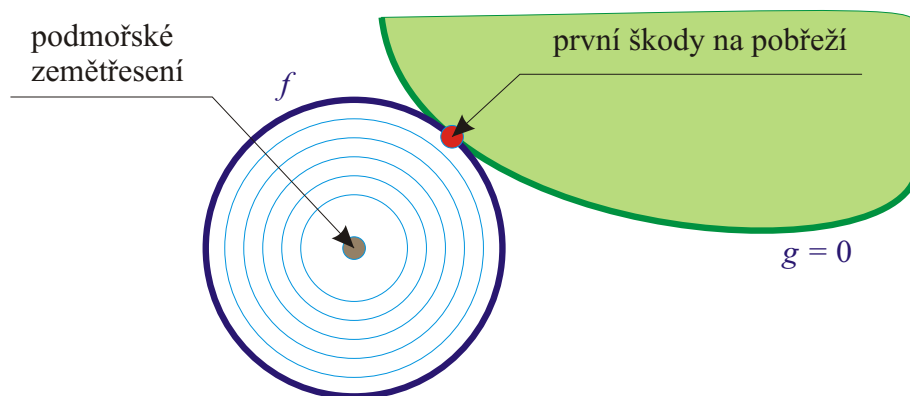
Pokud hledáme zobrazení $F^{-1}(y) = x$ jako inverzní k $F(x) = y$, můžeme z rovnice $y - F(x) = 0$ spočítat x pomocí y díky větě o implicitních funkcích.

Naopak, pokud řešíme $g(x, y) = 0$ a chceme spočítat y pomocí x , můžeme k zobrazení $(x, y) \mapsto (x, g(x, y))$ najít inverzní zobrazení ve tvaru $(x, y) \mapsto (x, h(x, y))$ pro nějaké zobrazení h . Pak $y = f(x) = h(x, 0)$ je hledané zobrazení.

5.3.16 Vázané extrémy

Představme si, že v prostoru na ploše S hledáme bod nejbližší počátku $(0, 0, 0)$. Nabízí se možnost "nafukovat v počátku balónek" a čekat, kdy se poprvé dotkne zadané plochy. Ve skutečnosti zkusíme pro různé konstanty c průnik plochy S s plochou "vzdálenost od počátku se rovná c ". V okamžiku "dotyku" se (pokud existují) musejí rovnat tečné roviny obou ploch.

Ve skutečnosti hledáme extrém zadané funkce f (zde vzdálenost od počátku) na zadané množině S (zde plocha). Nutnou podmínkou je rovnost tečných rovin plochy S a "plochy $f = c$ " (pokud existují) v bodě nabývání extrému (a tedy lineární závislost gradientů f a S).



Obrázek 5.3.16: Jak se šíří vlnění, tak se vytvářejí "vrstevnicové množiny" odpovídající funkci f . V místě dotyku s pobřežím jsou tečné přímkou vlnoplochy a pobřeží totožné. Nastal dotyk.

5.3.17 Věta (Vázané extrém)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť funkce f a g_1, \dots, g_s ($1 \leq s \leq n$) mají spojité parciální derivace na G a necht' v každém bodě $x \in G$ jsou vektory $\text{grad } g_1(x), \dots, \text{grad } g_s(x)$ lineárně nezávislé. Necht'

$$M = \{x \in G : g_1(x) = 0, \dots, g_s(x) = 0\}$$

a funkce f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M , pak existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že funkce

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_s g_s(x)$$

má nulové parciální derivace v bodě a .

Nabývání extrému můžeme potvrdit "kvadratickým testem", např. pozitivní definitností kvadratické formy druhých parciálních derivací L .

Koeficientům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ se říká **vázané multiplikátory**.

(J.L.Lagrange \sim 1770)

Důkaz: Nulové parciální derivace funkce L dávají vyjádření $\text{grad } f(a)$ jako lineární kombinaci $\text{grad } g_1(a), \dots, \text{grad } g_s(a)$, což vyjadřuje "dotyk".

Nabývání extrému se zkoumá u f na M , při vhodné parametrizaci na množině parametrů. Můžeme zkoumat místo toho i extrémy L , která se na M rovná f . Funkce L má první parciální derivace v bodě a nulové, tak lze použít kvadratický test. ■

Kapitola 6

Integrace podle více proměnných



ato kapitola bude zkoumat velikosti (například objemy nebo povrchy) více-rozměrných objektů.



Budeme též měřit, kolik vody proteče cedníkem.



Obrázek 6.0.0: Jak si s měřením poradíme v prostoru?



Kdykoliv můžeme změřit objem člověka tím, že jej ponoříme do plné vany a zjistíme, kolik vody vyteklo.

6.1 Konečně aditivní integrace

6.1.1 Interval, čtverečky, krychličky, ...



Vícerozměrný integrál je jednorozměrný integrál přepsaný do více proměnných.

Vybudování teorie konečně aditivní integrace v prostoru \mathbb{R}^n lze provést podobně jako v \mathbb{R} . Místo intervalů v \mathbb{R} vezmeme součin intervalů v \mathbb{R}^n . Budeme zkoumat dělení na čtverečky v \mathbb{R}^2 , na krychličky v \mathbb{R}^3 atd. Definujeme horní a dolní integrál funkce a zkoumáme integrovatelné funkce a příslušnou míru.

(B.Riemann \sim 1850, C.Jordan \sim 1870)

6.1.2 Integrace přes řezy

Při zkoumání velikosti plochy P pod grafem funkce jsme pro funkci f spojitou a nezápornou na intervalu $[a, b]$ "sčítali" pro jednotlivá $x \in [a, b]$ velikost "řezu" - t.j. úsečky spojující body $(x, 0)$ a $(x, f(x))$ o velikosti $f(x)$. Toto "sčítání" nekonečně mnoha čísel proběhlo přes konečné dělení intervalu (konečný součet) a následně pomocí procesu suprema, popřípadě limity.

Podobně budeme počítat míru rovinných množin jako (rozumný) "součet" velikostí "řezů" množiny pro různá x .

Analogicky lze počítat velikost "tělesa" pod grafem funkce v \mathbb{R}^2 přes jednotlivé "řezy" - zde je takový řez vlastně plochou pod grafem funkce.

Takto lze tedy integraci v $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^7$ nahradit integrací v \mathbb{R}^3 z řezů v \mathbb{R}^7 . Tedy po konečně mnoha krocích pouze na integraci v \mathbb{R} .

6.1.3 Věta (Integrace přes řezy)

Nechť je A měřitelná množina v \mathbb{R}^{m+n} . Nechť je funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrovatelná na množině A . Body v \mathbb{R}^{m+n} budeme psát $z = (x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Pro množinu A označíme $\downarrow A \downarrow$ **průmět množiny** A na prostor \mathbb{R}^m , t.j.

$$\downarrow A \downarrow = \{x \in \mathbb{R}^m : \exists y \in \mathbb{R}^n, (x, y) \in A\}.$$

Pro $x \in \downarrow A \downarrow$ označíme A_x **řez množiny** A , t.j.

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\}.$$

Pak platí

$$\int_A f(z) dz = \int_{\downarrow A \downarrow} \left(\int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx .$$

(C.Fubini 1907)

Důkaz: Nechť jsme v $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Rozdělení množiny A na čtverečky pro aproximaci integrace přes A interpretujeme (bereme čtverečky "po sloupcích") jako aproximaci integrace přes jednotlivé řezy. ■



Ve vzorečku je použit horní integrál, stejně tam mohl stát dolní integrál. Obecně není zaručena integrovatelnost všech řezů.

6.1.4 Integrace přes řezy v praxi

$$\int_{[0,1] \times [2,3]} 4xy \, dx dy = \int_{[0,1]} \left(\int_{[2,3]} 4xy \, dy \right) dx = \int_{[0,1]} (2x(3^2 - 2^2)) \, dx = 5 .$$

Takto lze převést integraci podle více proměnných na integraci v \mathbb{R} .

6.1.5 Věta (Integrace pomocí substituce)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, tedy funkční determinant J_φ je na množině A nenulový. Nechť je $M \subset A$ uzavřená a omezená množina a f spojitá funkce $f : \varphi(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_{\varphi(M)} f(x) \, dx = \int_M f(\varphi(y)) |J_\varphi(y)| \, dy ,$$

existuje-li jeden z integrálů.



Funkční determinant je koeficient srovnávající lokálně velikost (míru) množiny M a $\varphi(M)$. Pokud by zobrazení φ bylo lineární, pak se například v \mathbb{R}^2 transformuje každý čtvereček \square o velikosti 1 v množině M na rovnoběžník \diamond o velikosti $|J_\varphi|$ v množině $\varphi(M)$.

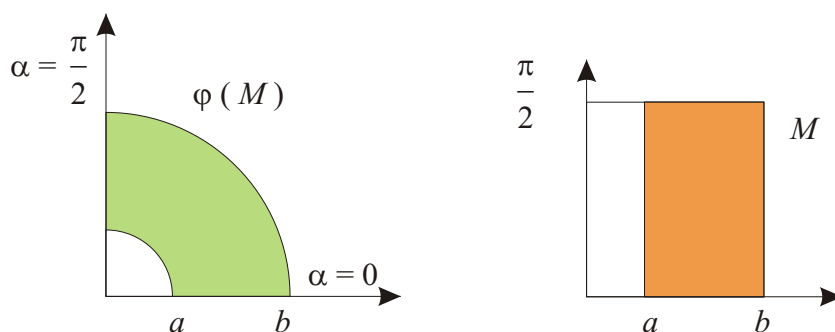
6.1.6 Integrace pomocí substituce v praxi

Pro $M = [a, b] \times [0, \pi/2]$, $(x, y) = \varphi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, $\varphi(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \text{ \& } x \geq 0 \text{ \& } y \geq 0\}$, $J_\varphi(r, \alpha) = r$ dostaneme

$$\int_{\varphi(M)} 1 \, dx dy = \int_M r \, dr d\alpha$$

a integrál vpravo lze snadno spočítat integrací přes řezy

$$\int_M r \, dr d\alpha = \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,\pi/2]} r \, d\alpha \right) dr = \frac{1}{4} \pi (b^2 - a^2) .$$



Obrázek 6.1.6: Množina, která není hranatá, se převedla na množinu hranatou, přes kterou se dobře integruje.



Kulaté věci se na hranaté převedou pomocí sférických souřadnic v prostoru, v rovině pak stačí polární souřadnice.

6.2 Spočetně aditivní integrace

6.2.1 Jak na to a co dostaneme ...

Začneme s objemem krychliček a objemem jejich konečného sjednocení v \mathbb{R}^n , tento objem označíme m . Z takového objemu definujeme vnější míru $m^*(A)$ libovolné množiny $A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A) = \inf \{ m(G) : A \subset G \text{ \& } G \text{ je konečné sjednocení krychliček } \} .$$

Integrovatelné funkce a měřitelné množiny získáme podobně jako v \mathbb{R} .

Při integrování přes řezy získáme integrovatelnost řezů pro skoro všechna x a věta o integrování přes řezy platí i pro spočetně aditivní integraci.

6.2.2 Věta (Integrace pomocí substituce)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lokálně sublineární zobrazení. Nechť f je měřitelná funkce na $\varphi(G)$ a $M \subset G$ je měřitelná množina. Označme $N(x, \varphi, M)$ počet prvků množiny M , které zobrazení φ zobrazí do x .



... tímto N korigujeme "neprostotu" zobrazení φ .

Pak platí

$$\int_{\varphi(G)} N(x, \varphi, M) f(x) dx = \int_M f(\varphi(y)) |J_\varphi(y)| dy ,$$

existuje-li jeden z integrálů.

Důkaz: Existence derivace skoro všude, tedy i funkční determinant, vyplývá z lokální sublinearity. Odhad integrálů vychází z lokálního nahrazení funkce její derivací a z odhadu odchylky. Při pečlivém ošetření "skoro všude" dostaneme znění věty. ■

6.3 Placatá integrace

6.3.1 Křivky, plochy, ...

Rozumná křivka a plocha v \mathbb{R}^3 má míru nula. Budeme definovat k -rozměrnou míru v \mathbb{R}^n pro množiny, které dovedeme parametrizovat nějakým vhodným zobrazením z \mathbb{R}^k .

Budeme dávat pozor na to, aby taková definice nezávisela na zvolené parametrizaci. Vytvoříme k -rozměrnou míru pomocí pokrývání množiny "parametrizovatelnými kousky" a zkoumáním infima takovýchto pokrytí.

Jakou k -rozměrnou míru má rovnoběžník v \mathbb{R}^3 tvořený vektory u_1 a u_2 ? To zjistíme jednoduše tak, že sestrojíme jednotkový vektor u_3 kolmý na u_1 a u_2 a spočítáme objem vzniklého kolmého hranolu. Pak je ale objem roven "základna x výška", tedy rovnoběžník má stejnou "plošnou míru" jako má hranol "objemovou míru".



A to je základ placaté integrace :-)

6.3.2 Definice (k -rozměrná míra v \mathbb{R}^n)

Pro $E \subset \mathbb{R}^n$ položme

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_j m(G_j) \right\} ,$$

kde infimum bereme přes všechny posloupnosti otevřených množin $\{G_j\}$, $G_j \subset \mathbb{R}^k$ a pro každé j existuje 1-sublineární funkce φ_j na G_j tak, že E je pokryta sjednocením obrazů $\varphi_j(G_j)$.



Tedy chceme, aby (všechny) takové parametrizace φ_j pracovaly za nás při definování míry.

Tuto množinovou funkci budeme nazývat **vnější k -rozměrná míra** v \mathbb{R}^n . Opět získáme systém měřitelných množin a míru, kterou budeme značit μ a nazývat **k -rozměrná míra** v \mathbb{R}^n , dále dostaneme **k -rozměrný integrál**

$$\int_M f(x) d\mu(x).$$

Pro 1-rozměrnou míru v \mathbb{R}^n budeme používat označení s , pro $(n - 1)$ -rozměrnou míru v \mathbb{R}^n budeme používat označení S . Tedy budeme psát

$$\int_M f(x) ds, \int_M f(x) dS.$$



Nazýváme to lidově "placatý integrál" :-)

6.3.3 Vlastnosti k -rozměrné míry v \mathbb{R}^n

Platí

- (i) Každá topologická množina je μ -měřitelná.
- (ii) Izometrické zobrazení zachovává k -rozměrnou míru.
- (iii) β -sublineární zobrazení zvětší k -rozměrnou míru množiny nanejvýš β^k -krát.

6.3.4 Definice (Objem lineárního zobrazení)

Pro lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ definujeme **objem zobrazení** L jako k -rozměrnou míru množiny $L(\mathbb{I})$, kde \mathbb{I} je jednotková krychle v \mathbb{R}^k a píšeme vol $L = \mu(L(\mathbb{I}))$.



Jde o placatou verzi funkčního determinantu.

6.3.5 Věta (Integrace pomocí substituce)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lokálně sublineární zobrazení. Nechť f je μ -měřitelná funkce na $\varphi(G)$ a $M \subset G$ je měřitelná množina. Označme $N(x, \varphi, M)$ počet prvků množiny M , které zobrazení φ zobrazí do x .



... tímto N korigujeme "neprostotu" zobrazení φ .

Pak platí

$$\int_{\varphi(G)} N(x, \varphi, M) f(x) d\mu(x) = \int_M f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) dt,$$

existuje-li jeden z integrálů.

6.3.6 Křivkový integrál

Nechť $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ je prosté lokálně sublineární zobrazení parametrizující $M = \varphi(G)$. Tedy pro $x \in M$ píšeme $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$. Nechť f je měřitelná funkce na $\varphi(G)$.

Pak lze počítat křivkový integrál



... nebo definovat !

$$\int_{\varphi(G)} f(x) ds(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t) dt = \int_G f(\varphi(t)) \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2} dt.$$

Věta o substituci říká, že nezáleží na zvolené parametrizaci φ "křivky" M . Jednorozměrná plocha se nazývá **křivka**.

6.3.7 Plošný integrál

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Nechť $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ je prosté lokálně sublineární zobrazení parametrizující $M = \varphi(G)$. Tedy pro $x \in M$ píšeme $x = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$. Nechť f je měřitelná funkce na $\varphi(G)$.

Pak lze počítat plošný integrál



... nebo definovat !

$$\int_{\varphi(G)} f(x) dS(x) = \int_G f(\varphi(u, v)) \operatorname{vol} \varphi'(u, v) dudv = \dots$$

Věta o substituci říká, že nezáleží na zvolené parametrizaci φ "plochy" M . Dvourozměrná plocha se nazývá **plocha**.

6.4 Vektorová integrace

6.4.1 Práce, síla, ...

Budeme počítat úlohy typu "jak velkou práci musíme vykonat při chůzi ve větru?", "kolik vody přemístí mořské proudy ze severní na jižní polokouli?", ...

Tedy nás bude zajímat působení vektorové veličiny (proud vzduchu, vody, ...) na určitou lokalitu (dráhu, plochu, ...).

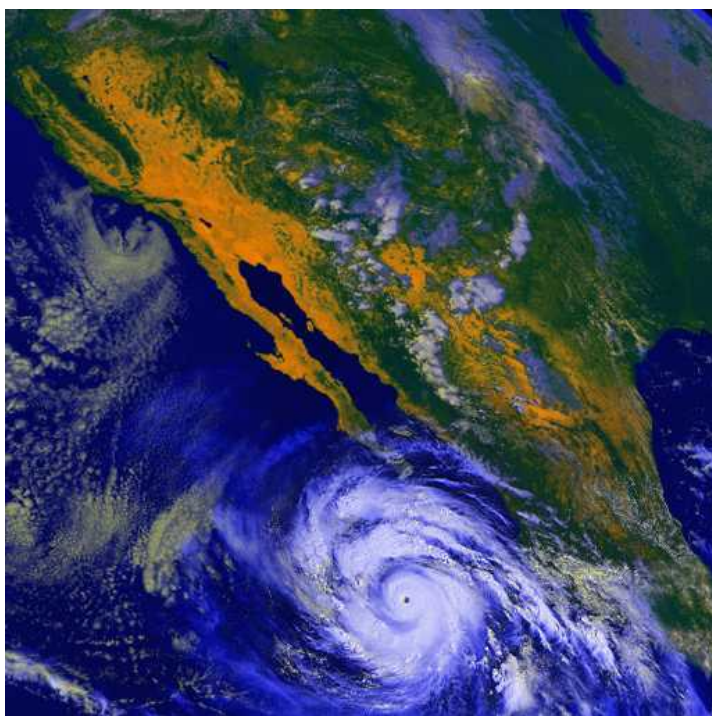
Budeme proto zkoumat složku vektorové veličiny působící ve směru, popřípadě kolmo k naší lokalitě. Tuto složku pak můžeme integrovat (například placatou integrací) a získat celkový výsledek.

6.4.2 Zákon zachování

Základní principy zachování energie a hmoty nám dovolují předpovědět výsledky některých úloh. Například vidíme předem, že mořské proudy přemístí ze severní polokoule na jižní přesně tolik, kolik přemístí z jižní na severní. Nebo že celková práce vynaložená při chůzi ve větru na kruhové dráze je zpravidla nulová ("po větru" je práce záporná, "proti větru" je práce kladná) ...



Pokud však neobcházíme rotující tornádo v "protisměru", je práce velká ;-)



Obrázek 6.4.2: Tornádo vytváří vektorové pole, pro něž je nenulová rotace.

6.4.3 Jak na to?

Budeme integrovat vektorovou funkci přes orientovanou k -rozměrnou množinu v \mathbb{R}^n . Tím získáme základní nástroj ke zkoumání našich úloh. Zákon zachování bude vícerozměrnou obdobou základní věty analýzy

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) ,$$

kde chápeme F' jako lokální zdroje prostředí



... například puštění kohoutky s vodou.

a F jako vstupy a výstupy přes hranici.



Obrázek 6.4.3: Kolik se dostane dovnitř, tolik musí ven ...



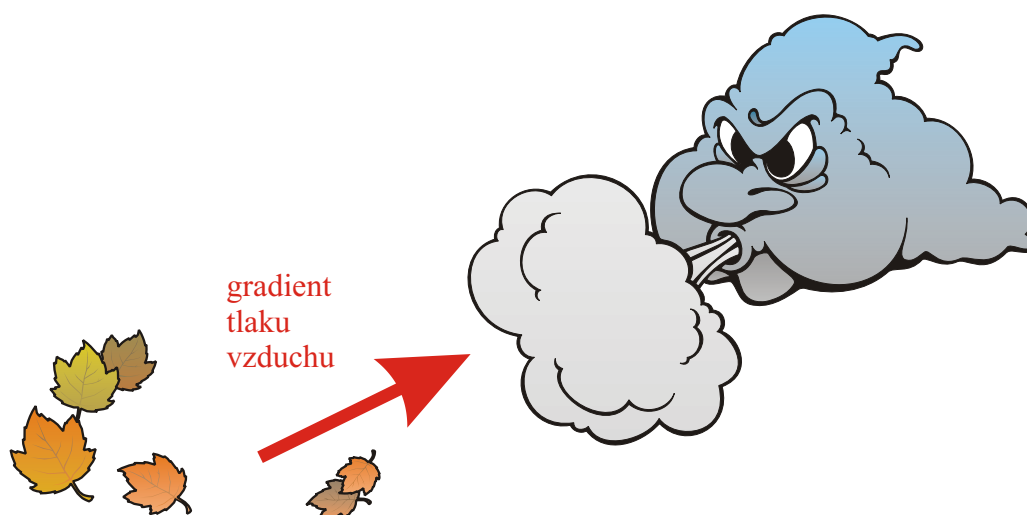
Kolik vody do místnosti naprší oknem, kolik vody vyteče dveřmi ...

6.4.4 Vektorové pole, gradient, divergence, rotace

Zobrazení z množiny M do \mathbb{R}^n budeme nazývat **vektorové pole**.

Pro spojitě derivovatelnou funkci F na otevřené množině v \mathbb{R}^n definujeme **gradient** funkce F jako vektorové pole

$$\text{grad } F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) .$$



Obrázek 6.4.4: Proti větru se jde k místu vysokého tlaku.



Je-li F tlak vzduchu, pak ve směru $-\text{grad } F$ fouká vítr.

Pro spojitě derivovatelnou vektorové pole $F = (F_1, \dots, F_n)$ na otevřené množině v \mathbb{R}^n nazýváme **divergence** pole F funkci

$$\text{div } F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x).$$



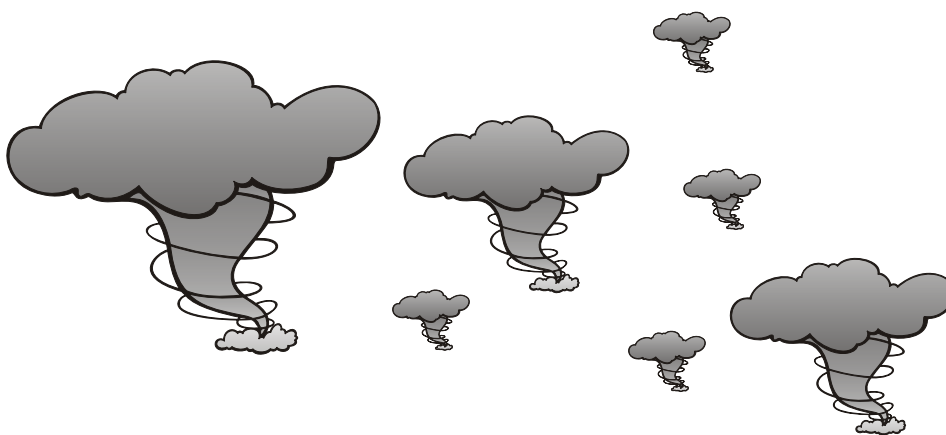
Obrázek 6.4.4: Voda se v bytě nehromadí ...



Je-li F proudění vody, pak v voda přitéká tam, kde je $\operatorname{div} F > 0$ (kohoutky) a odtéká tam, kde je $\operatorname{div} F < 0$ (kanály). Jde o lokální "zdroje" vody v prostředí.

Pro spojitě derivovatelnou vektorové pole $F = (F_1, F_2)$ na otevřené množině v \mathbb{R}^2 nazýváme **rotace** pole F funkci

$$\operatorname{rot} F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x).$$



Obrázek 6.4.4: Rotace se lehce nakreslí.



Je-li F proudění vzduchu, pak je vír (tornádo a podobně) tam, kde je $\operatorname{rot} F \neq 0$. Znaménko říká, na kterou stranu se vír točí.

Pro spojitě derivovatelnou vektorové pole $F = (F_1, F_2, F_3)$ na otevřené množině v \mathbb{R}^3 nazýváme **rotace** pole F pole

$$\operatorname{rot} F(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right).$$

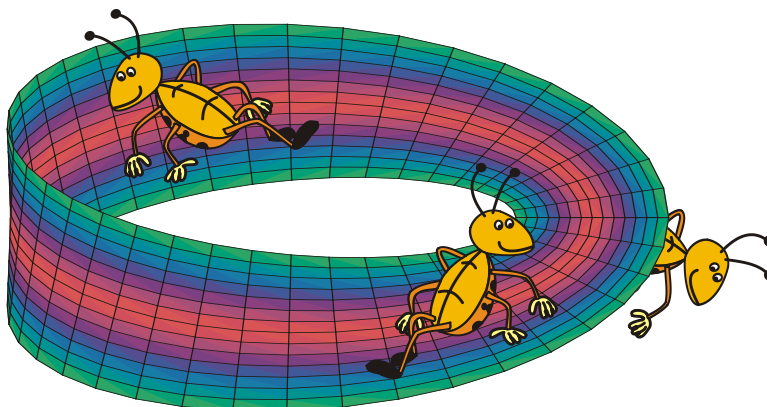
Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ nazveme **vektorový součin** vektorů u_1, \dots, u_{n-1} pokud je na všechny kolmý, má velikost rovnou objemu $(n-1)$ -rozměrného rovnoběžnostěnu vytvořeného vektory u_1, \dots, u_{n-1} , orientace je zvolena tak, aby platilo "pravidlo pravé ruky". Značíme

$$w = u_1 \times \dots \times u_{n-1}.$$

Například $(0, 0, 4) = (2, 0, 0) \times (0, 2, 0)$.

6.4.5 Orientace ploch

Jedná se o zvolení lokální informace, kde je například u křivky "začátek" a "konec", jakým směrem se křivka "pohybuje". U plochy zase chceme vědět, kde je "nahore" a kde "dole".



Obrázek 6.4.5: Kde je nahore, říká gravitace. Pokud jsme ve stavu beztíže, není to jasné ...



U překřížené pásky to neurčíme globálně, pouze lokálně.

Nechť Ω je k -rozměrná plocha a $x \in \Omega$. Spojité zobrazení, které každému bodu $x \in \Omega$ a každé parametrizaci okolí $x \in \Omega$ přiřadí přívlastek "kladná" nebo "záporná", nazveme **orientace** plochy Ω .

Plochu s orientací nazveme **orientovaná plocha** a říkáme například, že plocha Ω je kladně orientovaná.

6.4.6 Tečný vektor a křivkový integrál

Je-li $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ kladně orientovaná křivka, zavádíme **jednotkový tečný vektor** v bodě $x = \varphi(t)$ jako vektor

$$\mathbf{t}(x) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

Integrál

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{t} \, ds$$



Zde $F \cdot \mathbf{t}$ vyjadřuje složku síly F ve směru tečného vektoru, tedy ve směru našeho pohybu. Tím, že to integrujeme křivkovým integrálem, sbíráme "příspěvky" síly F k našemu pohybu ...

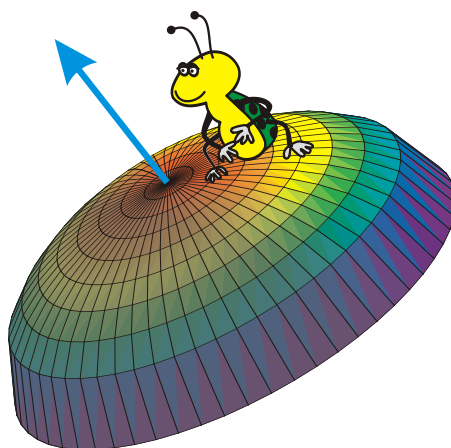
nazýváme **křivkový integrál druhého druhu** vektorového pole F a někdy značíme

$$\int \vec{F} d\vec{\varphi} \text{ nebo } \oint F d\varphi .$$

6.4.7 Normálový vektor a plošný integrál

Je-li $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ kladně orientovaná $(n - 1)$ -rozměrná plocha, zavádíme **jednotkový normálový vektor** v bodě $x = \varphi(t)$ jako vektor

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right|} .$$



Obrázek 6.4.7: Normálový vektor je kolmý k ploše.

Integrál

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{n} dS$$

nazýváme **plošný integrál druhého druhu** vektorového pole F a někdy značíme

$$\int \vec{F} d\vec{S} \text{ nebo } \oint F dS .$$

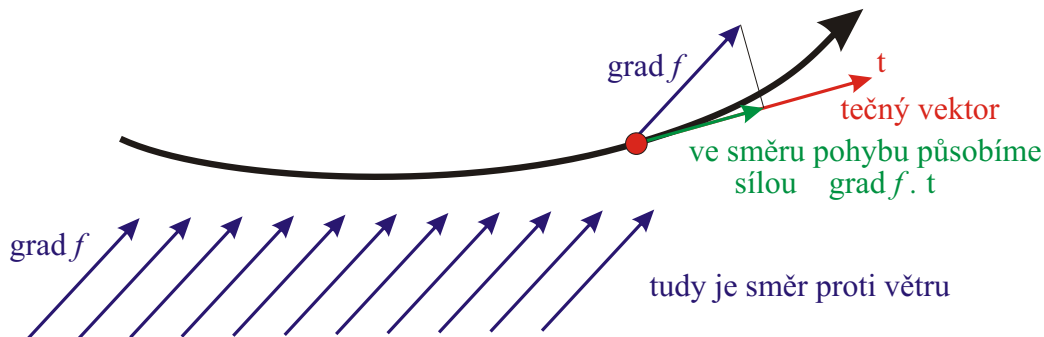


Zde $F \cdot \mathbf{n}$ vyjadřuje složku proudu vody F ve směru normálového vektoru, tedy ve směru kolmém k ploše. Tím, že to integrujeme křivkovým integrálem, sbíráme "příspěvky" proudu vody F , které projdou přes naši plochu ...

6.4.8 Věta (O křivkovém integrálu)

Je-li $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ kladně orientovaná křivka s jednotkovým tečným vektorem $\mathbf{t}(x)$.
Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na okolí $\varphi(a, b)$. Pak

$$\int_{\varphi(a,b)} \text{grad } f \cdot \mathbf{t} \, ds = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) .$$



Obrázek 6.4.8: Cesta proti větru.



Pokud je křivka uzavřená, f určuje tlak vzduchu, $\text{grad } f$ síla k překonání větru, celková práce je nulová :-)

6.4.9 Věta (O divergenci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je orientovaná $(n - 1)$ -rozměrná plocha která tvoří hranici Ω a orientující pole normálových vektorů "ven" z Ω . Je-li F spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\Omega \cup \varphi(G)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \text{div } F \, dm .$$

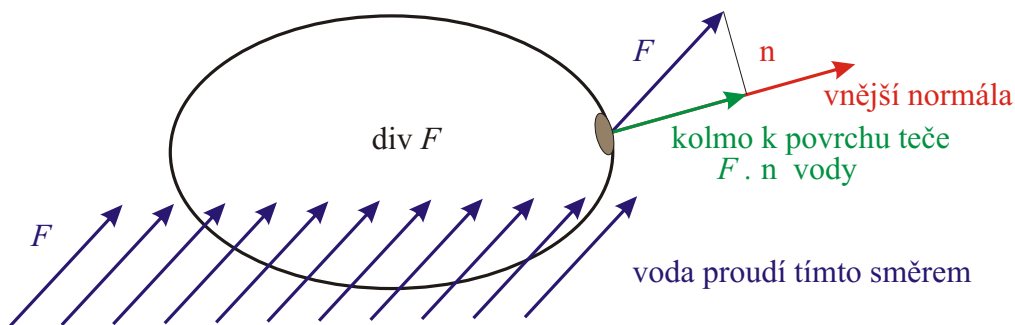
(C.F.Gauss \sim 1800, Ostrogradski)

6.4.10 Věta (O rotaci v \mathbb{R}^2)

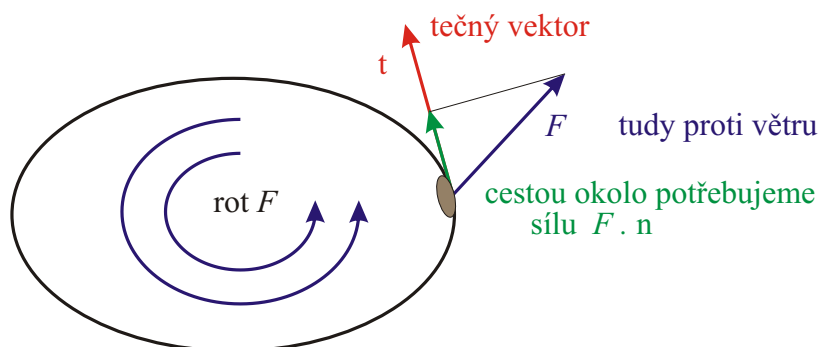
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ je orientovaná křivka která tvoří hranici Ω a orientující pole tečných vektorů "ve směru hodinových ručiček". Je-li F spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\Omega \cup \varphi(G)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{\Omega} \text{rot } F \, dm .$$

(G.Green \sim 1840)



Obrázek 6.4.9: Divergence a tok přes hranici.



Obrázek 6.4.10: Cesta okolo tornáda.

6.4.11 Věta (O rotaci v \mathbb{R}^3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná dvourozměrná plocha s orientovaným okrajem parametrizovaným zobrazením $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$. Zvolíme orientaci podle obrázku. Je-li F spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\Omega \cup \varphi(G)$. Pak

$$\int_{\varphi(G)} F \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \text{rot } F \, dS .$$

(Stokes)

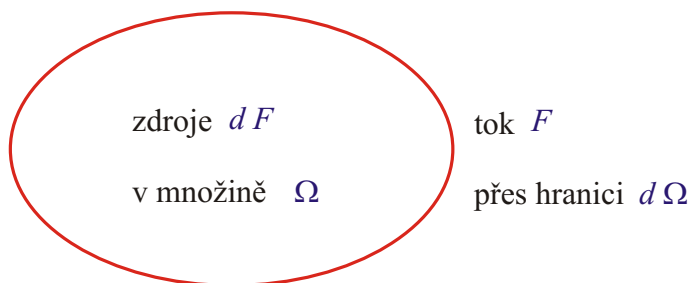


V prostoru je to to samé, jen pokřivené. Funguje to proto, že to funguje v rovině.

6.4.12 Věta (Zákon zachování)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná omezená k -rozměrná plocha s okrajem $d\Omega$. Je-li F spojitě diferencovatelná $(k-1)$ -forma a dF její diferenciál na okolí $\Omega \cup d\Omega$. Pak

$$\int_{d\Omega} F = \int_{\Omega} dF .$$



Obrázek 6.4.12: Nic se nikam neztratí bezdůvodně.

(Stokes)



Integrujeme přes množinu Ω "zdroje" dF . Výsledek se musí rovnat integraci přes okraj $d\Omega$ "chování" F .

Speciální případy zákona zachování jsou například základní věta analýzy, věta o křivkovém integrálu, věta o divergenci a věta o rotaci.

Technické dovednosti jsou mistrovstvím složitosti, zatímco kreativita je mistrovstvím jednoduchosti.
(E.Ch.Zeeman ~ 1970)

Důkaz: Pro ilustraci dokážeme zákon zachování pro jeden speciální případ ve větě o divergenci v \mathbb{R}^2 .

Pro matematika je polovina důkazu rovna nule.
(K.F.Gauss ~ 1840)

Nechť

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, f(x)]\},$$

kde $f(x) = 1 - x^2$ a $F(x, y) = (0, F_2(x, y))$. Pak podle věty o integraci přes řezy píšeme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{f(x)} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^1 (F_2(x, f(x)) - F_2(x, 0)) \, dx.$$

Pravou stranu upravíme na požadované křivkové integrály

$$\int_0^1 (0, F_2(t, f(t))) \cdot (f'(t), 1) \, dt + \int_0^1 (0, F_2(t, 0)) \cdot (0, -1) \, dt + \int_0^1 (0, F_2(0, t)) \cdot (-1, 0) \, dt,$$

ve kterých vidíme vektory "vnější" normály k jednotlivým kouskům okraje Ω . ■



Lze očekávat, že zákon zachování je vysloven tak, že platí. To ale znamená, že si dovedeme význam tajuplných formulací jako "forma", "diferenciál formy" a "integrace formy" doplnit. Jak?

Použijeme-li větu o integraci přes řezy, převedeme "plošný" integrál na "okrajový". Ten je přesně hodnotou toho integrování formy.

I když to není zcela pravda, lze o tom uvažovat ;-)

Kapitola 7

Funkce komplexní proměnné



ato kapitola ukáže, které pojmy z reálného světa mají své analogie i ve světě komplexních čísel. Budou to derivování, integrování, nekonečné součty . . .



Zintegrujeme $1/z$ a postavíme si nekonečné schodiště.

7.1 Pojem komplexní funkce

7.1.1 Body, vzdálenost a okolí v \mathbb{C}

Prvek v \mathbb{C} budeme nazývat **bod** (komplexní roviny) a označovat $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Vzdálenost mezi body \mathbb{C} budeme značit

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \dots + (y_1 - y_2)^2}.$$

Okolím bodu $z \in \mathbb{C}$ rozumíme množinu

$$U^\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}.$$

Množina A je **otevřená**, pokud s každým svým bodem obsahuje nějaké okolí. Množina B je **uzavřená**, pokud její doplněk je otevřená množina. Množina bodů, které mají nulovou vzdálenost od množiny A i od jejího doplněku se nazývá **hranice** množiny A a značí ∂A .

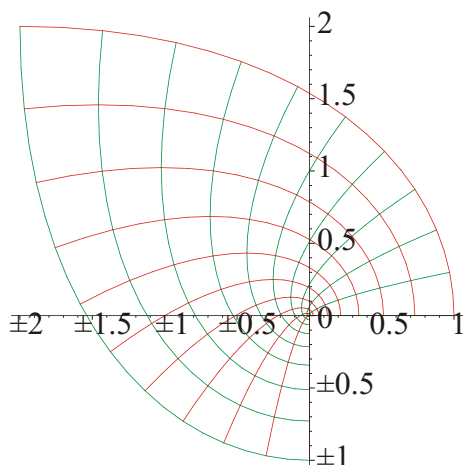
7.1.2 Konvergence a spojitost v \mathbb{C}

Postupujeme podobně jako u reálné proměnné. Např. řekneme, že posloupnost $\{z_n\}_1^{+\infty}$ bodů v \mathbb{C} má **limitu** (nebo **konverguje k**) $z_0 \in \mathbb{C}$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Podobně zkoumáme spojitost komplexních funkcí.

7.1.3 Funkce z \mathbb{C} do \mathbb{C} a jejich zobrazování

Zkoumáme **funkce komplexní proměnné** jako zobrazení z \mathbb{C} do \mathbb{C} . Zapisujeme $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = \Re f + i\Im f$, kde $\Re f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **reálná složka** funkce f a $\Im f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **imaginární složka** funkce f .

Zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ můžeme znázornit jako transformaci komplexní roviny, například jako deformaci čtvercové sítě v komplexní rovině vzorů.



Obrázek 7.1.3: Transformace jednotkového čtverce pomocí funkce $z \mapsto z^3$.

Zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ můžeme též znázornit jako dvojici zobrazení $\Re f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\Im f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.



Tak si představíme funkci jako dvě plochy. Nic moc.

7.2 Derivace komplexní funkce

7.2.1 Definice (Derivace v bodě)

Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 **derivaci** $f'(z_0)$, pokud existuje následující limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Tomuto zlomku se říká **diferenční podíl**. Nedefinujeme jednostranné derivace.



Důležitá záležitost je to, že se všechno odehrává v komplexní rovině. Tedy se h pohybuje poblíž nuly v komplexní rovině, dělí se komplexní čísla a podobně. Geometrický smysl je opět takový, aby se funkce dala v bodě dobře aproximovat lineárním zobrazením. Jaké lineární zobrazení je míněno se lehce zjistí.

Například funkce $z \mapsto z$ derivaci má, zatímco $z \mapsto \bar{z}$ ji nemá.

7.2.2 Věta (O komplexní derivaci a otáčení rovin)

Funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 derivaci $f'(z_0)$ právě když funkce f_1 a f_2 definované předpisem

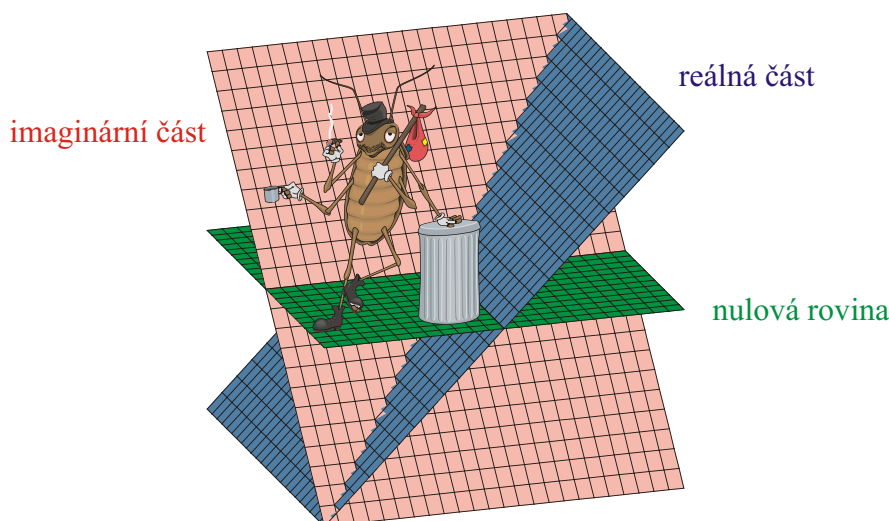
$$f(x + iy) = f_1(x + iy) + if_2(x + iy)$$

mají derivaci a platí "tečná rovina k f_2 je otočená o 90° doleva oproti tečné rovině k f_1 ".

(A.L.Cauchy \sim 1930, B.Riemann \sim 1850)



... což platí pro $z \mapsto z$, ale neplatí pro $z \mapsto \bar{z}$.



Obrázek 7.2.2: Po které ploše mám stoupat? Jsem pravičák či levičák?



Reálný človíček stoupá po reálné části funkce, imaginární človíček stoupá po imaginární části ve směru o 90° doleva. Reálný človíček je "pravičák", imaginární človíček je "levičák".

Podmínky popisující vztah tečných rovin reálné a imaginární části funkce s komplexní derivací se nazývají **holomorfní podmínky**.

(A.L.Cauchy \sim 1930, B.Riemann \sim 1850)

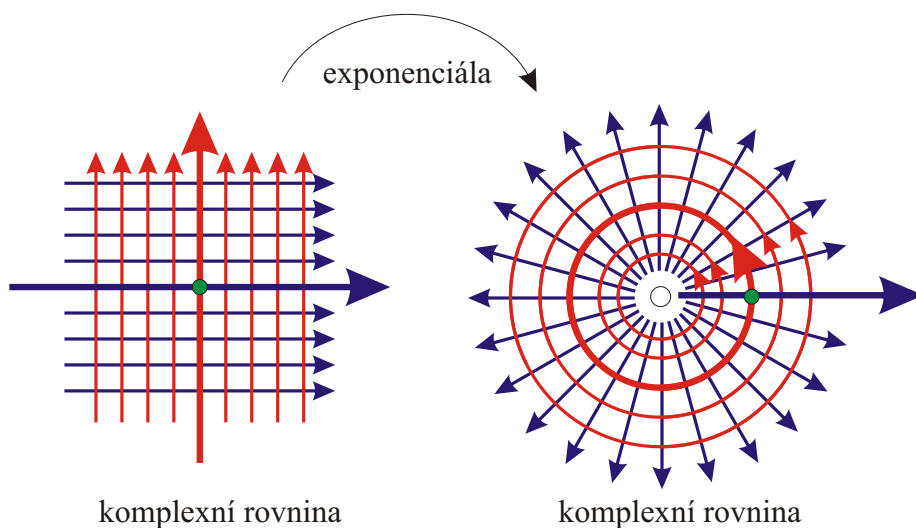
Holomorfní funkce jsou vlastně řešení rovnice $\bar{\partial}f(z) = 0$, což je jiný zápis kolmosti reálné a imaginární části funkce. Obě části jsou harmonické, zpravidla jde z jedné části dopočítat druhou.



Takhle by šlo pro každou rovnici udělat svojské holomorfní funkce.

7.2.3 Věta (O komplexní derivaci a zachování úhlů)

Jestliže funkce f definovaná v okolí bodu $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ má v bodě z_0 nenulovou derivaci $f'(z_0)$, pak se křivka procházející bodem z_0 ve směru α zobrazí pomocí f do křivky procházející bodem $f(z_0)$ ve směru $f'(z_0)\alpha$. Tedy se zachovávají úhly křivek procházející bodem z_0 .



Obrázek 7.2.3: Exponenciála převádí vodorovné přímky do pěkného vějíře (s nekonečným násobným překrytím). Přímky svislé zase do kružnic (s nekonečným otáčením).

7.2.4 Definice (Holomorfní funkce)

Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ je **holomorfní** na množině $M \subset \mathbb{C}$ když má f na množině M derivaci.



Zpravidla máme funkci holomorfní na otevřené množině. Ukáže se, že funkce holomorfní jsou velmi hezké, lokálně jsou rovny mocninné řadě, mají vlastnost průměru, ...

7.3 Komplexní křivkový integrál

7.3.1 Definice (Křivky, cesty, cykly)

Křivka je zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, kde φ_1 a φ_2 jsou reálné funkce se spojitými derivacemi. Spojitým napojováním křivek vznikne **cesta** ("po částech hladká křivka"). Cesta je **uzavřená**, pokud se koncový bod poslední křivky rovná počátečnímu bodu první křivky. Konečné sjednocení cest se nazývá **cykl**.

7.3.2 Definice (Oblast a křivková souvislost)

Množina $U \subset \mathbb{C}$ se nazývá **křivkově souvislá**, pokud pro každé dva body U existuje cesta v U cesta spojující tyto body.

Otevřená křivkově souvislá množina $U \subset \mathbb{C}$ se nazývá **oblast**.

Množina $U \subset \mathbb{S}$ se nazývá **jednoduše souvislá**, pokud její doplněk je souvislý.



To přibližně znamená, že množina U "nemá díry".

7.3.3 Definice (Komplexní křivkový integrál)

Nechť f je spojitá na otevřené množině $U \subset \mathbb{C}$ a $\varphi : [a, b] \rightarrow U$ je křivka. Definujeme (**komplexní**) **křivkový integrál** z f podél φ

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt .$$

Zde se integruje komplexní funkce "po složkách".



POZOR !!!
Integrál z jedničky přes kružnici je nula !!!
Připomíná to trochu vektorovou integraci ...

Podobný integrál přes cesty se počítá jako součet příslušných integrálů přes křivky, které tvoří danou cestu. Podobně přes cykl.



... a u křivek, cest a cyklů integrál nezáleží na "parametrizaci"!!! (Pokud je kladná.)

7.3.4 Definice (Komplexní primitivní funkce)

Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $g' = f$ na U . Pak říkáme, že funkce g je **(komplexní) primitivní funkce** k funkce f na U .

7.3.5 Věta (Komplexní zákon zachování)

Nechť na oblasti U má funkce f derivaci f' . Pak platí

$$\int_{\varphi} f'(z) dz = f(\beta) - f(\alpha)$$

pro libovolnou křivku φ jdoucí z bodu α do bodu β .

Důkaz:

$$\int_{\varphi} f'(z) dz = \int_a^b f'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\varphi(t))) dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) .$$

■



Zatím se nám daří. Podobá se to docela reálnému případu. Budeme se dále zabývat obrácením této věty v tom smyslu, zda se takovým křivkovým integrálem dá počítat primitivní funkce. To by zřejmě integrál přes uzavřenou křivku měl být nula. Pro celou komplexní analýzu je základním následující příklad

7.3.6 Cesta kolem pólu

Komplexní integrál z funkce $1/z$ přes jednotkovou kružnici ($\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$) je roven $2\pi i$. Opravdu

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi i .$$

Pokud bychom integrovali přes malinkou křivku poblíž bodu 1, dostali bychom malinké číslo, pokud bychom použili cestu umístěnou do reálné osy, byl by výsledek reálný. Jednotková kružnice obchází "pól" funkce $1/z$ umístěný v počátku. Tedy integrace přes křivku z bodu 1 do bodu 1 závisí na dráze, kudy jdeme.



P O Z O R !!!

Tuto vlastnost má v podstatě pouze "zlá" funkce $1/z$, popřípadě sečtená s jinými "hodnými" funkcemi.



Obrázek 7.3.6: Pro zeměkouli je pól na jihu. Pro obecnou funkci může být kdekoliv.

Budeme zkoumat, kdy je interál z holomorfní funkce přes uzavřenou cestu nulový, kdy křivkový integrál z holomorfní funkce závisí pouze na počátečním a koncovém bodě (nezávisí na volbě cesty). Toto souvisí s tím, zda má holomorfní funkce primitivní funkci. Její sestavení pomocí křivkového integrálu dané funkce není problém, pokud ovšem je toto sestavení korektní ...



Je to pořád ten samý problém, pohybujeme se v kruhu ;-)

7.3.7 Věta (Primitivní funkce a integrace)

Nechť je funkce f spojitá na otevřené množině U . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní

- (i) f má na U primitivní funkci.
- (ii) Integrál z f nezávisí v U na dráze.
- (iii) Integrál z f přes uzavřenou cestu je nulový.



Pokud množina nemá "díry", primitivní funkce nakonec bude existovat. To se brzy ukáže.

7.3.8 Věta (Integrace okolo trojúhelníku)

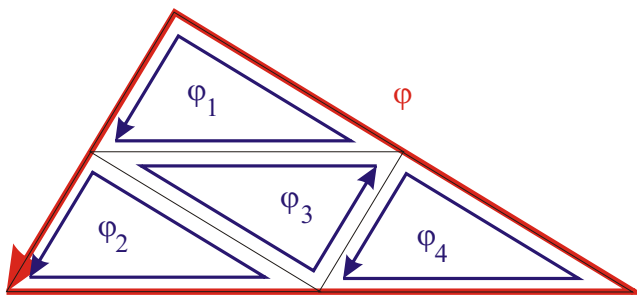
Nechť je funkce f holomorfní na otevřené množině U a cesta φ popisuje obvod trojúhelníku $T \subset U$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 0 .$$

Důkaz: Nechtě

$$\left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| = K > 0 .$$

Odvodíme spor. Označme L obvod trojúhelníku T . Rozdělíme trojúhelník T středními příčkami na čtyři trojúhelníky. Alespoň přes obvod jednoho je analogický integrál roven alespoň $K/4$.



Obrázek 7.3.8: Integraci přes obvod trojúhelníku nahradíme integrací přes obvody menších trojúhelníků. Úseky, které jdeme sem i tam se ruší.

Tak postupujeme indukcí a sestavíme zmenšující se posloupnost trojúhelníků. Její průnik je jeden bod, označíme jej z_0 . V bodě z_0 použijeme existenci derivace a vyjádříme funkci f ve tvaru

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z) .$$

První dva sčítanci na pravé straně jsou funkce mající primitivní funkci, tedy se integrace z funkce $f(z)$ přes uzavřenou křivku redukuje na integraci funkce $(z - z_0)\varepsilon(z)$.

V n -tém kroku při integraci přes obvod φ_n trojúhelníku T_n vybraného v n -tém kroku odhadujeme

$$\frac{K}{4^n} \leq \left| \int_{\varphi_n} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\varphi_n} (z - z_0)\varepsilon(z) dz \right| \leq \frac{L^2}{4^n} \sup_{z \in T_n} |\varepsilon(z)| .$$

Po násobení 4^n plyne díky derivaci v bodě z_0 z

$$K \leq L^2 \sup_{z \in T_n} |\varepsilon(z)| \rightarrow 0 , n \rightarrow \infty$$

spor. ■

Pokud oslabíme předpoklady tak, že je funkce f spojitá v U a holomorfní v $U \setminus \{w_0\}$, platí tvrzení věty stejně.



Okolo bodu w_0 uděláme malinký trojúhelníček T_w s nepatrným integrálem a zbytek rozdělíme opět na trojúhelníky s nulovým integrálem

7.3.9 Věta (Existence primitivní funkce na kruhu)

K funkci f holomorfní na jednotkovém kruhu existuje na jednotkovém kruhu primitivní funkce.

Důkaz: Definujeme primitivní funkci v bodě z integrálem

$$\int_{\varphi_z} f(w) dw ,$$

kde křivka φ_z je úsečka z počátku do bodu z . S použitím věty o integraci okolo trojúhelníku jde dokázat, že jsme sestrojili primitivní funkci. ■



Podobně se sestrojí primitivní funkce na "hvězdicovité" množině.

7.3.10 Index bodu ke křivce

Při výpočtu integrálu

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz$$

pro křivku φ neprocházející počátkem můžeme křivku φ lokálně nahrazovat částmi jednotkové kružnice díky předchozí větě. Celkem můžeme přetvořit křivku φ na cestu procházející pouze jednotkovou kružnicí. Takto integraci převedeme na známý integrál přes jednotkovou kružnici, který je roven $2\pi i$. Tedy vidíme, že výsledek bude roven n -krát $2\pi i$, kde n udává počet "oběhů" křivky φ okolo počátku (proti směru hodinových ručiček).

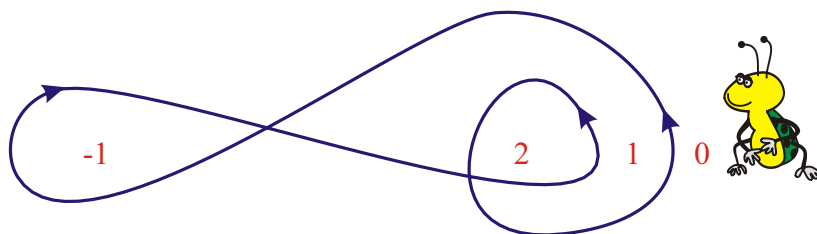
Obecně počítáme tento počet oběhů křivky (cesty, cyklu) φ okolo daného bodu z_0 jako integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z - z_0} dz$$

a tomuto číslu říkáme **index** bodu z_0 ke křivce φ , značíme $\text{ind}(z_0, \varphi)$.

Index je spojitá, celočíselná a užitečná funkce. Index vzroste o jedničku, pokud přeskočíme přes křivku "zprava doleva".

(Mařík)



Obrázek 7.3.10: Index bodu ke křivce - zprava doleva přibereme jedničku.

7.4 Základní vlastnosti holomorfních funkcí

7.4.1 Věta (Integrální vyjádření holomorfní funkce)

K funkci f holomorfní na dvojkovém kruhu U platí na jednotkovém kruhu D rovnost

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad |z| < 1.$$

(A.L.Cauchy \sim 1930)

Důkaz: Funkce F definovaná pro pevné $z \in D$ na U předpisem

$$F(z) = f'(z), \quad F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

je spojitá v U a holomorfní v $U \setminus \{z\}$. Použijeme pro ni větu o integraci okolo trojúhelníku a dostaneme

$$0 = \int_{\varphi} F(w) dw = \int_{\varphi} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \text{ind}(z, \varphi).$$

■



Podobný výsledek dostaneme i pro jiné množiny a křivky. Toto tvrzení má široké použití.

7.4.2 Věta (Omezená celá funkce je konstantní)

Holomorfní omezená funkce na \mathbb{C} je konstantní.

(J.Liouville \sim 1840)

Důkaz: Použijeme integrální vyjádření holomorfní funkce a odhadneme $f(a) - f(b)$ jako integrál přes kruh o poloměru R . Při $R \rightarrow \infty$ dostaneme $f(a) = f(b)$. ■

Funkce holomorfní na \mathbb{C} se nazývá **celá**.

7.4.3 Věta (Základní věta algebry)

Polynom kladného stupně má v \mathbb{C} kořen.

Důkaz: Jinak by funkce $1/P(z)$ byla holomorfní a omezená, tedy podle předchozí věty konstantní. ■

7.4.4 Věta (Princip maxima modulu)

Funkce holomorfní f na dvojkovém kruhu U nabývá na jednotkovém kruhu D maxima absolutní hodnoty na jednotkové kružnici.

Důkaz: Použijeme integrální vyjádření holomorfní funkce f^n a odhadneme

$$|f^n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f^n(w)}{w-z} dw \right| \leq M^n \frac{R}{R-z},$$

tedy

$$|f(z)| \leq M \sqrt[n]{\frac{R}{R-z}} \rightarrow M, \quad n \rightarrow \infty,$$

kde M je odhad $|f|$ na jednotkové kružnici. ■



Tvrzení platí v obecnější podobě. Za ním stojí důležitá vlastnost "průměru" u holomorfních funkcí.

7.4.5 Věta (Zápis holomorfní funkce mocninnou řadou)

Nechť funkce f je holomorfní na dvojkovém kruhu U . Pak pro $|z| < 1$ platí rovnost

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

kde koeficienty c_n u mocninné řady jdou určeny vztahem

$$c^n = \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

a křivka φ je kladně orientovaná jednotková kružnice.

Intelektuální pochopení nepomáhá učení: inteligence je zde na překážku.
(Gattegno)

Důkaz: Jde o rozvoj

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

a stejnoměrnou konvergenci řady, která dovolí prohodit řadu a integrál. ■



Takto lze rozvést v mocninovou řadu každá holomorfní funkce na každém kruhu, na kterém je holomorfní. Konvergence příslušné mocninné řady je lokálně stejnoměrná, řady konvergují až k hranici množiny "holomorfnosti" zadané funkce.

Podobně rozvedeme funkci holomorfní na otevřené množině U obsahující mezikruží $r \leq |z| \leq R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_R} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

řada zde vystupující se nazývá **zobecněná mocninná řada** a konverguje na $r < |z| < R$.

(Laurent)

Pro takové řady zavádíme následující pojmy

- ⇒ O funkci, která má v takovém zápise nenulové pouze koeficienty u kladných mocnin říkáme, že má v počátku **nulový bod** (příslušné násobnosti). Například funkce $z^2 - z^3$ má v počátku nulový bod násobnosti 2.
- ⇒ O funkci holomorfní na prstencovém okolí počátku, která má v takovém zápise pouze konečně mnoho nenulových koeficientů u záporných mocnin říkáme, že má v počátku **pól** (příslušné násobnosti). Například funkce $1/z^3 + 1/z$ má v počátku pól násobnosti 3.
- ⇒ O funkci holomorfní na prstencovém okolí počátku, která má v takovém zápise nekonečně mnoho nenulových koeficientů u záporných mocnin říkáme, že má v počátku **podstatnou singularitu**. Například funkce $\exp(1/z)$ má v počátku podstatnou singularitu.
- ⇒ Pro funkci f holomorfní na prstencovém okolí počátku se koeficient u $1/z$ nazývá **reziduum** a označuje rez $(f, 0)$. Například funkce $\exp(1/z)$ má rez $(\exp(1/z), 0) = 1$.

Podobně se tyto pojmy používají pro rozvoje v okolí libovolného bodu.

7.4.6 Věta (O podstatné singularitě)

Funkce, která má v počátku podstatnou singularitu, zobrazuje každé prstencové okolí počátku na celou komplexní rovinu s možnou výjimkou jednoho bodu. Například $\exp(1/z)$ mine počátek.

(Picard)

Kdyby lidé věděli, kolik práce mi dalo osvojit si své mistrovství, nezdálo by se jim to nijak nádherné.

(Michelangelo Buonarroti ~ 1520)



Obrázek 7.4.6: V matematice i jinde. K velikému dílu je třeba velké úsilí.



Je to dřina, ale ta sláva potom ...

7.4.7 Věta (Derivace a integrace mocninných řad)

Řady tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

lze derivovat člen po členu. Primitivní funkci lze počítat také člen po členu, pokud chybí člen s $1/z$.

7.4.8 Věta (Reziduová věta)

Nechť je funkce f holomorfní v dvojkovém kruhu až na konečně mnoho bodů uvnitř jednotkového kruhu, ve kterých má póly. Pak platí

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_z \operatorname{rez}(f, z),$$

kde φ je kladně orientovaná jednotková kružnice a kde se sčítá přes body z , ve kterých jsou póly (konečný součet).

7.4.9 Příklad na reziduovou větu

Reálný integrál aproximujeme komplexním křivkovým integrálem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{\varphi_1} \frac{1}{1+z^2} dz,$$

kde $\varphi_1(t) = t$, $t \in [-R, R]$. Odhadneme pomocný křivkový integrál přes polokružnici

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_2} \frac{1}{1+z^2} dz = 0,$$

kde $\varphi_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Použijeme reziduovou větu

$$\int_{\varphi} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{rez}\left(\frac{1}{1+z^2}, 0\right) = \pi,$$

kde φ vznikne napojením φ_1 a φ_2 . Výsledek je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$



To samé spočítá funkce arctg .

7.4.10 Věta (Stejněměrná limita holomorfních funkcí)

Stejněměrně konvergentní posloupnost holomorfních funkcí na otevřené množině konverguje k holomorfní funkci.

(K.Weierstrass \sim 1869)

Důkaz: Jde o limitní přechod v integrálním vyjádření holomorfních funkcí pomocí křivkového integrálu. ■

7.4.11 Aproximace racionálními funkcemi

Nechť K je kompaktní podmnožina komplexní roviny \mathbb{C} . Zvolme množinu $\Omega \subset \mathbb{C}$ disjuntní s K tak, aby Ω protнула každou komponentu $\mathbb{C} \setminus K$. Je-li funkce f holomorfní na okolí množiny K , pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje racionální funkce g s póly v Ω tak, že $|f - g| < \varepsilon$ na K .

(Runge)

7.4.12 Aproximace polynomy

Nechť K je kompaktní podmnožina komplexní roviny \mathbb{C} . Je-li funkce f holomorfní na K , pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje polynom $p(x, y)$ dvou proměnných tak, že $|f(z) - p(x, y)| < \varepsilon$ pro všechna $z \in K$.

7.4.13 Věta (O jednoznačnosti holomorfních funkcí)

Je-li funkce f holomorfní na jednotkovém kruhu a množina nulových bodů funkce f má hromadný bod v počátku, pak je funkce f nulová na jednotkovém kruhu.

Důkaz: Množina hromadných bodů nulových bodů funkce f je neprázdná (díky předpokladům), uzavřená (díky spojitosti funkce) i otevřená (díky rozvoji v mocninnou řadu) v jednotkovém kruhu. ■

7.4.14 Věta (O otevřeném zobrazení)

Je-li funkce f holomorfní na jednotkovém kruhu a derivace v počátku je nenulová, pak existuje okolí U počátku, na kterém je funkce f prostá, množina $V = f(U)$ je otevřená a příslušná inverzní funkce je holomorfní na V .

Důkaz: Holomorfní funkce $f(z) = f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ jde reprezentovat jako regulární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. ■

7.4.15 Věta (O jezírkách bez ostrůvků)

Nechť U je otevřená souvislá množina v \mathbb{C} , jejíž doplněk v rozšířené komplexní rovině S je také souvislý (jezíčko bez ostrůvku). Pak existuje prosté holomorfní zobrazení U na otevřený jednotkový kruh.

(B.Riemann \sim 1850)

Důkaz: Nechť $0 \in U$. Alespoň jednu prostou holomorfní funkci f z U do jednotkového kruhu najdeme. Pak zkusíme najít maximální z hlediska $f'(0)$. Tato existuje a zobrazuje na jednotkový kruh. ■

Prostou holomorfní funkci budeme nazývat **konformní**. Má vždy nenulovou derivaci, proto zachovává úhly. Hodí se k transformacím lokálních pravoúhlých souřadnic na množině, převádí rovinné proudění tekutiny v zadané oblasti na proudění v jednotkovém kruhu (nebo vně) například v hydromechanice, při proudění vzduchu, ...



Takto jdou tedy zobrazit každé dvě jezírka bez ostrůvku na sebe, například funkce z^2 zobrazuje kvadrant na polořivinu.

7.4.16 Věta (O membránách)

Reálná část i imaginární část holomorfní funkce splňuje rovnici

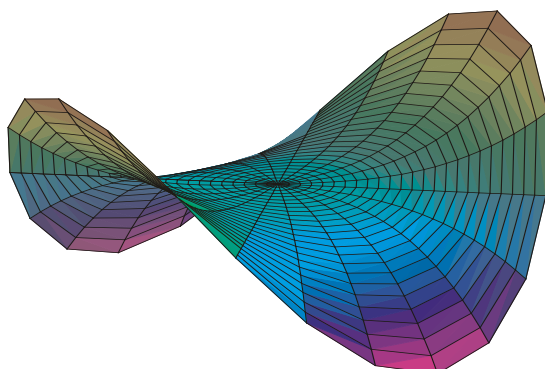
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

Důkaz: Platí díky holomorfním podmínkám a hladkosti holomorfních funkcí. ■

Rovnici ve větě se říká **rovnice membrány** a funkce, které jí vyhovují se nazývají **harmonické**.



Můžeme se na ně dívat jako na funkce popisující pružné membrány, protože rovnice membrány nedovolí "kopeček". Pokud totiž je funkce ve směru osy x konvexní (a má druhou derivaci kladnou), musí být ve směru osy y konkávní (a mít druhou derivaci zápornou). Tím získáme "sedlo", nikdy "kopeček".



Obrázek 7.4.16: Prohnutí v jednom směru se musí u membrány projevit prohnutím ve druhém směru. Je tam sedlový bod.

7.5 Analytické funkce

7.5.1 Víceznačné funkce

Viděli jsme, že je holomorfní funkci možno lokálně rozvést v mocninnou řadu konvergující vždy na nějakém kruhu konvergence. Takovéto kruhy konvergence se mohou překrývat a

postupně vyplňovat definiční obor funkce.

Provedeme to na příkladu primitivní funkce k funkci $f(z) = 1/z$. Lokálně lze funkci f rozvést v mocninnou řadu v okolí bodu 1. Tam najdeme lokálně primitivní funkci k f , kterou nazveme F (zvolíme $F(1) = 0$). Vezmeme si libovolnou křivku v rovině vycházející z bodu 1 neprocházející počátkem. Podél této křivky jde funkci f i její primitivní funkci F lokálně navazovat pomocí kruhů konvergence příslušných mocninných řad.

Co dostaneme, pokud budeme prodlužovat F podél jednotkové kružnice, můžeme spočítat jako primitivní funkci pomocí křivkového integrálu z bodu 1 do bodu 1

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i ,$$

což není hodnota F v bodě 1. Po jednom oběhu počátku jsme získali pro primitivní funkci F hodnotu $2\pi i$. Takto jde pokračovat a vidíme, že dostaneme vlastně nekonečně mnoho "hodnot" pro primitivní funkci v bodě 1.



Milý komplexní logaritmus je primitivní funkce k $1/z$.

Další způsob získání "víceznačných funkcí" je rozšíření pojmu "inverzní zobrazení". Takto jde snadno získat řada "víceznačných funkcí".



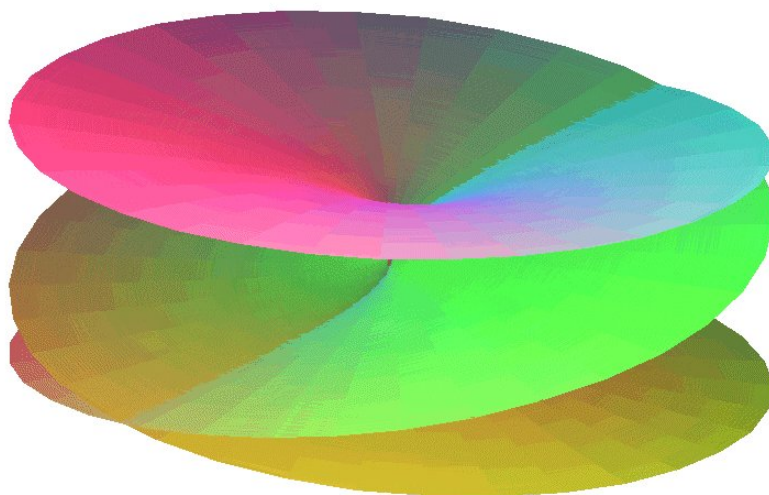
Milý komplexní logaritmus je inverzní funkce k exponenciále.



Obrázek 7.5.1: Reálná a imaginární část logaritmu je jednou z nejkrásnějších partií komplexní analýzy.

7.5.2 Analytický element a analytická funkce

Holomorfní funkci na otevřeném kruhu budeme nazývat **analytický element**, tedy se jedná o dvojici (funkce, kruh). Analytický element D_2 je **analytické pokračování** analytického elementu D_1 , pokud se jejich funkce rovnají na neprázdném průniku jejich kruhů, píšeme $D_1 \triangleright D_2$. Konečná posloupnost analytických elementů $D_1 \triangleright D_2 \triangleright \dots \triangleright D_n$ se nazývá **větev** analytického elementu D_1 . Analytický element spolu se všemi jeho větvemi se nazývá **analytická funkce**.



Obrázek 7.5.2: Analytické elementy si vynucují lokální chování funkce. Tady si reálná část komplexní odmocniny vynucuje analytickou funkci se třemi "plochami".

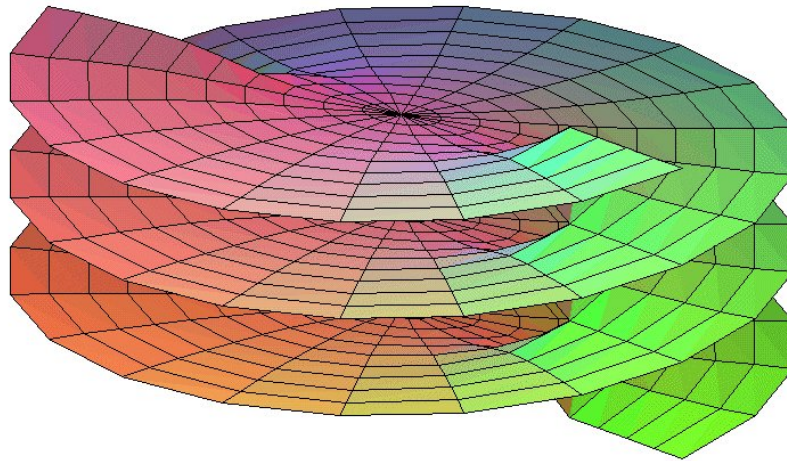
Hodnotou analytické funkce v bodě chápeme množinu všech hodnot, které v daném bodě nabývají analytické elementy přítomné v analytické funkci. Pokud jde v každém bodě o jednobodovou množinu, říkáme, že je analytická funkce **jednoznačná**.

Při znázornění analytických funkcí jde o znázornění konečných posloupností holomorfních funkcí. Opět použijeme buď transformace komplexní roviny nebo znázornění reálné a imaginární složky jako dvě plochy.

7.5.3 Analytické funkce - funkce na ploše

Holomorfní funkce jsou definované na podmnožinách komplexní roviny. Analytickou funkci můžeme chápat jako funkci definovanou na jakési ploše "startující" z komplexní roviny. Tak vznikne v některých případech velmi komplikovaná plocha, která zachycuje analytickou funkci. Abychom si podrželi informaci o "značnosti" analytické funkce, je zvykem definiční plochu slepit v těch místech, kde jsou na jejich analytických elementech identické hodnoty. Takto vytvořená plocha se nazývá **víceznačná plocha** analytické funkce. Tak si například druhá odmocnina zachová svoji maximální "dvojznačnost". Víceznačná plocha se někdy "nevejde" do \mathbb{R}^3 bez "křížení, které vlastně nesmí existovat. Jde pouze o to, že víceznačná plocha někdy nejde vnořit do prostoru.

(B.Riemann ~ 1850)



Obrázek 7.5.2: Analytické elementy si vynucují lokální chování funkce. Tady si reálná část funkce arkustangens vynucuje analytickou funkci se nekonečně mnoha "plochami".

7.5.4 Věta (Jednoznačnost analytické funkce na kruhu)

Analytická funkce v jednoduše souvislé oblasti je jednoznačná.

Důkaz: Jde o křivkový integrál a primitivní funkci. ■

Věta se též nazývá **věta o monodromii**.

Myslím, že nejlepší je znát pro všechno vysvětlení - proč to vzniká, proč to pomíjí, proč to je.

(Sókratés ~ -410)

Kapitola 8

Funkce více komplexních proměnných



ato kapitola ukazuje možnosti a nemožnosti, které obsahuje vícerozměrný komplexní svět.

8.1 Základní vlastnosti

8.1.1 Definice

Funkce $f(z_1, \dots, z_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá **holomorfní funkce**, pokud je holomorfní v každé složce zvlášť. Množinu funkcí holomorfních v množině $D \subset \mathbb{C}^n$ budeme značit $\mathcal{O}(D)$.

8.1.2 Oblast holomorfnosti

Není pravda, že

- ⇒ Funkce $z \mapsto 1/z$ je holomorfní mimo počátek.
- ⇒ Existuje funkce holomorfní až na počátek.

8.1.3 Polydisk

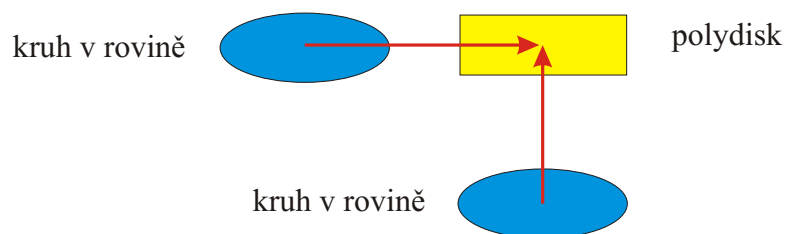
Součin jednotkových koulí v \mathbb{C} nazveme **polydisk** v \mathbb{C}^n a budeme značit pro $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ a $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$

$$P(a, r) = \prod_{j=1}^n B(a_j, r_j) .$$

Pro funkci f holomorfní na $P(a, r)$ a spojitou na $\overline{P(a, r)}$ platí

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

pro $z \in P(a, r)$ a $\Gamma_j = \{\zeta_j \in \mathbb{C} : |\zeta_j - a_j| = r_j\}$, $1 \leq j \leq n$.



Obrázek 8.1.3: Součin kruhů je ve skutečnosti (v \mathbb{R}^4) trochu jako míč na ragby.

8.1.4 Rozšiřování holomorfních funkcí

Nechť D je omezená oblast v \mathbb{C}^n , $n \geq 2$ a K nechť je kompaktní podmnožina D taková, že $D \setminus K$ je souvislá. Pak každá funkce holomorfní v $D \setminus K$ lze holomorfně rozšířit na D .

(Hartogs)

8.1.5 Zobrazení polydisku na kouli

Pro $n \geq 2$ neexistuje holomorfní bijekce polydisku na kouli, které má holomorfní inverzi.

(H.J.Poincaré \sim 1910)

Kapitola 9

Obecné prostory



rochu snění nikomu neuškodí. Zkusíme si zrušit v reálném světě některé (nepodstatné?) vlastnosti. Sestrojíme nové světy, kde platí pouze některé z obyčejných vlastností obyčejného prostoru.



V podstatě si kromě hraní zkusíme, z kterých vlastností plynou které vlastnosti. To není podstatné. Důležité je, že se některé věci budou dokazovat pouze jednou v jisté obecné situaci, kteroužto věc pak v pohodě použijeme kdekoliv to půjde. Čas jsou peníze.

9.1 Topologické prostory



Topologie je kouzelná partie matematiky a nabízí řadu pěkných témat. Za zmínku stojí problém 4 barev, uzlování, zkoumání křivek, ploch a těles, dimenze prostoru, ...

9.1.1 Definice (Topologický prostor)

Soubor τ podmnožin množiny T nazveme **topologie** na množině T pokud

- (i) τ obsahuje prázdnou množinu a T ,
- (ii) konečný průnik prvků τ je opět prvkem τ ,
- (iii) libovolné sjednocení prvků τ je opět prvkem τ .

Prvky souboru τ nazýváme **otevřené množiny**. Množinu T s topologií τ nazýváme **topologický prostor**, někdy zapisujeme jako dvojici (T, τ) .

Představivost je důležitější než znalost.

(A.Einstein ~ 1950)

Základními příklady topologických prostorů jsou reálná osa nebo rovina, kde za topologii pokládáme systém všech otevřených množin (vytvořené pomocí okolí ...).



Topologické prostory jsou kouzelné světy, kde se jejich lokální struktura (topologie) určí podle našich přání a pak tyto prostory žijí svůj život pro naši radost :-)

9.1.2 Základní pojmy

Množina $A \subset T$ se nazývá **uzavřená**, pokud její **doplňěk** $T \setminus A$ je otevřená množina. Průnik systému všech uzavřených množin obsahujících množinu A se nazývá **uzávěr** množiny A , značíme \bar{A} . Sjednocení systému všech otevřených množin obsažených v množině A se nazývá **vnitřek** množiny A , značíme $\text{int } A$. Každou množinu obsahující ve svém vnitřku daný bod t nazýváme **okolí** bodu t . Množina bodů, které mají v každém svém okolí bod množiny A i bod jejího doplňku se nazývá **hranice** množiny A a značí ∂A .

Kde kdysi byly hranice vědy, tam je teď její střed.

(G.Ch.Lichtenberg ~ 1770)

Množina bodů $A \subset T$ se nazývá **hustá** v T , pokud její uzavěr je roven T . Prostor T se nazývá **seperabilní**, pokud má spočetnou hustou podmnožinu. Množina β podmnožin prostoru T se nazývá **báze**, pokud je každá otevřená množina sjednocením některých prvků β .



Výhodou zavedení topologického prostoru je to, že nepotřebujeme zavádět vzdálenost, stačí nám pouze informace o okolích bodů. Z těchto okolí se sjednocením vytvoří libovolné otevřené množiny v topologickém prostoru.

9.1.3 Definice (Zobecněná posloupnost)

Nechť je $(\Gamma, <)$ částečně uspořádaná množina. Pokud ke každé dvojici $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ existuje $\gamma_3 \in \Gamma$ splňující $\gamma_1 < \gamma_3$ a $\gamma_2 < \gamma_3$, říkáme $(\Gamma, <)$ **usměrněná množina**. Libovolné zobrazení z nějaké usměrněné množiny do množiny T nazýváme **zobecněná posloupnost** v T . Je-li $(\Gamma, <)$ částečně uspořádaná množina a $t : \Gamma \rightarrow T$ zobecněná posloupnost píšeme t_γ místo $t(\gamma)$ a $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ místo $t : \Gamma \rightarrow T$.



Jde o to, že na rozdíl od obyčejné posloupnosti pracujeme místo s přirozenými indexy s indexy v usměrněné množině.

Zobecněná posloupnost $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se nazve **zobecněná podposloupnost** zobecněné posloupnosti $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ v T , pokud existuje funkce $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ taková, že

- (i) $v_\lambda = t_{\varphi(\lambda)}$ (jde o vybrání některých prvků z původních),
- (ii) φ je rostoucí, t.j. $\lambda_1 < \lambda_2 \implies \varphi(\lambda_1) < \varphi(\lambda_2)$ (uspořádání nemusí být stejné, ale platí tato "monotonie"),
- (iii) ke každému $\gamma \in \Gamma$ existuje $\lambda \in \Lambda$ tak, že $\gamma < \varphi(\lambda)$ (dosáhne se libovolně daleko).



Někdy totiž v topologickém prostoru nestačí posloupnosti obyčejné, například dostat se k hraničnímu bodu pomocí posloupnosti nemusí vždy jít ... (opravdu?)

9.1.4 Definice (Konvergence)

(Zobecněná) posloupnost $\{t_\gamma\}$ prvků topologického **konverguje** k prvku t , pokud pro každou otevřenou množinu U existuje index γ_0 , od kterého jsou prvky posloupnosti v U , tedy $t_\gamma \in U$ pro každé $\gamma > \gamma_0$.

Píšeme

$$\lim t_\gamma = t, \text{ nebo } t_\gamma \rightarrow t, \gamma \in \Gamma.$$

9.1.5 Filtrování

K zachycení konvergence v topologickém prostoru jsme použili zobecněné posloupnosti, nahrazují známé posloupnosti reálných čísel. Jiná možnost je pracovat se vhodnou sestavou neprázdných množin, která obsahuje průnik každých dvou svých množin a s každou množinou obsahuje všechny její nadmnožiny, takové soustavě říkáme **filtr**.



Nyní jde zkoumat konvergence v topologických prostorech pomocí filtrů podobně jako pomocí zobecněných posloupností. Záleží na volbě.

9.1.6 Definice (Spojitost)

Zobrazení mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) se nazývá **spojité**, pokud vzor každé otevřené množiny v T_2 je otevřená množina v T_1 .

9.1.7 Věta (Charakterizace spojitosti)

Zobrazení f mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) je spojitě právě tehdy, když

$$t_\gamma \rightarrow t \implies f(t_\gamma) \rightarrow f(t) .$$



Spojité se pozná pomocí zobecněných posloupností.

9.1.8 Definice (Oddělovací axiomy)

Topologický prostor T se nazývá

- ⇒ **oddělený**, pokud mají každé dva různé body disjunktní okolí (jdou otevřeně oddělit),

(Hausdorff \sim 1930)



Takové prostory jsou šikovné, pokud toto neplatí, jsou zde jakési "slepené" body a je to nepříjemnost :-)

- ⇒ **regulární**, pokud jde otevřeně oddělit každý bod a uzavřená množina,
- ⇒ **úplně regulární**, pokud pro každý bod t a uzavřenou množinu F existuje spojitá funkce f na T tak, že $f(t) = 0$ a $f = 1$ na F ,
- ⇒ **normální**, pokud jde otevřeně oddělit každé dvě disjunktní uzavřené množiny.

9.1.9 Definice (Kompaktní topologický prostor)

Topologický prostor T se nazývá **kompaktní**, pokud má každé pokrytí prostoru T otevřenými množinami konečné podpokrytí.

Podobně mluvíme i o kompaktních množinách (nebo stručně o kompaktech) v topologickém prostoru.



Jde o topologickou verzi pojmu "uzavřená a omezená podmnožina reálné osy". Podle plážového lemmatu o slunečnicích je jednotkový interval kompaktní.

Topologický prostor se nazývá **sekvenciálně kompaktní**, pokud z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Topologický prostor T se nazývá **spočetně kompaktní**, pokud má každé spočetné pokrytí prostoru T otevřenými množinami konečné podpokrytí.

Topologický prostor se nazývá **lokálně kompaktní**, pokud má každý bod kompaktní okolí. Topologický prostor se nazývá σ -**kompaktní**, pokud je spočetným sjednocením svých kompaktních podmnožin.

9.1.10 Věta (Charakterizace kompaktnosti)

Topologický prostor T je kompaktní právě když každá zobecněná posloupnost v T má zobecněnou podposloupnost konvergující v T .

9.1.11 Věta (O průniku kompakťů)

Průnik klesající posloupnosti neprázdných kompakťů je neprázdný.

(G.Cantor \sim 1910)

9.1.12 Definice (Kompaktifikace)

Kompaktní topologický prostor T se nazývá **kompaktifikace** prostoru T , pokud je T hustá podmnožina \mathcal{T} .

Nechť topologický prostor T je nekompaktní oddělený lokálně kompaktní prostor. Vytvoříme prostor přidáním nového prvku ∞ a na prostoru $T_\infty = T \cup \{\infty\}$ definujeme topologii tak, že k otevřeným množinám T přidáme ještě doplňky v T_∞ kompaktních množin v T . Prostor T_∞ se nazývá **jednobodová kompaktifikace** T .



Jednobodovou kompaktifikací komplexní roviny \mathbb{C} dostaneme rozšířenou komplexní rovinu \mathbb{S} . Jednobodovou kompaktifikací reálné osy \mathbb{R} dostaneme kružnici :-)

Jednobodová kompaktifikace je nejmenší možnou kompaktifikací. Největší možnou kompaktifikací prostoru T je **spojitá kompaktifikace** βT s vlastností, že každé spojitě zobrazení z T jde rozšířit na spojitě zobrazení z βT .

(Stone, Čech)

9.1.13 Definice (Souvislý topologický prostor)

Topologický prostor T se nazývá **souvislý prostor**, pokud jsou \emptyset a T jediné dvě zároveň otevřené a uzavřené množiny v T .



Jde o vlastnost "být v jednom kuse".

Spojitý obraz intervalu $[0, 1]$ se nazývá **oblouk**. Topologický prostor T se nazývá **obloukově souvislý**, pokud jsou každé dva body T spojeny v T obloukem. T .

Podobně definujeme i pro podmnožiny topologického prostoru.

9.1.14 Definice (Maximální souvislé množiny)

Maximální souvislá množina v topologickém prostoru T obsahující daný prvek t se nazývá **komponenta**, značíme C_t .

9.1.15 Věta (Vlastnosti souvislých množin)

Uzávěr souvislé množiny je souvislý.

Sjednocení spouvislých množin s neprázdným průnikem je souvislé.

Každá komponenta je uzavřená.

9.1.16 Věta (Topologická pozorování)

- ⇒ Spojitý obraz kompaktu je kompakt.
- ⇒ Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor.
- ⇒ Spojitý zobrazení kompaktního prostoru na oddělený prostor zobrazuje uzavřené množiny na uzavřené množiny.
- ⇒ Spojitý bijektivní obraz kompaktního prostoru na oddělený prostor je homeomorfismus.
- ⇒ Kompaktní oddělený prostor je normální.

9.1.17 Definice (Homeomorfní topologické prostory)

Bijekce mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) se nazývá **homeomorfismus**, pokud vzory i obrazy otevřených množin jsou otevřené množiny.

O topologických prostorech (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) pak říkáme, že jsou **homeomorfní**.



Z topologického pohledu jsou homeomorfní prostory totožné, říká se, že jsou stejné až na homeomorfismus.

Velmi důležité je poznat, kdy jsou dva topologické prostory homeomorfní. Budeme postupně zavádět řadu vlastností topologií a topologických prostorů. Homeomorfní prostory takové vlastnosti mají zároveň.



Tak můžeme poznat, kdy nejsou dva prostory homeomorfní.

9.1.18 Definice (Slabší a silnější topologie)

O topologii τ na množině T říkáme, že je **silnější** (nebo **jemnější**) než topologie σ na množině T , pokud $\sigma \subset \tau$, o topologii σ pak říkáme, že je **slabší** než τ .



Silnější topologie má víc otevřených množin, nejsilnější pak všechny. Nejslabší jen dvě (nebo jednu).

9.1.19 Definice (Slabá topologie)

Nechť je $f : X \rightarrow Y$ zobrazení množiny X do topologického prostoru Y . Nejslabší topologie na prostoru X , ve které je zobrazení f spojitě, se nazývá **slabá topologie** generovaná zobrazením f . Otevřené množiny ve slabé topologii v X jsou (v podstatě) vzory otevřených množin v Y .

Podobně pro více prostorů a zobrazení $(Y_\gamma, f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

9.1.20 Definice (Součin topologických prostorů)

Nechť $(X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ je soubor topologických prostorů. Definujeme **součin** X těchto prostorů jako množinu

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma = \{f : \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma, f(\gamma) \in X_\gamma \text{ pro každé } \gamma \in \Gamma\}.$$

Uvažujeme pro každé γ projekci prostoru X na jednotlivé složky X_γ danou předpisem $p(\gamma) = f(\gamma)$. Slabá topologie určená souborem všech těchto projekcí se nazývá **součinná topologie**.

Například pokud je $X_\gamma = \mathbb{R}$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, je X množina všech reálných funkcí na Γ s topologií bodové konvergence.

9.1.21 Věta (Součin kompakťů je kompaktní)

Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.

(Tichonov)

Jde o tvrzení ekvivalentní axiomu výběru.

(Kelley 1950)

9.1.22 Definice (Silná topologie)

Nechť je $f : Y \rightarrow X$ zobrazení topologického prostoru Y do množiny X . Nejsilnější topologie na prostoru X , ve které je zobrazení f spojitě, se nazývá **silná topologie** generovaná zobrazením f . Otevřené množiny ve slabé topologii v X jsou množiny v X s otevřeným obrazem v Y .

Podobně pro více prostorů a zobrazení $(Y_\gamma, f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

Pokud je zobrazení $f : Y \rightarrow X$ na, říkáme silné topologii **topologie kvocientu**. Například zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ definované předpisem $f(1) = 0$, $f(x) = x$ jindy, vytvoří kvocient homeomorfní s jednotkovou kružnicí.



Tak se ze čtverečku dá udělat prstýnek, překřížený pásek, anuloid nebo kouzelná láhev :-)

9.1.23 Věta (Oddělování pomocí funkce a normalita)

Nechť je X normální topologický prostor, A a B dvě disjunktní uzavřené množiny v X . Pak existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow [0, 1]$ tak, že $f = 1$ na A a $f = 0$ na B .

(Urysohn)

Důkaz: Pomocí normality definujeme posloupnost funkcí konvergující k hledané funkci.

■



Vložili jsme spojitou funkci mezi dvě "skokové" funkce (jaké?). Podobně můžeme vložit spojitou funkce mezi každé dvě polospojité funkce.

9.1.24 Věta (Rozšiřování spojitě funkce a normalita)

Nechť je X normální topologický prostor, A uzavřená množina v X a $f_0 : A \rightarrow [a, b]$ spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow [a, b]$ tak, že $f = f_0$ na A .

(Tietze, Urysohn)

9.1.25 Metrizační věty

Platí

⇒ Nechť je X kompaktní oddělený topologický prostor se spočetnou bází. Pak X je metrizable.

(Urysohn)

⇒ Nechť je X kompaktní oddělený topologický prostor a na X existuje spočetná množina spojitých reálných funkcí oddělující body. Pak X je metrizable.

9.1.26 O kategoriích hustých a řídkých množin

Množina se nazývá **řídká**, pokud její uzávěr nemá vnitřní body.

Množina se nazývá **1. kategorie**, pokud je spočetným sjednocením řídkých množin.

Množina se nazývá **2. kategorie**, pokud není 1. kategorie.

Množina se nazývá **reziduální**, pokud její doplněk je 1. kategorie.

Topologický prostor se nazývá **hutný**, pokud průnik každé posloupnosti hustých otevřených množin je hustý.

(R.L.Baire ~ 1920)

9.1.27 Věta (O kategoriích)

Nechť je X kompaktní oddělený topologický prostor. Pak průnik otevřených hustých podmnožin je hustý.

(R.L.Baire ~ 1920)

9.1.28 O průnicích otevřených množin

Množina se nazývá **typu G_δ** , nebo někdy G_δ **množinou**, pokud je průnikem spočetně mnoha otevřených množin.

Množina se nazývá **typu F_σ** , nebo někdy F_σ **množinou**, pokud je sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin.

Podobně se pokračuje dál, například množina typu $F_{\sigma\delta}$ je spočetným průnikem F_σ množin.

9.1.29 Definice (Malá induktivní dimenze)

Definujeme:

- ⇒ Prázdná množina má dimenzi -1
- ⇒ Pokud má každý bod prostoru libovolně malé okolí, jehož hranice má dimenzi menší než n , pak má prostor dimenzi menší nebo rovnu n . Pokud navíc nemá dimenzi menší než n , pak má dimenzi n .
- ⇒ Pokud nemá konečnou dimenzi, má dimenzi ∞ .

Tři kolmé přímky stačí pro měření těla.

(Claudius Ptolemaius)

9.2 Metrické prostory

9.2.1 Definice (Metrický prostor)

Nechť X je libovolná množina. Zobrazení d , které každé dvojici bodů X přiřadí reálné číslo se nazývá **vzdálenost** (nebo též **metrika**) na X , pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí

- (i) $d(x, y) \geq 0$,
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**trojúhelníková nerovnost**).

Množinu X s metrikou d nazýváme **metrický prostor**, někdy zapisujeme jako dvojici (X, d) .

Do podsvětí je odevšad stejně daleko.
(Cicero)

9.2.2 O vzdálenosti, okolí a topologii

Pro bod $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ definujeme (úplné) ε -ové **okolí** bodu x jako množinu $\{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ a značíme $U_\varepsilon(x)$.

V metrických prostorech je známa obecně jediná informace a tou je vzdálenost pro každou dvojici prvků prostoru. Pomocí této vzdálenosti dovedeme definovat okolí bodu a zkoumat otevřené množiny. Tím máme k dispozici na metrickém prostoru topologii a používáme tedy celý aparát topologických prostorů (konvergence, spojitost, kompaktnost, souvislost, ...).

9.2.3 Definice (Ekvivalentní metriky)

Dvě metriky jsou **ekvivalentní**, pokud generují stejnou topologii.

9.2.4 Věta (Univerzální separabilní metrický prostor)

Každý separabilní metrický prostor je izometricky izomorfní prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$.

(Banach \sim 1925, Mazur)

9.2.5 Úplnost prostoru

O posloupnosti $\{x_n\}_1^{+\infty}$ říkáme, že je **ustálená**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m > n_0$ platí $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Pokud je každá ustálená posloupnost konvergentní, říkáme prostoru **úplný**.

9.2.6 Věta (O kategoriích)

Nechť je X úplný metrický prostor. Pak průnik otevřených hustých podmnožin je hustý.

(R.L.Baire \sim 1920)

Matematika je hledání struktur a vzorů, které přinášejí řád a jednoduchost do našeho světa.

(Griffith 2000)

9.2.7 Věta (Kompaktnost v metrických prostorech)

Metrický prostor T je kompaktní právě když každá posloupnost v T má podposloupnost konvergující v T .

Množina M v metrickém prostoru se nazývá **prekompaktní**, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε -**síť**, což znamená konečná množina bodů $x_1, \dots, x_n \in M$ tak, že $M \subset \cup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$.

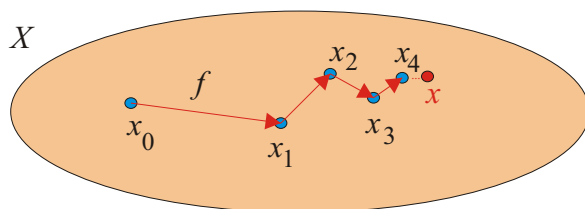
Množina M v metrickém prostoru se nazývá **relativně kompaktní**, pokud její uzávěr je kompaktní.

9.2.8 Věta (O pevném bodu kontraktivního zobrazení)

Nechť je X úplný metrický prostor. Nechť zobrazení $f : X \rightarrow X$ je **kontraktivní**, t.j. existuje $q < 1$ tak, že $d(f(x), f(y)) < qd(x, y)$ pro každé $x, y \in X$. Pak existuje **pevný bod** zobrazení f , tedy $f(x) = x$ pro jistý bod $x \in X$.

(S.Banach \sim 1925)

Důkaz: Zvolíme libovolně bod x_0 , jeho postupným zobrazováním vytvoříme konvergentní posloupnost s limitou v pevném bodě. ■



Obrázek 9.2.8: Zvolíme libovolný startovací bod. Skončíme v pevném bodu.

9.3 Vektorové prostory



Vektorové prostory jsou zpravidla vymyšleny na nějaký problém. Zpravidla jde o prostor řešení nějaké rovnice. V jeho podstatě musí být však nějaká linearity, jinak "sorry".

9.3.1 Definice (Vektorový prostor)

Nechť V je neprázdna množina se dvěma operacemi, součet dvou prvků $x + y$ a násobek αx prvku x číslem α splňující následující podmínky

- ⇒ součet je komutativní a asociativní,
- ⇒ existuje nulový (0) a opačný prvek ($-x$) pro sčítání,
- ⇒ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $1x = x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Množinu V nazýváme **vektorový prostor** (někdy též **lineární prostor**). Prvek V nazýváme **vektor** (někdy též **bod**), číslo pak nazýváme **skalár**. Pokud jsou čísla reálná nebo komplexní, jde o reálný nebo komplexní vektorový prostor (obecně je vektorový prostor "nad tělesem").

Množinu $W \subset V$ obsahující lineární kombinace svých prvků se nazývá **podprostor** vektorového prostoru V .

9.3.2 O zobrazeních

Zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory se nazývá **lineární**, pokud zachovává operace součet a násobek. Dva vektorové prostory se nazývají **izomorfní**, pokud mezi nimi existuje lineární bijekce. Zobrazení prostoru do sebe se nazývá **operátor**, zobrazení prostoru do tělesa (\mathbb{R} nebo \mathbb{C}) se nazývá **funkcionál** či **lineární forma**.

Množinu nulových bodů lineárního zobrazení L nazveme **jádro** zobrazení a značíme $\ker L$. Množinu hodnot lineárního zobrazení L nazveme **obor hodnot** zobrazení a značíme $\text{range } L$.

9.3.3 Definice (Algebraický duál)

Vektorový prostor všech funkcionalů na vektorovém prostoru V se nazývá **algebraický duál**, značíme $V^\#$.

9.3.4 Konvexní funkcionaly a pseudonormy

Nechť je V je vektorový prostor. Reálná funkce p na V se nazývá **konvexní funkcional**, pokud platí

- (i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pro každé $x \in V$, $\lambda \geq 0$,
- (ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in V$.

Konvexní funkcional se nazývá **pseudonorma**, pokud platí $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ pro každé $x \in V$ a každé λ .

9.3.5 Věta (Rozšiřování majorizovaných lineárních forem)

Nechť l je lineární forma na lineárním podprostoru W vektorového prostoru V , která je majorizovaná na podprostoru W daným konvexním funkcionalem p na V (t.j. $l \leq p$ na W). Pak existuje lineární forma L rozšiřující l na celý prostor V , majorizace dál platí (t.j. $L \leq p$ na V).

(Hahn, Banach \sim 1929)



Veškeré vlastnosti obecných prostorů jsou průhledné. Pokud platí v obecných prostorech, platí zpravidla i v \mathbb{R} a v \mathbb{R}^2 .

Tak si vlastně tyto vlastnosti lze dát do definice daného prostoru.

Sice tím pádem nebude definice minimální, ale BTW bude o důkaz méně ;-)

Důkaz: Uvažujeme podprostory mezi W a V , na nichž takové rozšíření existuje a hledáme maximální takový podprostor M . Použijeme dále Zornovo lemma (ve skutečnosti axiom výběru). Pokud maximální M není rovno V , pak přidáme k M další prvek x a definujeme na $M \cup \{x\}$ funkcional s požadovanými podmínkami. Zde se při hledání tohoto funkcionalu použije konvexita p . To je ve sporu s maximalitou M , tedy $M = V$. ■

Této slavné větě se říká **algebraická rozšiřovací věta**.



Jde prostě o to, že funkci $x \mapsto x$ na reálné ose rozšíříme například na funkci $(x, y) \mapsto x + y$ v rovině. Toto rozšiřování jde dělat ad libitum.

9.3.6 Nezávislost a báze

Konečná množina prvků V se nazývá **lineárně nezávislá množina**, pokud konečná lineární kombinace jejich prvků je rovna nulovému vektoru pouze v triviálním případě.

Množina prvků V se nazývá **(algebraická) báze** prostoru V , pokud její konečné množiny jsou lineárně nezávislé a každý prvek V jde napsat konečnou lineární kombinací prvků báze. Podle počtu prvků báze se určuje **dimenze** V ($\dim V = 0, n, \infty$).

9.3.7 Definice (Faktorové prostory)

Nechť je W podprostor vektorového prostoru V . Uvažujme na V ekvivalenci $x \approx y$, pokud $x - y \in W$. Třídy ekvivalence pak jsou ve tvaru $x + W$ a jejich operace určují vektorový prostor, který označíme V/W a nazýváme **faktorový prostor**, jeho dimenzi nazveme **kodimenze prostoru W ve V** . Například rovina v prostoru \mathbb{R}^3 , která prochází počátkem, má kodimenzi 1.

9.3.8 Definice (Nadrovina)

W je maximální vlastní podprostor vektorového prostoru V . Pro vektor $v \in V$ množinu $N = v + W$ nazveme **nadrovina**.



Podle věty o jádrech funkcionalů je nadrovina rovna $\{v \in V : L(v) = \alpha\}$ pro vhodný funkcional L .

Dotýká-li se v reálném vektorovém prostoru V množina A nadroviny $N = \{v \in V : L(v) = \alpha\}$ a množina A celá leží na jedné straně (např. $A \subset \{v \in V : L(v) \leq \alpha\}$), říkáme N **opěrná nadrovina** k množině A .

9.3.9 Věta (O jádrech funkcionalů)

W je maximální vlastní podprostor vektorového prostoru V (a má tedy kodimenzi 1) právě tehdy, když existuje nenulový lineární funkcional nulující se právě na W .

Důkaz: Je-li W vlastní maximální podprostor, zvolme $x \notin W$ a položme $L(x) = 1$, $L = 0$ na W . Naopak, označme $W = \ker L$ a zvolme $x \notin W$. Pak pro $v \in V$ máme $(v - \frac{L(v)}{L(x)}x) \in W$. Lineární obal $(W, \{x\})$ tvoří celý prostor V . ■

9.3.10 Věta (Základní lemma o jádrech)

Lineární funkcional L je lineární kombinací lineárních funkcionalů L_1, \dots, L_n právě když jádro L obsahuje průnik jader L_1, \dots, L_n .



Uf, to je opravdu podezřelé.

9.4 Topologické vektorové prostory

9.4.1 Definice (Topologický vektorový prostor)

Vektorový prostor s topologií, při níž jsou operace sčítání vektorů a násobení skalárem spojité, se nazývá **topologický vektorový prostor**. Topologii, při které je vektorový prostor topologickým vektorovým prostorem, nazveme **lineární topologie**.

9.4.2 Definice (Topologický duál)

Vektorový prostor všech spojitých funkcionalů na topologickém vektorovém prostoru V se nazývá (topologický) **duál**, značíme V^* .

9.4.3 Množiny poblíž nuly

Topologii stačí zadat pouze určením (např. filtru) okolí nuly (díky spojitosti se okolí jiných bodů dostane posunutím okolí nuly). Ve vektorových prostorech nenáme příliš informací o kompaktnosti, konvexitě množin, omezenosti, ...



Proto zavádíme pojmy, které nenápadně sondují okolí nuly.

Množina M (topologického) vektorového prostoru V se nazývá

- ⇒ **pohlcující množina**, pokud pro každý prvek x existuje $\varepsilon > 0$ tak, že M obsahuje úsečku $[0, \varepsilon x]$,
- ⇒ **vyvážená množina**, pokud se svým každým prvkem x obsahuje celou úsečku $[-x, x]$,
- ⇒ **absolutně konvexní množina**, pokud je konvexní a vyvážená,
- ⇒ **barelem**, pokud je pohlcující, absolutně konvexní a uzavřená,
- ⇒ **omezená množina**, jestliže je obsažena ve vhodném násobku každého okolí nuly.

(J.v.Neumann 1935)

9.4.4 Věta (Regularita lineární topologie)

V topologickém vektorovém prostoru platí

- ⇒ Každé okolí nuly je pohlcující.
- ⇒ Existuje báze okolí nuly tvořená vyváženými množinami.
- ⇒ V každém okolí U nuly najdeme okolí V nuly tak, že $V + V \subset U$.
- ⇒ Každá lineární topologie je regulární.

(J.v.Neumann ~ 1940)

Důkaz: (iii) ze spojitosti, pro (iv) hledáme filtr okolí nuly tvořený uzavřenými množinami, podle (iii) uzávěr V leží v U . ■

9.4.5 Věta (O bipolarě)

Pro množinu $A \subset V$ vektorového prostoru V nazveme množinu

$$A^\circ = \{v^* \in V^* : |v^*(a)| \leq 1 \text{ pro } a \in A\}$$

polára množiny A . Pro množinu $B \subset V^*$ nazveme množinu

$${}^\circ B = \{v \in V : |b(v)| \leq 1 \text{ pro } b \in B\}$$

polára množiny B . Navíc množinu ${}^\circ(A^\circ)$ nazveme **bipolára** množiny A .

Bipolára množiny A je rovna slabému uzávěru absolutně konvexního obalu A .

9.5 Lokálně konvexní prostory

9.5.1 Definice (Lokálně konvexní prostor)

Topologický vektorový prostor, jehož filtr okolí nuly má bázi tvořenou konvexními množinami, se nazývá **lokálně konvexní prostor**.

9.5.2 Definice (Konvexní obal)

Průnik všech ((uzavřených resp. absolutně)) konvexních množin obsahující množinu M ve vektorovém prostoru se nazývá (**uzavřený resp. absolutně**) **konvexní obal množiny**, značíme $\text{co } M$ ($\overline{\text{co } M}$ resp. αM).

Nechť U je konvexní množina. Řekneme, že $u \in U$ je **extremální bod množiny** U , pokud $U \setminus \{u\}$ je konvexní. Množinu extrémálních bodů množiny U značíme $\text{ext } U$.

9.5.3 Věta (Barely v lokálně konvexním prostoru)

Nechť V je lokálně konvexní prostor. Pak platí

- Existuje báze filtru tvořená barely.
- Je-li prostor V 2. kategorie, pak je každý jeho barel okolím nuly.

9.5.4 Věta (Spojitost konvexních funkcionalů)

Nechť je p konvexní funkcional na topologickém vektorovém prostoru. Pak je ekvivalentní

- (i) p je spojitý.
- (ii) p je spojitý v nule.
- (iii) $\{v \in V : p(v) < 1\}$ je otevřená.
- (iv) $\{v \in V : p(v) < 1\}$ je okolím nuly.

9.5.5 Věta (Normovatelnost)

Lokálně konvexní prostor je normovatelný, právě když je oddělený a existuje v něm omezené okolí nuly.

(Kolmogorov)

9.5.6 Věta (O pseudonormách)

Konvexní funkcionál se nazývá **pseudonorma**, pokud platí $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ pro každé $x \in V$ a každé λ .

Topologie je lokálně konvexní, právě když je generovaná nějakým souborem pseudonorem.

9.5.7 Věta (Spojitost lineárních funkcionálů)

Nechť je f lineární funkcionál na topologickém vektorovém prostoru. Pak je ekvivalentní

- (i) f je spojitý.
- (ii) f je spojitý v nule.
- (iii) Jádru $\ker f$ je uzavřená množina.
- (iv) Zobrazení $x \mapsto |f(x)|$ je spojitá pseudonorma.
- (v) Existuje okolí bodu nula, na němž je $|f(x)| \leq 1$.

9.5.8 Věta (O oddělování)

- (i) Nechť je V oddělený lokálně konvexní prostor. Pak každé dva různé body jdou oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

(Hahn, S.Banach \sim 1929)

- (ii) Nechť M je uzavřená konvexní množina reálného lokálně konvexního prostoru, která obsahuje nulu. Pak jde každý bod mimo M oddělit od M spojitým lineárním funkcionálem.

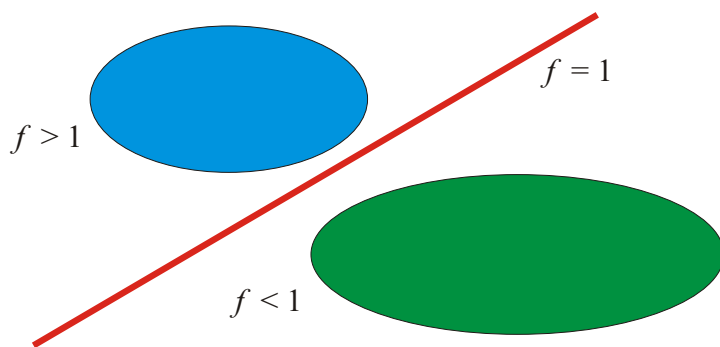
(Mazur)

- (iii) Dvě disjunktní otevřené a konvexní podmnožiny lokálně konvexního prostoru jdou oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

9.5.9 Věta (Metrizovatelnost)

Nechť je V oddělený lokálně konvexní prostor. Pak je ekvivalentní

- (i) V je metrizovatelný.
- (ii) Existuje spočetná báze okolí nuly.
- (iii) Topologie je generovaná spočetným souborem pseudonorem.



Obrázek 9.5.8: Dvě vhodné množiny jdou oddělit.

9.5.10 Slabé topologie

Nechť je V lokálně konvexní prostor. Pro každý spojitý lineární funkcionál $\varphi \in V^*$ definujeme pseudonormu p_φ na V předpisem

$$p_\varphi : v \mapsto |\varphi(v)|, v \in V.$$

Lokálně konvexní topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_\varphi\}_{\varphi \in V^*}$ nazveme **slabá topologie** na V a označíme $\sigma(V, V^*)$, někdy mluvíme o w -topologii. Tedy $v_n \xrightarrow{w} v$ pokud $\varphi(v_n) \rightarrow \varphi(v)$ pro každý spojitý lineární funkcionál $\varphi \in V^*$.



Ted' jsme se dostali k magickému středobodu zkoumání vektorových prostorů.

Pro každý prvek $v \in V$ definujeme pseudonormu p_v na V^* předpisem

$$p_v : \varphi \mapsto |\varphi(v)|, \varphi \in V^*.$$

Lokálně konvexní topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_v\}_{v \in V}$ nazveme **slabá topologie** na V^* a označíme $\sigma(V^*, V)$, někdy mluvíme o w^* -topologii.

9.5.11 Věty o slabé topologii

Platí

- Na vektorovém prostoru V uvažujeme všechny lokálně konvexní topologie, při kterých jsou všechny funkcionály z V^* spojité. Nejmenší mezi nimi je slabá topologie $\sigma(V, V^*)$. Největší taková topologie také existuje (v normovaném prostoru se rovná normové topologii). Všechny uvažované topologie mají stejné omezené množiny.

(Mackey, Arens)

- Nechť U je okolí nuly v lokálně konvexním prostoru V . Potom jeho polára U° je slabě kompaktní podmnožina V^* .

(Alaoglu, Bourbaki)

9.5.12 Silná topologie

Nechť je X vektorový prostor a M podprostor algebraického duálu $X^\#$. Pro každou $\sigma(M, X)$ omezenou množinu $D \subset M$ uvažujeme pseudonormu p_D na X definovanou

$$p_D : x \mapsto \sup\{|f(x)| : f \in D\}.$$

Topologie definovaná na X tímto systémem pseudonorem se nazývá **silná topologie** a značí $\beta(X, M)$.

Je-li X lokálně konvexní prostor, je silná topologie $\beta(X^*, X)$ ta pravá topologie, platí totiž

⇒ Je-li X normovaný prostor, splývá $\beta(X^*, X)$ s normovou topologií.

9.5.13 Věta (Princip minima)

Nechť je U kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom každá konvexní shora polospojité funkce na U nabývá maxima na množině $\text{ext } U$.

(Bauer)

9.5.14 Věta (O obalu extrémálních bodů)

Nechť je U kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom $U = \overline{\text{co ext } U}$.

(Krein, Milman)

9.5.15 Věta (O integrální reprezentaci)

Nechť je U kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru V a $u_0 \in U$. Potom existuje topologická pravděpodobnostní míra μ na uzávěru extrémálních bodů $\overline{\text{ext } U}$ taková, že

$$f(u_0) = \int_{\overline{\text{ext } U}} f(u) d\mu(u)$$

pro každý spojitý lineární funkcionál $f \in V^*$.

V tom případě nazýváme bod u_0 **těžiště** míry μ .

Je-li navíc množina U metrizable, je možné najít takovou míru pouze na množině extrémálních bodů.

Pokud taková míra existuje právě jedna, říkáme množině U (**zobecněný**) **simplex**.

(Choquet)

Jsem intuitivní typ a jsem geometr.
(G.Choquet ~ 1990)

9.6 Úplné normované lineární prostory

9.6.1 Normované lineární prostory

Nechť je V je vektorový prostor nad tělesem T . Reálná funkce $\|\cdot\|$ na V se nazývá **norma**, pokud platí

- (i) $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$ právě pro $x = 0$,
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**trojúhelníková nerovnost**)

pro každé $x, y \in V$, $\lambda \in T$. Vektorový prostor s normou se nazývá **normovaný lineární prostor**.

Na normovaném lineárním prostoru máme vždy metriku odvozenou z normy vztahem $d(x, y) = \|x - y\|$. Pokud v této metrice je prostor úplný, nazýváme jej **úplný normovaný prostor**.

(S.Banach \sim 1922)

9.6.2 Izometricky izomorfní prostory

Pokud existuje mezi normovanými lineárními prostory bijekce, která je izomorfismem a zachovává normu, říkáme těmto prostorům **izometricky izomorfní prostory**.

9.6.3 O koulích

Všimněme si, že lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory je spojitě, právě když zobrazuje omezené množiny na omezené množiny (takovému zobrazení říkáme **omezené zobrazení**). Navíc zřejmě omezené množiny jsou právě množiny s omezenou normou. Množině $\{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ říkáme **jednotková koule**.

9.6.4 Definice (Projekce)

Spojité lineární operátor $P : X \rightarrow X$ na normovaném lineárním prostoru nazýváme **projekce**, pokud $P^2 = P$.

9.6.5 Definice (Topologický součet prostorů)

Normovaný lineární prostor Z je **topologický součet** podprostorů X a Y , pokud

- (i) $X \cap Y = \emptyset$,
- (ii) $X + Y = Z$ (prostor Z obsahuje právě prvky tvaru $x + y$),
- (iii) projekce P_X a P_Y jsou spojitě.

Pak značíme $Z = X \oplus_t Y$. Pak nazýváme podprostor Y **topologický doplněk** podprostoru X , značíme $Y = X^d$.

9.6.6 Prostor lineárních zobrazení

Je-li $L : V \rightarrow W$ omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory V a W , definujeme jeho normu vztahem

$$\|L\| = \sup\{\|L(v)\|_W : \|v\|_V \leq 1\},$$

t.j. jako "supremum na jednotkové kouli". Prostor těchto zobrazení značíme $\mathcal{L}(V, W)$, kde uvažujeme prostor s uvedenou normou. Jedná se o normovaný lineární prostor. Prostor $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ tvoří nejenom normovaný lineární prostor, ale spolu s operací skládání dokonce algebru. Budeme jí říkat **algebra operátorů** na vektorovém prostoru V .

Je-li W tělesem reálných či komplexních čísel, píšeme místo $\mathcal{L}(V, W)$ jenom V^* a tento prostor nazýváme (**topologický**) **duál** prostoru V . Platí

- ⇒ Pro W úplný normovaný je $\mathcal{L}(V, W)$ úplný normovaný.
- ⇒ Topologický duál je vždy úplný normovaný prostor.
- ⇒ $\|Lv\|_W \leq \|L\| \|v\|_V$.
- ⇒ Při skládání platí odhad $\|T \circ L\| \leq \|T\| \|L\|$.
- ⇒ Lineární funkcionál na normovaném vektorovém prostoru konečné dimenze je spojitý.

9.6.7 Definice (Spektrum operátoru)

Pro operátor $L \in \mathcal{L}(V)$ se (komplexní) číslo λ nazývá **vlastní hodnota** operátoru L , pokud existuje nenulový prvek $v \in V$ tak, že $Lv = \lambda v$. Množina všech vlastních hodnot operátoru L se nazývá **bodové spektrum** operátoru L , značíme $\sigma_p(L)$.

Pro operátor $L \in \mathcal{L}(V)$ se množina všech λ , pro něž $L - \lambda I$ není prostý nebo není na, nazývá **spektrum** operátoru L , značíme $\sigma(L)$.

9.6.8 Věta (O spektru operátoru)

Nechť V je úplný normovaný prostor a $L \in \mathcal{L}(V)$. Potom spektrum $\sigma(L)$ je kompaktní podmnožina \mathbb{C} .



Všechno souvisí se vším. Když jsou totiž všude samá čísla, tak se nedivte.

9.6.9 Definice (Adjungované zobrazení)

Pro $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definujeme (úplně normovaně) **adjungované zobrazení** $T' \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ předpisem $T'w^*(v) = w^*(Tv)$ pro $w^* \in W^*$ a $v \in V$.



Jde jenom o malé algebraické kouzlo.

9.6.10 Věta (Rozšiřování spojitých lineárních forem)

Nechť l je spojitá lineární forma na podprostoru W normovaného prostoru V . Pak existuje spojitá lineární forma L rozšiřující l na celý prostor V , navíc $\|L\|_V = \|l\|_W$.

(H.Hahn, S.Banach \sim 1925)

Důkaz: Položme $p(x) = \|l\|_W \|x\|$ a použijeme algebraickou rozšiřovací větu. ■

Této slavné větě budeme říkat **spojitá rozšiřovací věta**. Má řadu aplikací a důsledků:

- ⇒ Je-li v nenulový prvek normovaného prostoru V , pak existuje spojitý lineární funkcionál L tak, že $\|L\| = 1$, $L(v) = 1$.
- ⇒ Je-li W uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru V a $v \in V \setminus W$, pak existuje spojitý lineární funkcionál L tak, že $L = 0$ na W , $L(v) = 1$.
- ⇒ Je-li U otevřená konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru V a $v \in V \setminus U$, pak existuje uzavřená nadrovina $H \subset L$ procházející v a disjunktní s U .

(Mazur)

- ⇒ Jsou-li A, B jsou neprázdné disjunktní konvexní podmnožiny (reálného) normovaného lineárního prostoru V , pak existuje spojitý lineární funkcionál L a reálné α tak, že $L > \alpha$ na A , $L < \alpha$ na B . (**Geometrická oddělovací věta**).
- ⇒ Konečně dimenzionální podprostor úplně normovaného prostoru má topologický doplněk.

9.6.11 Věta (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť V je úplně normovaný prostor, W je normovaný lineární prostor a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(V, W)$. Následující výroky jsou ekvivalentní

- (i) $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty$.
- (ii) $\sup\{\|Lv\| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty$ pro každé $v \in V$.

Navíc bodová limita posloupnosti spojitých lineárních forem je spojitá lineární forma.

(S.Banach \sim 1929, Steinhaus)

Důkaz: Množiny

$$F_n = \bigcap_{L \in \mathcal{G}} \{v \in V : \|Lv\| \leq n\}$$

pro přirozená n jsou uzavřené a jejich sjednocení je prostor V . Podle věty o kategoriích má některá z nich neprázdný vnitřek, otevřenou množinu U . Nyní omezenost všech $l \in \mathcal{G}$ na U dává omezenost jejich norem. ■

9.6.12 Věta (O otevřeném zobrazení)

Nechť V, W jsou úplné normované prostory. Spojité lineární zobrazení V na W je otevřené.

(S.Banach \sim 1929)

Důkaz: Pomocí věty o kategoriích je obraz jednotkové koule okolím nuly. ■



$V \mathbb{R}^n$ jsou lineární zobrazení známá, dimenzi buď zachovávají, nebo ruší (a pak nejsou na). Je neuvěřitelné, že se to děje i v nekonečně-dimenzionálních prostorech. Je to strašidelné. Hůůůůůůůůů !!!

9.6.13 Věta (O inverzním zobrazení)

Nechť V, W jsou úplné normované prostory. Prosté lineární zobrazení V na W má spojitou inverzi.

9.6.14 Věta (O uzavřeném grafu)

Nechť V, W jsou úplné normované prostory. Uzavřené lineární zobrazení V do W je spojitě.

9.6.15 Věta (O projekci)

Podprostor M úplného normovaného prostoru V má topologický doplněk, právě když existuje projekce V na M .

(F.J.Murray 1937)

9.6.16 Věta (O skoro-kolmici)

Nechť je W vlastní uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru V . Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje na jednotkové sféře V prvek vzdálený od Y alespoň $1 - \varepsilon$.

(F.Riesz \sim 1918)

9.6.17 Kanonické vnoření do biduálu

Je-li V normovaný lineární prostor, označíme V^{**} duál k V^* , jde tedy o spojitě lineární formy na V^* . Prostoru V^{**} budeme říkat **biduál** prostoru V . Pro každý $v \in V$ takový prvek ve V^{**} dovedeme napsat, je to $\varepsilon_v : L \rightarrow L(v)$. Zobrazení $v \mapsto \varepsilon_v$ z prostoru V do V^{**} takto sestrojené se nazývá **kanonické vnoření** V do V^{**} . Lze ukázat, že jde o izometrické izomorfní zobrazení V na $\varepsilon V \subset V^{**}$. Pokud $\varepsilon V = V^{**}$, nazývá se prostor V **reflexivní**.

Obecně se v takové situaci mluví o vnoření nebo o kopii.



A tak si můžeme dělat co chceme, třeba dvojbiduál.

9.6.18 Slabá konvergence

Řekneme, že posloupnost prvků x_n normovaného lineárního prostoru V **konverguje slabě** k prvku x , pokud pro každou spojitou lineární formu $L \in V^*$ platí $Lx_n \rightarrow Lx$ pro $n \rightarrow \infty$. Budeme to zapisovat $x_n \xrightarrow{w} x$. Mluvíme o slabé, popřípadě w -konvergenci.



POZOR: V úplném normovaném prostoru nekonečné dimenze existuje posloupnost slabě konvergující k nule, jejíž členy mají normu jedna.

Řekneme, že posloupnost prvků L_n normovaného lineárního prostoru V^* je **w^* -konvergentní** k prvku L , pokud pro každý prvek $v \in V$ platí $L_nv \rightarrow Lv$ pro $n \rightarrow \infty$. Budeme to zapisovat $L_n \xrightarrow{w^*} L$. Mluvíme o slabé*, popřípadě w^* -konvergenci.

9.6.19 Věty (O slabé konvergenci)

Platí

- ⇒ Nechť je $\{x_n\}$ slabě konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru V . Pak $\{\|x_n\|\}$ je omezená.
- ⇒ Z každé omezené posloupnosti v reflexivním úplném normovaném prostoru lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.
- ⇒ Nechť V je normovaný lineární prostor, pak jednotková koule v V^* je slabě kompaktní.

(Alaoglu)

- ⇒ Úplný normovaný prostor je reflexivní, právě když je jeho jednotková koule slabě kompaktní.

(S. Banach ~ 1929, Bourbaki)

- ⇒ Pro slabou topologii na úplném normovaném prostoru pojmy kompaktní, spočetně kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny splývají.

(Eberlein, Šmuljan)

- ⇒ Úplný normovaný prostor je reflexivní, právě když z každé jeho omezené posloupnosti jde vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

(Eberlein, Šmuljan)

- ⇒ Slabý uzávěr jednotkové sféry normovaného lineárního prostoru nekonečné dimenze je jednotková koule.

9.6.20 Striktně a uniformně konvexní prostory

Řekneme, že úplný normovaný prostor je **striktně konvexní**, pokud je každý bod jednotkové sféry S_X jejím extrémálním bodem, tedy pokud $S_X = \text{ext } S_X$.

Řekneme, že úplný normovaný prostor je **uniformně konvexní**, pokud ke každému $\varepsilon \in (0, 2]$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud x a y leží na jednotkové sféře S_X a $\|x - y\| \geq \varepsilon$, potom $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta$.

Platí

- ⇒ Každý uniformně konvexní úplný normovaný prostor je reflexivní.

9.6.21 Metrická projekce

Nechť je M podmnožina úplně normovaného prostoru X . Pro prvek $x \in X$ označme

$$\mathcal{P}_M(x) = \{m \in M : \|x - m\| = \text{dist}(x, M)\}.$$

Pokud je tato množina jednobodová pro každé $x \in X$, nazveme $x \mapsto \mathcal{P}_m$ **metrická projekce** na M .

Platí

- ⇒ Na uzavřené konvexní podmnožinu striktně konvexního reflexivního úplného normovaného prostoru existuje metrická projekce.
- ⇒ Na kompaktní konvexní podmnožinu striktně konvexního úplného normovaného prostoru existuje spojitá metrická projekce.

9.6.22 Hladké prostory

Úplný normovaný prostor X se nazývá **hladký v bodě** x jednotkové sféry S_X , pokud existuje právě jeden spojitý lineární funkcionál $\varphi \in X^*$ tak, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi(x) = 1$. Úplný normovaný prostor X se nazývá **hladký**, pokud je hladký v každém bodě jednotkové sféry S_X . Platí

- ⇒ Úplný normovaný prostor X je hladký v bodě x jednotkové sféry S_X , právě když norma $t \mapsto \|t\|$ je slabě diferencovatelná v x .

(Šmuljan)

- ⇒ Buď X úplný normovaný prostor. Je-li duál X^* striktně konvexní, pak je X hladký. Je-li duál X^* hladký, pak je X striktně konvexní.

(Klee)

9.6.23 Renormace

Pokud není norma na daném prostoru tak pěkná, jak potřebujeme, můžeme ji trochu pozměnit a získat prostor s hezčí normou, která bude ekvivalentní s původní normou.



Renormace je hezký způsob, jak si udělat prostor hezčím. Místo $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ lze vzít $(x, y) \mapsto |x| + |y|$. A už nebude hloupě kulatý, ale hezky hranatý.

Například můžeme definovat

$$\| |x| \| = \|x\|_X + \|\varphi(x)\|_X$$

pro vhodnou $\varphi \in X^*$.

Platí

- ⇒ Na každém separabilním úplném normovaném prostoru existuje ekvivalentní striktně konvexní norma.

(Clarkson)

- ⇒ Nechť X je úplný normovaný prostor. Jestliže existuje prostý lineární operátor zobrazující prostor X na striktně konvexní úplný normovaný prostor Y , Potom na X existuje striktně konvexní ekvivalentní norma.

(Klee)

9.6.24 Nabývání normy

Platí

- ⇒ Nechť je X (reálný) úplný normovaný prostor. Potom množina

$$\{ f \in X^* : f \text{ nabývá své normy} \}$$

je hustá v X^* .

(Bishop, Phelps)

- ⇒ Nechť X a Y jsou úplné normované prostory, X reflexivní. Potom množina všech $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nabývajících své normy je hustá v $\mathcal{L}(X, Y)$.

(Lindenstrass)

9.6.25 Nekonečné součty

Máme-li v normovaném lineárním prostoru množinu $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, definujeme její součet

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$$

jako prvek x , pro který ke každému danému ε najdeme konečnou podmnožinu $F_0 \subset A$ takovou, že

$$\|x - x_F\| < \varepsilon$$

pro každou konečnou množinu $F \supset F_0$, kde x_F je součet množiny $\{x_\alpha : \alpha \in F\}$.



Součet je, když zobecněná posloupnost $\{x_F : F \text{ konečná podmnožina } A\}$ konverguje.

Konvergencí samozřejmě rozumíme konvergenci podle normy. Pro běžnou řadu $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ pracujeme s obvyklou limitou posloupnosti částečných součtů.

Řekneme, že řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud konverguje řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|$.

Řekneme, že řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ je **bezpodmínečně konvergentní**, pokud konverguje řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_{\pi(n)}$ pro každou permutaci π přirozených čísel.



POZOR: V úplném normovaném prostoru nekonečné dimenze existuje bezpodmínečně konvergentní řada, která není absolutně konvergentní (Dvoretzky, Rogers).

9.7 Úplné prostory se skalárním součinem

9.7.1 Prostory se skalárním součinem

Nechť je V vektorový prostor nad tělesem T (těleso \mathbb{R} nebo \mathbb{C}). Funkce z $V \times V$, která každým dvěma prvky $x, y \in V$ přiřadí (x, y) splňující

- (i) $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$ právě pro $x = 0$,
- (ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
- (iii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
- (iv) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$

pro každé $x, y, z \in V$, $\lambda \in T$, se nazývá **skalární součin**. Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá **prostor se skalárním součinem**.

Na prostoru se skalárním součinem máme vždy normu odvozenou ze skalárního součinu vztahem $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Pokud v této normě je prostor úplný, nazýváme jej **úplný součinný prostor**.

(D.Hilbert \sim 1920)

9.7.2 Kolmost

Dva prvky úplného součinného prostoru H nazveme **kolmé** (nebo **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin nulový. Značíme $x \perp y$. Podobně zkoumáme kolmost dvou podmnožin. Je-li $M \subset H$, nazveme **ortogonální doplněk** množiny M symbolem M^\perp .

9.7.3 Věta (Existence nejbližšího prvku)

Nechť je v úplném součinném prostoru dán uzavřený podprostor M a bod x . Pak má bod x v M právě jeden nejbližší bod m (a jde o bod na "kolmici", $x - m \perp M$).

Zobrazení, které přiřazuje takový nejbližší bod, nazýváme **projekce** H na M , značíme P_M .



Podobně jde promítat na konvexní množiny úplného součinného prostoru.

9.7.4 Věta (Existence ortonormální báze)

V úplném součinném prostoru existuje maximální soustava prvků s normou rovnou 1, které jsou navzájem kolmé. Takovou soustavu nazýváme **ortonormální báze**.



Důkaz její existence spočívá na axiomu výběru.

9.7.5 Věta (O velikosti úhlopříčky)

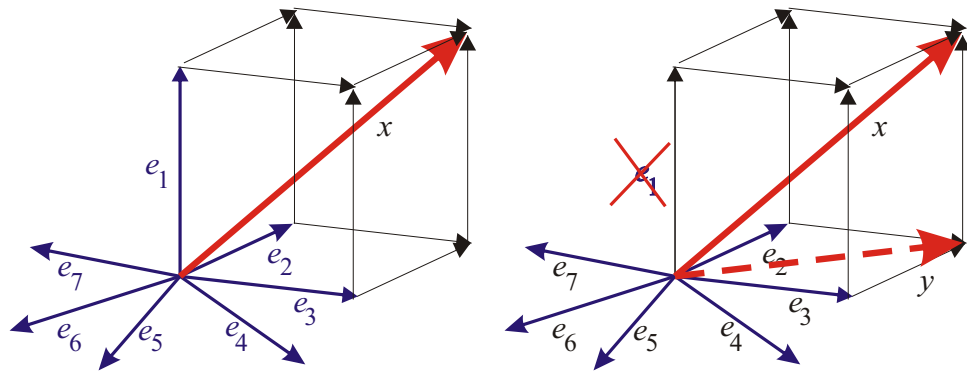
Je-li $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ortonormální soustava v úplném součinném prostoru H a $x \in H$, pak

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

(Bessel)

V té řadě jde o velikost tělesové úhlopříčky v úplném součinném prostoru. Vskutku (x, e_α) jsou velikosti "projekcí" prvku x na "souřadnice" e_α . Nerovnost platí, protože možná některé "souřadnice" v soustavě $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ chybí. Rovnost platí právě když je soustava $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ báze prostoru H .

(Pýthagorás ze Samu \sim -550, Parseval)



Obrázek 9.7.5: Pokud v soustavě $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nic nechybí, zjistíme s její pomocí skutečnou velikost prvku x . Pokud například prvek e_1 v soustavě chybí, zjistíme pouze délku prvku y , který je průmětem prvku x do prostoru s takto ochuzenou bází.

9.7.6 Věta (O spočetné ortonormální bázi)

Úplný součinný prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

9.7.7 Věta (O izometrickém izomorfismu s $l^2(A)$)

Úplný součinný prostor s ortonormální bází je izometricky izomorfní prostoru $l^2(A)$, což je úplný součinný prostor funkcí f na A nenulových pouze na spočetné množině a pro něž

$$\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^2 < +\infty ,$$

uvažovaný se skalárním součinem

$$(f, g) = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha)g(\alpha) .$$

(Riesz, Fischer)

Lidi je třeba učit, jak mají myslet, a ne to, co si mají myslet.

(G.Ch.Lichtenberg \sim 1770)

9.7.8 Věta (Reprezentace spojitě lineární formy)

Nechť L je spojitá lineární forma na úplném součinném prostoru H . Pak existuje právě jeden prvek $a \in H$ tak, že $L(x) = (x, a)$ pro každé $x \in H$. Zobrazení $L \leftrightarrow a$ zachovává normu a identifikuje H s jeho duálem H^* (jsou izometricky izomorfní).

(Fréchet, Riesz)



Úplný součinný prostor je tedy reflexivní.

9.7.9 Spočetný součin reálné osy

Úplný součinný prostor je homeomorfní spočetnému součinu reálné osy.

(R.D.Anderson 1966)

9.8 Prostory s mírou

9.8.1 Prostor měr na kompaktu

Nechť S je σ -algebra podmnožin kompaktu K . Nezápornou množinovou funkcí μ definovanou na S nazýváme (**topologická**) **míra**, pokud platí

- (i) $\mu(K) < +\infty$,
- (ii) $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U, U \text{ otevřená}\}$
pro každou topologickou množinu $B \subset K$,
- (iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(T) : T \subset U, T \text{ je kompaktní}\}$
pro každou otevřenou množinu $U \subset K$,
- (iv) μ je σ -aditivní.

Rozdíly (topologických) měr nazýváme (**znaménková**) (**topologická**) **míra**. Pro znaménkovou (topologickou) míru μ definujeme dvě (topologické) míry μ^+ a μ^- pro topologickou $M \in S$ předpisem

$$\mu^+(M) = \sup\{\mu(B) : B \subset M, B \text{ topologická}\}$$

$$\mu^-(M) = \sup\{-\mu(B) : B \subset M, B \text{ topologická}\}$$

a položíme $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Pak je $|\mu|$ nezáporná topologická míra nazývaná **totální variace míry** μ . Dále (**komplexní**) (**topologická**) **míra** je komplexní množinová funkce na S , jejíž reálná i imaginární část jsou (znaménkové) topologické míry.

Trojici (K, S, μ) nazýváme **prostor s mírou**. Prostor všech topologických měr na kompaktu K značíme $\mathcal{M}(K)$. S normou $\|\mu\| = |\mu|$ tvoří úplný normovaný prostor.

(Radon)

9.8.2 Prostor měřitelných funkcí

Nechť je (K, S, μ) prostor s mírou. Symbolem \mathcal{M} značíme prostor všech (tříd) měřitelných funkcí s metrikou

$$\rho(f, g) = \int_K \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu ,$$

jde o úplný metrický lineární prostor. Konvergence v tomto prostoru se nazývá **konvergence v míře**.

Kapitola 10

Základní prostory



ed' nadešel čas k tomu, abychom si zkusili obecné vlastnosti obecných prostorů na nejznámějších situacích.



Tak si prohlédneme rovinu, prostor a kdoví co ještě.

10.1 Reálná osa

10.1.1 Základní vlastnosti

Základní vlastnosti reálné osy jako prostoru:

- ⇒ separabilní metrický a topologický prostor
- ⇒ úplně uspořádaná množina
- ⇒ diferencovatelná topologická varieta dimenze 1
- ⇒ lokálně kompaktní topologický prostor
- ⇒ úplný normovaný prostor
- ⇒ úplný součinnový prostor
- ⇒ úplné reálné těleso
- ⇒ hutný prostor (průnik spočetně mnoha otevřených hustých podmnožin je hustý)
- ⇒ souvislý topologický prostor
- ⇒ bez libovolného bodu je nesouvislý

10.1.2 Pórovitost

Typická kompaktní množina $K \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ je **oboustranně silně pórovitá množina**, to znamená, že pro každé $x \in K$ platí

$$\limsup_{h \rightarrow \pm 0} \frac{l(x, h)}{h} = 1,$$

kde $l(x, h)$ je délka nejdelšího intervalu v $[x, x \pm h] \setminus K$.

(L.Larson 1987)

10.2 Rovina

10.2.1 Věta (O roztínání roviny)

Kružnice (nebo její topologická kopie) roztíná rovinu na dvě otevřené disjunktní množiny, jejichž společnou hranicí je daná kružnice.

(C.Jordan ~ 1870)



To se lehce řekne, ale důkaz topologické verze je těžkopádný.

10.2.2 Věta (O téčkách)

V rovině jde umístit nejvýše spočetně mnoho disjunktních topologických kopií písmena T .

10.3 Prostor

10.3.1 \mathbb{R}^n

Prostor \mathbb{R}^n (popřípadě \mathbb{C}^n) je tvořen všemi n -ticemi reálných (komplexních) čísel s normou přiřazující n -tici $x = (x_1, \dots, x_n)$ její normu předpisem

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

(Eukleidés z Alexandrie ~ -330)

Navíc definujeme na prostoru \mathbb{R}^n skalární součin

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Množina n -tic s normou

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

se označuje l_n^1 .

Množina n -tic s normou

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

se označuje l_n^∞ .

10.3.2 Hranice mezi prostorem a časoprostorem

Uvažujme čtverec, ve kterém identifikujeme (prohlásíme za totožné) body dvou protilehlých stran.



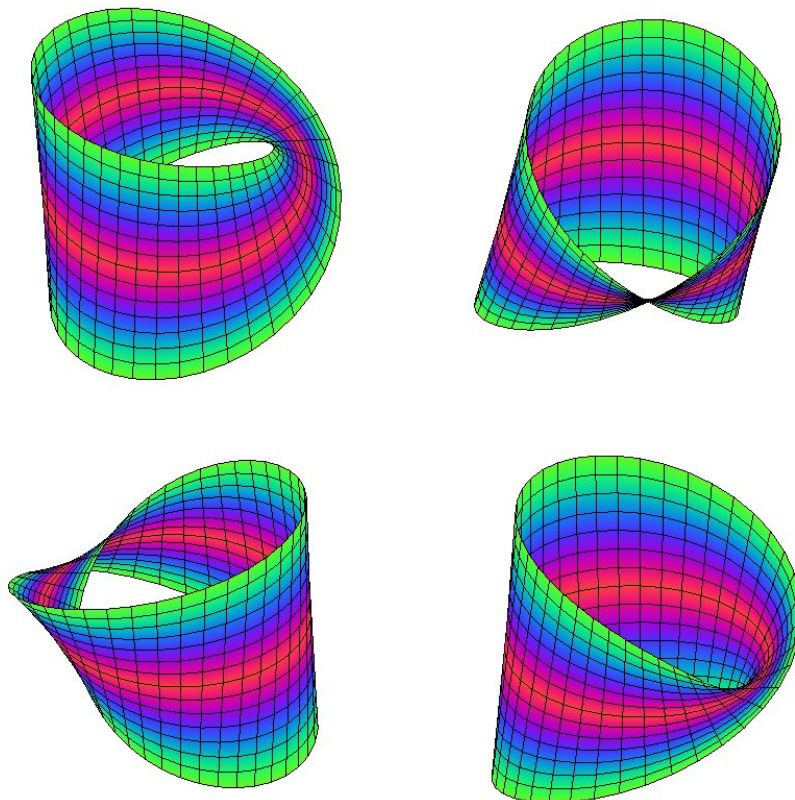
Získáme povrch válečku, prstýnek.

Pokud přitom budou protilehlé strany identifikovány "v protisměru", dostaneme **překřížený pásek**

(A.F.Möbius ~ 1850)



To je na tom pásku nepříjemnost, nicméně, má za to jenom jednu stranu. Je prostě neorientovatelný, nejde obléct špatně.



Obrázek 10.3.2: To je ale pásek.

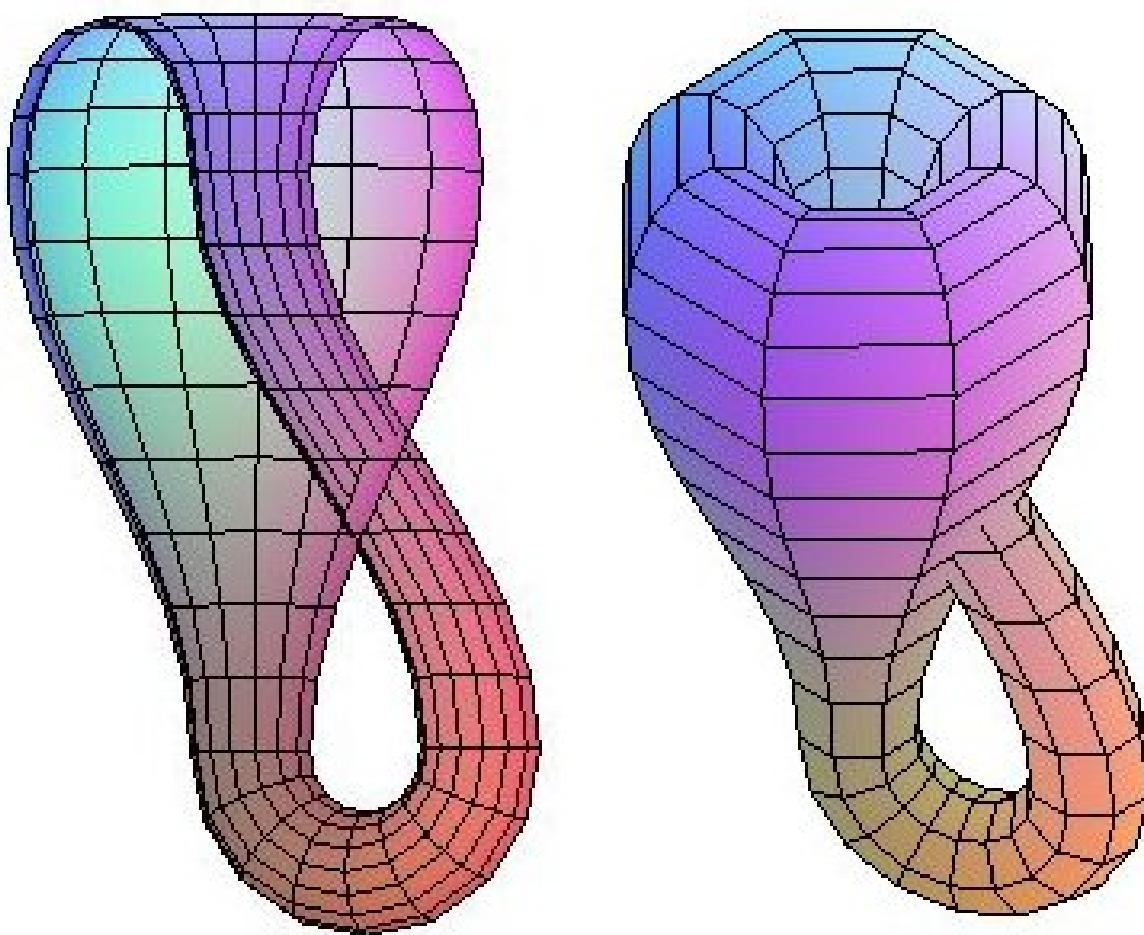
Pokud budeme ve čtverci identifikovat body protilehlých stran (všech čtyř, najednou či postupně, ale "ve stejném směru"), dostaneme obruč (anuloid).



Je to prostě preclík. Nicméně jeho život není ohrožen obyvateli jinak dimenzionálních světů.

Pokud právě jedna z identifikací (například druhá) bude udělána "proti směru", nedostaneme obruč, ale zvláštní objekt, kterému se říká **kouzelná láhev**.

(F.Klein ~ 1870)



Obrázek 10.3.2: To je kouzelná láhev a řez kouzelnou láhví.



Nemá to vnitřek, prostě nic moc. V prostoru \mathbb{R}^3 ji nenajdete. Musíte si ji představit v \mathbb{R}^4 . To znamená, že se zaměříme očima jenom na kousek té láhve v \mathbb{R}^3 a jak se budeme pohybovat s očima po láhvi, tak nám utíká čtvrtý rozmět (čas), takže v okamžiku, kdy by bylo třeba překřížit již prohlédnutý kus láhve, tak ona tam již v nynějším čase v našem časoprostoru prostě není. Ještě je třeba trochu začarovat s časem, abychom se vrátili do minulosti v okamžiku, kdy se s očima dostaneme zase na začátek láhve.

Pokud obě dvě identifikace budou udělány "proti směru", nedostaneme láhev, ale zvláštní objekt, kterému se říká **projektivní rovina**.



Je to zase jenom v \mathbb{R}^4 . Pro opravdové sílence nabízím několik "domestikací" této potvory v \mathbb{R}^3 . Jde přitom o ten samý objekt v \mathbb{R}^4 .

10.4 Prostory posloupností

10.4.1 l^∞

Prostor l^∞ je tvořen všemi omezenými posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných (komplexních) čísel s normou přiřazující posloupnosti $\{x_n\}$ její normu předpisem

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| .$$

Této normě se říká **supremová norma**.

10.4.2 c a c_0

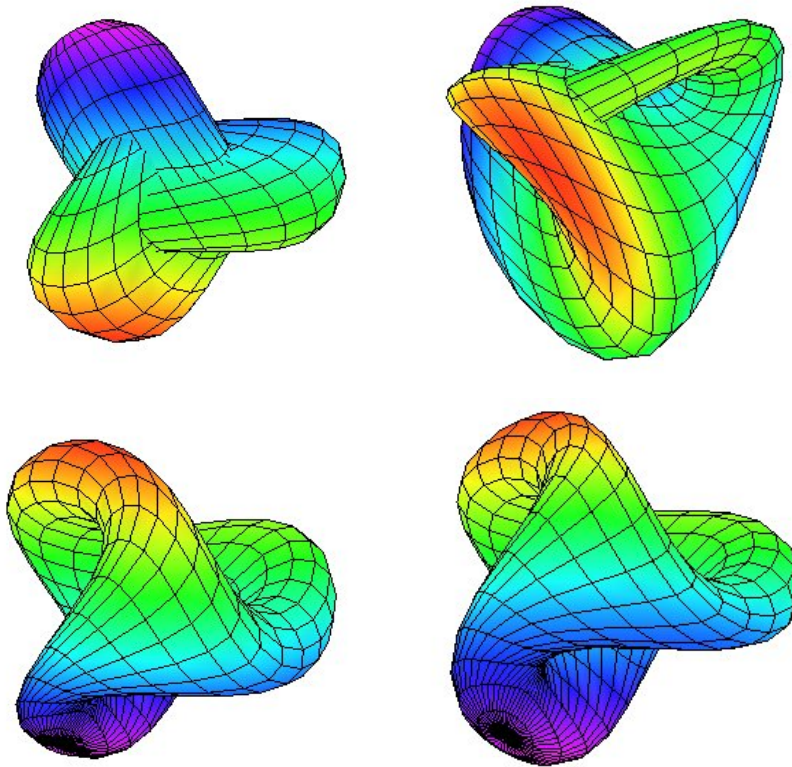
Prostor c (resp. c_0) je tvořen všemi konvergentními (resp. k nule konvergentními) posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných či komplexních čísel s normou přiřazující posloupnosti $\{x_n\}$ její normu předpisem

$$\|x\| = \sup_n |x_n| .$$

Podprostor c_{00} prostoru c_0 je tvořen posloupnostmi od určitého indexu nulovými.

Platí

⇒ Prostory c a c_0 jsou úplné normované prostory.



Obrázek 10.3.2: Projektivní rovina zobrazená jako trojručka.

- ⇒ Duál k c_0 je izometricky – izomorfní l^1 .
- ⇒ Prostor c_0 není reflexivní a neplatí v něm základní věta analýzy.
- ⇒ Prostor c_0 nemá topologický doplněk v l^∞ .

(R.S.Philips 1940)

10.4.3 Prostor všech posloupností

Prostor s je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných (komplexních) čísel, norma je definována

$$\|x\| = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|}.$$

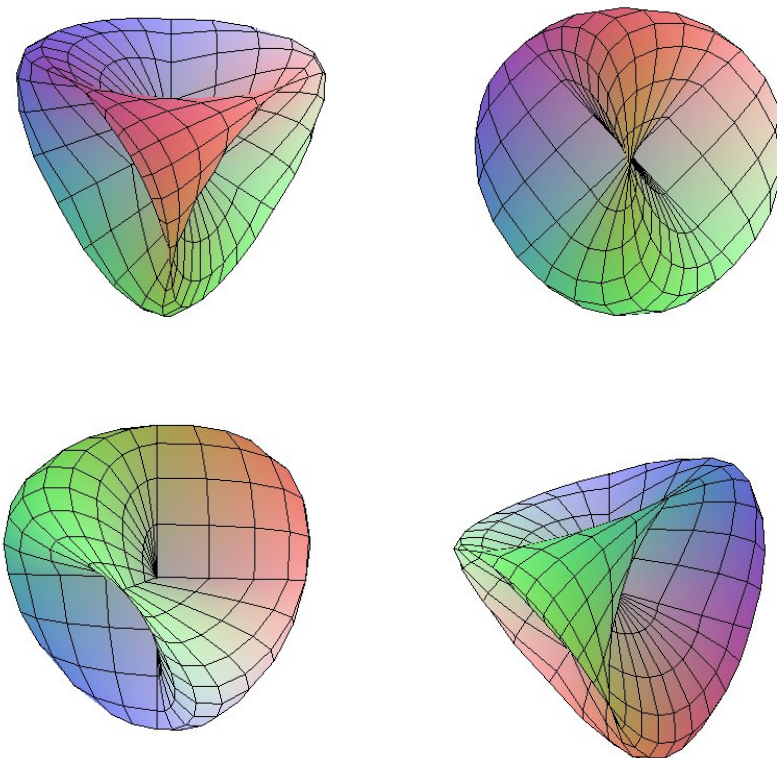
Platí

- ⇒ Duál k s je c_{00} .

10.4.4 l^p pro $1 \leq p < \infty$

Prostor l^p je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných (komplexních) čísel pro něž je norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$



Obrázek 10.3.2: Projektivní rovina zobrazená jako čtyřlístek.

konečná. Této normě se říká **elpéčková norma**.

Podprostor l^1_{00} prostoru l^1 je tvořen posloupnostmi od určitého indexu nulovými.

Platí

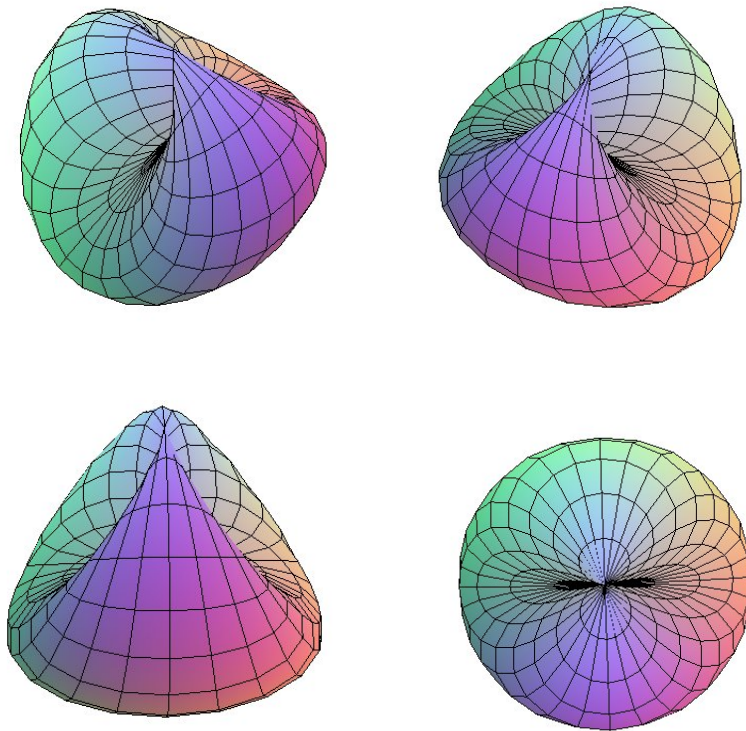
- ⇒ Prostor l^p pro $1 \leq p < \infty$ je úplný normovaný.
- ⇒ Prostor l^2 je úplný součinný se skalárním součinem

$$(x, y) = \sum_n x_n \overline{y_n} .$$

- ⇒ Duál k l^1 je l^∞ .
- ⇒ Duál k l^p je $l^{p/(p-1)}$ pro $p \in (1, \infty)$, speciálně jde o reflexivní prostory, slabá konvergence je konvergence "po složkách".
- ⇒ Duál k l^∞ je prostor omezených konečně aditivních měr.
- ⇒ Prostor $l^1(\mathbb{Z})$ posloupností $\{x_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ s násobením

$$\{x_n\} * \{y_n\} = \left\{ \sum_n x_{m-n} y_n \right\} .$$

je úplnou normovanou algebrou s jednotkou. Její spektrum je homeomorfní s jednotkovou kružnicí.



Obrázek 10.3.2: Projektivní rovina zobrazená jako košík.

10.4.5 Prostor posloupností konečné variace

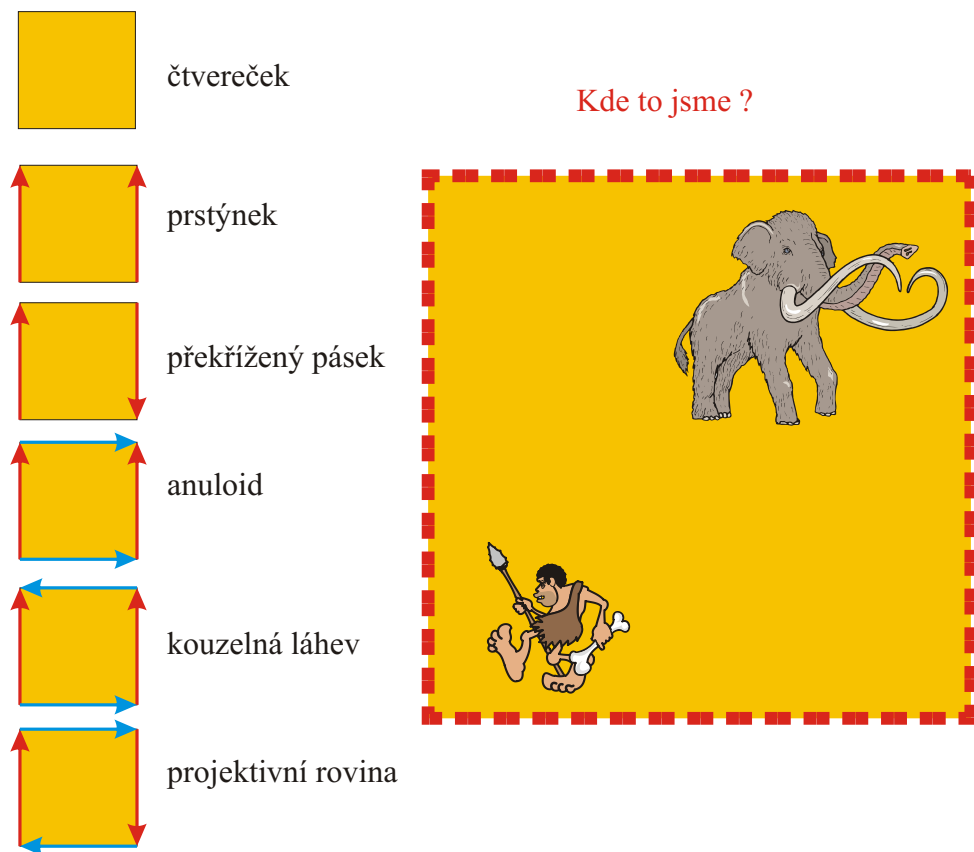
Prostor posloupností konečné variace l^{bv} je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ reálných čísel pro něž je norma

$$\|x\|_{bv} = |x_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1} - x_j|$$

konečná. Této normě se říká **norma konečné variace**.

Platí

→ Prostor l^{bv} je izometricky izomorfní l^1 .



Obrázek 10.3.2: Když žijeme v placatém světě, je netriviální problém, kudy jít lovit mamuta (nebo před ním utíkat).

Kapitola 11

Základní prostory funkcí



ato kapitola přináší přehled o základních prostorech funkcí. Zde jsou uvedeny prostory krásné a užitečné.



Uvažme, že každá $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ rovnice má svůj prostor funkcí, ve kterém hledáme řešení.

11.1 Prostory spojitých funkcí

11.1.1 Prostory spojitých funkcí

Prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ je tvořen všemi spojitými funkcemi na intervalu $[0, 1]$ s normou

$$\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0, 1]\},$$

kterou budeme nazývat **max norma**.

Podobně definujeme $\mathcal{C}(K)$ pro kompaktní topologický prostor K .

Platí

- ⇒ Uzavřená jednotková koule prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ má pouze dva extrémální body (konstantní funkce -1 a 1).
- ⇒ Duál k $\mathcal{C}([0, 1])$ lze stotožnit s prostorem zprava spojitých funkcí konečné variace nulujících se v bodě 0 .
- ⇒ $\mathcal{C}([0, 1])$ je nereflexivní úplný normovaný prostor.
- ⇒ V $\mathcal{C}([0, 1])$ neplatí základní věta analýzy.
- ⇒ Prostor $\mathcal{C}(K)$ s operací násobení tvoří komutativní úplnou normovanou algebru s jednotkou, spektrum této algebry je homeomorfní s prostorem K .
- ⇒ Duál k $\mathcal{C}(K)$ lze stotožnit s prostorem topologických měr na K .

Na prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ lze zavést i normu

$$\|f\|_i = \int_0^1 |f(t)| dt ,$$

říkáme jí **integrální norma**.

11.1.2 O prostoru spojitých funkcí

Nechť \mathcal{A} je podprostor prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}(K)$ na kompaktu K . Nechť platí

- (i) \mathcal{A} tvoří buď algebru (obsahuje součiny svých prvků) nebo svaz (obsahuje minimum a maximum pro každé své dva prvky),
- (ii) \mathcal{A} odděluje body K , t.j. ke každé dvojici $x, y \in K$, $x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{A}$ tak, že $f(x) \neq f(y)$,
- (iii) \mathcal{A} obsahuje konstanty,
- (iv) je-li $f \in \mathcal{A}$, je komplexně sdružená funkce $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Pak \mathcal{A} je hustý v $\mathcal{C}(K)$.

(Stone, K.Weierstrass \sim 1869)

11.1.3 Prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ s konvergencí v míře

Na prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ definujeme metriku

$$\rho(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0 : |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon \text{ pro } t \in [0, 1] \setminus B, \text{ kde } \lambda B = \varepsilon\} ,$$

kde λ je (poctivá) míra na $[0, 1]$. Konvergenci v tomto prostoru nazýváme **konvergence v míře**.

Platí

- ⇒ Prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ s konvergencí v míře je metrický lineární prostor s triviálním duálem.

11.1.4 Prostor $\mathcal{C}^k([0, 1])$

Vektorový prostor $\mathcal{C}^k([0, 1])$ spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$, které jsou spojitě derivovatelné až do řádu k uvažujeme s normou

$$\|f\| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)| + \cdots + \max_{t \in [0, 1]} |f^{(k)}(t)| .$$

Platí

- ⇒ $\mathcal{C}^k([0, 1])$ je úplný normovaný prostor.
- ⇒ $\mathcal{C}^1([0, 1])$ s operací násobení je úplná normovaná algebra.

11.1.5 Absolutně spojité funkce

Do prostoru $AC([0, \pi/2])$ všech absolutně spojitých funkcí na $[0, \pi/2]$ zavedeme normu

$$\|f\| = \left(\int_0^{\pi/2} (x|f|^2 + 2|f'(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Získáme úplný součinnový prostor.

11.2 Polospojité funkce

11.2.1 Definice (Polospojité funkce)

Nechť f je reálná funkce na topologickém prostoru T . Řekneme, že f je **polospojité zdola**, pokud $\{t \in T : f(t) > \alpha\}$ je otevřená pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Podobně shora.

11.3 Aproximativně spojité funkce

11.3.1 Definice (Bod hustoty)

Nechť λ označuje (pocitivou) míru na \mathbb{R} a $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina. Řekneme, že bod x je **bod hustoty** množiny M , pokud

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(M \cap [x - r, x + r])}{\lambda([x - r, x + r])} = 1.$$

11.3.2 Věta (O bodech hustoty)

Skoro každý bod měřitelné množiny M je bodem hustoty množiny M .

(H.Lebesgue 1904)

11.3.3 Definice (Hustotní topologie)

Řekneme, že měřitelná množina je **hustotně otevřená množina**, pokud je každý bod M jejím bodem hustoty. Systém hustotně otevřených množin tvoří topologii na reálné ose. Tuto topologii budeme nazývat **hustotní topologie** a funkci spojitou v této topologii budeme nazývat **hustotně spojitá funkce**, někdy též **aproximativně spojitá funkce**.

11.3.4 Věta (O hustotní spojitosti)

Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná, právě když je hustotně spojitá skoro všude.

(A.Denjoy 1915)



Hustotně spojitá funkce má v daném bodě x množinu U_x , která má bod x za bod hustoty, a funkce má limitu vzhledem k množině U_x . Funkce je tedy spojitá jako zobrazení z (\mathbb{R}, d) do (\mathbb{R}, ρ) , kde ρ je obyčejná topologie na \mathbb{R} . Taky to mohla být jiná kombinace!

11.4 Mocninné řady

11.4.1 Definice (Mocninné řady)

Mocninná řada bude pro nás znamenat řada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n .$$

Řada konverguje pro $z = 0$. Pokud konverguje pro w , konverguje absolutně i pro z splňující $|z| < |w|$. Konvergence je pro každé $\varepsilon > 0$ stejnoměrná na množině

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < |w| - \varepsilon\} .$$

To vede přirozeně ke zkoumání suprema takových absolutních hodnot. Označíme supremum těchto čísel **poloměr konvergence**.

11.4.2 Věta (Derivace a integrace mocninných řad)

Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

s poloměrem konvergence R lze derivovat a integrovat člen po členu na množině

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} .$$

11.4.3 Věta (O radiální limitě)

Pokud řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

konverguje pro $z = R$, je spojitá na intervalu $[0, R]$.

(N.H.Abel \sim 1824)

11.5 Prostory integrovatelných funkcí

11.5.1 L^∞

Nechť (X, S, μ) je prostor s mírou. Označíme \mathcal{L}^∞ množinu všech μ -měřitelných funkcí na X , pro které existuje konstanta M tak, že $|f(x)| \leq M$ pro μ -skoro všechna $x \in X$. Nejmenší taková konstanta definuje normu $\|f\|_\infty$ funkce f . Prostor L^∞ tvoří třídy ekvivalence množiny \mathcal{L}^∞ podle ekvivalence $f \sim g$ pokud $f = g$ μ -skoro všude.

Platí

- ⇒ Duál k L^∞ je prostor všech omezených konečně aditivních měr na S .
- ⇒ Prostor L^∞ je duálem k L^1 .

11.5.2 L^p

Nechť (X, S, μ) je prostor s mírou. Označíme \mathcal{L}^p množinu všech μ -měřitelných funkcí na X , pro které je konečná norma

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Prostor L^p tvoří třídy ekvivalence množiny \mathcal{L}^p podle ekvivalence $f \sim g$ pokud $f = g$ μ -skoro všude.

Platí

- ⇒ Prostor L^p pro $1 \leq p < \infty$ je úplný normovaný.
- ⇒ Prostor L^2 je úplný součinný se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_S f \bar{g} d\mu.$$

- ⇒ Trigonometrický systém tvořený systémem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}$$

je ortonormální báze v L^2 .

- ⇒ Duál k L^1 je L^∞ .
- ⇒ Duál k L^p je $L^{p/(p-1)}$ pro $p \in (1, \infty)$, speciálně jde o uniformně konvexní reflexivní prostory.
- ⇒ Prostor L^2 je 1. kategorie v L^1 .
- ⇒ Prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$ s násobením

$$(f * g) : x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

je úplnou normovanou algebrou bez jednotky. V $L^1([0, 1])$ jde o známou konvoluci

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt.$$

- ⇒ V prostoru $L^1([0, 1])$ neplatí základní věta analýzy.
- ⇒ Na úplném normovaném prostoru $L^p([0, +\infty))$, kde $p \in [1, +\infty)$, uvažujeme silně spojitou semigrupu operátorů T_t

$$T_t f(s) = f(s + t) \quad \text{pro } t \geq 0, s \geq 0 .$$

Její generátor je operátor derivování $f \mapsto f'$ s definičním oborem $\{f \in L^p([0, +\infty))\}$: f je absolutně spojitá na $[0, n]$ pro $n \in \mathbb{N}$.

11.6 Prostory integrovatelných distribucí



Integrovatelné distribuce? Proč ne. Tím se jenom zvýší šance, že najdu pro tu distribuci pěkného reprezentanta, například hladkou funkci. Kdo věří na spojitý svět, který není rozbit na "nic" a "hmotu", ten pomocí integrovatelných distribucí hledá funkce.

11.6.1 Definice prostoru

Nechť je Ω otevřená podmnožina \mathbb{R}^n . Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ označme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω a $\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ prostor všech lokálně integrovatelných funkcí na Ω .

Jestliže pro $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ existuje $g^i \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ tak, že

$$\int_{\Omega} g^i \varphi = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

pro každou "testovací" funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, nazveme funkci g^i (parciální) **distributivní derivace** (prvního řádu) funkce f podle i -té proměnné a značíme tuto derivaci g^i symbolem $D^i f$.

Prostor funkcí z $\mathcal{L}^p(\Omega)$, jejichž všechny parciální distributivní derivace prvního řádu leží v $\mathcal{L}^p(\Omega)$, značíme $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. Prostor $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ budeme nazývat **prostor integrovatelných distribucí**.

Příslušná norma se definuje předpisem

$$\|f\|_{1,p} = \left(\int_{\omega} (|f|^p + |\nabla f|^p) d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

a

$$\|f\|_{1,\infty} = \max(\|f\|_{\infty}, \|\nabla f\|_{\infty}) ,$$

kde $\nabla f = (D^1 f, \dots, D^n f)$.

Opět se musí pracovat se třídami ekvivalence rovnosti skoro všude. Podobně se definují prostory $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, přičemž se požaduje, aby parciální distributivní derivace až do řádu k včetně patřily do $\mathcal{L}^k(\Omega)$. Příslušným způsobem se upraví též definice normy.

Prostor $C^k(\Omega)$ s normou

$$|u|_{k,p} = \sum_{|\beta| \leq k} |D^\beta u|^p$$

není úplný. Jeho zúplněním získáme prostor $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$. Jeho prvky jsou funkce z $L^p(\Omega)$, jejichž distributivní derivace až do řádu k jsou opět prvky $L^p(\Omega)$.

Jedná se o ty distribuce, které jsou reprezentovány funkcí z $L^p(\Omega)$, a to až do k -tých distributivních derivací. Čili jde o specifickým způsobem integrovatelné distribuce. Prostor $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ budeme nazývat **prostor integrovatelných distribucí**.

(Sobolev)

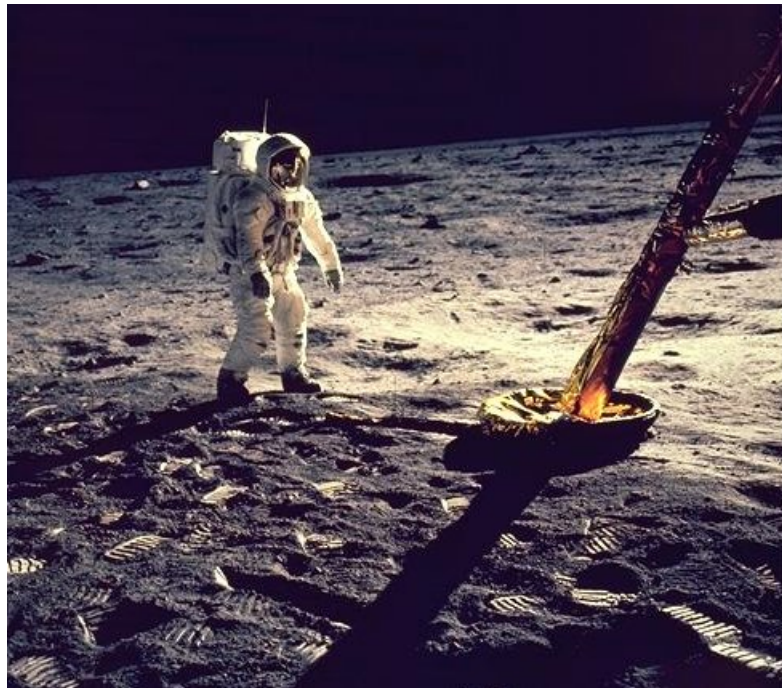
Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ vznikne z $C_0^k(\Omega)$ stejným způsobem jako $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ vznikne z $C^k(\Omega)$.

11.6.2 Stopa(ř) na hranici

Nechť je hranice oblasti Ω pěkná, například sublineární. Existuje právě jeden spojitý lineární operátor T který každé funkci $W^{1,p}(\Omega)$ přiřazuje funkci $Tu \in L^p(\Omega)$, který funkcím $C^\infty(\Omega)$ přiřazuje její hodnotu na hranici. Tedy

$$Tu = u \upharpoonright_{\partial\Omega} .$$

Funkci Tu budeme nazývat **stopa funkce u** .



Obrázek 11.6.2: Stopa je někdy to jediné, co o funkci víme. Stopy mohou být zajímavé.



Takhle často my o neznámé funkci nevíme skoro nic.

11.6.3 Věty o vnoření

Platí

- ⇒ Prostory $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ jsou úplné normované prostory pro $p \in [1, \infty]$.
- ⇒ Funkce ve $\mathbf{W}^{k,p}(a, b)$ mají absolutně spojitěho reprezentanta na intervalu $[a, b]$.
- ⇒ Funkce ve $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ mají spojitěho reprezentanta pokud $p > n$.

Nechť má oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sublineární hranici, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Pak

- ⇒ Je-li $kp < n$ a $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$, je $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.
- ⇒ Je-li $kp = n$ a $r \geq 1$, je $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$.
- ⇒ Je-li $kp > n$, je $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.

11.6.4 Duál k prostoru integrovatelných distribucí

Nechť $1 \leq p < \infty$. Každý spojitý lineární funkcionál L na prostoru $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ lze psát ve tvaru

$$L(f) = \int_{\Omega} g_0 f + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} g_i \partial_i f$$

pro funkce g_0, g_1, \dots, g_n v prostoru L^q , $1/p + 1/q = 1$.

Spojíme-li pojmy a věci, které se zřídka setkají, nebo díváme-li se na obyčejné věci s nezvyklou pozorností a pozorovatelským nadáním, může nás to přivést na myšlenku.

(G.Ch.Lichtenberg ~ 1770)

Kapitola 12

Základní funkcionály



ato kapitola ukáže nejběžnější způsoby, jak z funkce dělat jinou funkci.



Integrovaní a derivování jsou profláknuté, alespoň že jsou tu ty distribuce.

12.1 Integrál jako lineární funkcionál

12.1.1 Jak na to

Viděli jsme, že základní vlastnosti plochy pod grafem funkce jsou jednoduché. Sestrojit funkcionál, který spojitě funkci přiřadí její integrál podle dělení, je snadné. Nyní můžeme tento funkcionál rozšířit na větší prostor.



Zpravidla dostaneme známé integrování na známých prostorech, nicméně je to pěkný postup. Není však zcela průhledný jako integrování podle míry.

12.2 Distribuce

12.2.1 Základní prostor

Nechť je Ω otevřená podmnožina \mathbb{R}^n . Zvolme posloupnost kompaktních podmnožin $\{K_m\}$ množiny Ω splňující

$$K_0 = \emptyset, \quad K_m \subset \int K_{m+1}, \quad \cup_m K_m = \Omega.$$

Takovouto posloupnost nazveme **vyčerpání množiny Ω** .

Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ označme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω .

Pokud $\{K_m\}$ je vyčerpáním Ω a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ je posloupnost celých nezáporných čísel, označme p_α pseudonormu na $\mathcal{D}(\Omega)$ definovanou pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ předpisem

$$p_\alpha(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sup\{|D^j \varphi(x)| : |j| \leq \alpha_m, x \in K_m \setminus K_{m-1}\}.$$

Zde D^j je diferenciální operátor derivování podle multiindexu $j = (j_1, \dots, j_n)$ s výškou $|j| = j_1 + \dots + j_n$

$$\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

Pseudonorma p_α hlídá chování derivací funkce φ až do výšky α_n na "proužku" $K_n \setminus K_{n-1}$. Pro danou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ jde vždy o konečnou sumu.

Platí

- ⇒ Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je reflexivní lokálně konvexní prostor. Jeho omezené uzavřené podmnožiny jsou kompaktní.

Spojitě lineární formy na základním prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ se nazývají **distribuce**.

... pokrok poslední stovky let umožnil v abstraktním a sterilizovaném světě elegantně vykládat základní pojmy a věty **ab ovo**, a to způsobem rychlým a přesným, zbaveným odkazu na zkušenost a geometrickou intuici.
(G.Choquet ~ 1990)

Prostor všech distribucí $\mathcal{D}^*(\Omega)$ uvažujeme se silnou topologií $\beta = \beta(\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$,

Distribuce jsou jako děj, který se odehrává, ale my vidíme pouze jeho projevy. Distribuce jsou jako černá skříňka, která danému vstupu (testovací funkci) přiřadí výstup (hodnotu). Je to jako když vážíme nějaký kus prostoru a dostaneme nulu, když tam není žádný atom (bodový náboj) nebo jedničku, když tam atom je.



12.2.2 Regulární a singulární distribuce

Prostor všech distribucí $\mathcal{D}^*(\Omega)$ obsahuje kopii základního prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ při vnoření přiřazujícím funkci $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ distribuci

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} f \varphi .$$

Tato kopie je hustá v $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Stejně můžeme v prostoru distribucí najít obraz každé lokálně integrovatelné funkce. Distribuce takto vzniklé budeme nazývat **regulární distribuce**, ostatní pak **singulární distribuce**.

... příliš formalizovaný výklad určité teorie neposkytuje žádnou představu o zdrojích duševní činnosti matematika, jako jsou pozorování, matematizace, řešení problému v rámci vytvořeného modelu, návrat k původnímu nápadu, zobecnění a aplikace.

(G.Choquet ~ 1990)

Příkladem singulární distribuce je δ -**funkce** definovaná předpisem $\varphi \mapsto \varphi(0)$. Říkáme jí **bodový náboj**.

(P.A.M.Dirac ~ 1933)

Všechno by se mělo udělat tak jednoduše, jak je možné, ale ne jednodušeji.

(A.Einstein ~ 1950)

12.2.3 Věta (Kladné distribuce jsou míry)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Nechť $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Řekneme, že T je **nezáporná distribuce**, pokud $T(\varphi) \geq 0$ pro každou nezápornou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Distribuce T je nezáporná právě tehdy, když existuje (právě jedna) nezáporná (regulární topologická) topologická míra μ konečná na kompaktních podmnožinách Ω taková, že

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) d\mu$$

pro každou testovací funkci φ .

12.2.4 Jiný základní prostor a jiná definice

Podobně lze pracovat se základním prostorem tvořeným hladkými funkcemi na \mathbb{R}^n , s komplexními funkcemi, je možné pracovat pouze s funkcemi definovanými na kružnici a podobně.

Jestliže pro funkci f existuje $R > 0$ takové, že $f(x) = 0$ pokud $|x| > R$, budeme této funkci říkat **finitní funkce**. Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, které jsou finitní a mají všechny parciální derivace všech řádů, budeme nazývat **testovací funkce**. Prostor všech testovacích funkcí označíme $D(\mathbb{R}^n)$.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}$ testovacích funkcí má v prostoru $D(\mathbb{R}^n)$ limitu φ , když existuje koule $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$, mimo níž jsou všechny φ_k nulové, a pokud všechny parciální derivace funkcí φ_k konvergují stejnoměrně k parciálním derivacím funkce φ .

Každý spojitý lineární funkcionál na $D(\mathbb{R}^n)$ se nazývá **distribuce**. Prostor všech distribucí budeme značit $D'(\mathbb{R}^n)$, nebo jen D' . Pro distribuci T a testovací funkci φ budeme funkční hodnotu $T(\varphi)$ značit (T, φ) . Například pro distribuci bodového náboje píšeme $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

Dalším příkladem distribuce je

$$(T_{\frac{1}{x}}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

Kapitola 13

Operátorový počet



ato kapitola se zabývá diferenciálním a integrálním počtem pro operátory mezi obecnými prostory.



To, že jdou věci jako osová symetrie derivovat a integrovat, to je teda silný kafe ...

13.1 Diferenciální počet

13.1.1 Definice (Slabá a silná derivace)

Nechť X a Y jsou úplné normované prostory a f je zobrazení definované na otevřené množině $G \subset X$ s hodnotami v Y . Je-li $x \in G$, zkoumáme pro $h \in X$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Pokud tato limita existuje, říkáme jí **derivace ve směru** h a značíme $D_h f(x)$.

V případě, že f má derivace v každém směru $h \in X$ a $h \mapsto D_h f(x)$ je spojité lineární zobrazení z X do Y , nazveme toto zobrazení **slabá derivace** f v bodě x , značíme $df(x)$.

Existuje-li spojité lineární zobrazení $L : X \rightarrow Y$ tak, aby

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

říkáme zobrazení L **silná derivace**.



Jdou i derivace vyšších řádů.

13.1.2 Konvexní funkce

Reálná funkce f definovaná na konvexní podmnožině D (reálného) vektorového prostoru V se nazývá **konvexní**, pokud je f konvexní na každé úsečce spojující dva body D .

Platí:

- ⇒ Je-li reálná konvexní funkce f na otevřené konvexní množině D spojitá v bodě $x_0 \in D$, pak je sublineární na jistém okolí $U(x_0, \delta)$. Tedy existuje konstanta K tak, že

$$|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\|$$

na jistém $U(x_0, \delta)$.

- ⇒ Nechť f je reálná konvexní funkce na otevřené konvexní podmnožině D (reálného) úplného normovaného prostoru X . Potom pravostranná slabá derivace existuje v každém bodě D a zobrazení

$$h \mapsto \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

je konvexní funkcionál na X .

- ⇒ Je-li reálná konvexní funkce f na otevřené konvexní podmnožině D (reálného) úplného normovaného prostoru X spojitá v bodě $x \in X$ a v tomto bodě má derivace ve všech směrech, pak má v bodě x slabou derivaci.

- ⇒ V separabilním úplném normovaném prostoru je každá spojitá konvexní funkce definovaná na konvexní otevřené podmnožině slabě derivovatelná na husté G_δ množině.

(Mazur)

- ⇒ Nechť v úplném normovaném prostoru X má každá spojitá konvexní funkce definovaná na otevřené konvexní podmnožině $U \subset X$ silnou derivaci na husté podmnožině U . Pak má každá reálná sublineární funkce f definovaná na otevřené podmnožině $G \subset X$ silnou derivaci na husté podmnožině G .

(D.Preiss 1990)

13.2 Integrální počet

13.2.1 Vektorové míry

Nechť je S daná σ -algebra podmnožin množiny Ω , (Ω, S) měřitelný prostor a X je úplný normovaný prostor. Zobrazení $F : S \rightarrow X$, které je σ -aditivní a splňuje $F(\emptyset) = 0$, nazveme **vektorová míra** na S .

Pro vektorovou míru F zkoumáme množinovou funkci $|F|$ na S

$$|F(A)| = \sup \left\{ \sum_{j=1}^k \|F(A_j)\| : A_1, \dots, A_k \in S \text{ jsou po dvou disjunktní a } \cup_{j=1}^k A_j = A \right\}$$

a tuto funkci nazveme **totální variace** zobrazení F . Pokud je totální variace konečná funkce na Ω , říkáme, že F má **konečnou variaci**.

Nechť (Ω, S, μ) je prostor s konečnou mírou a $F : \Omega \rightarrow X$ je vektorová míra. Řekneme, že míra F je **absolutně spojitá** vzhledem k míře μ , pokud je nezáporná míra $|F|$ absolutně spojitá vzhledem k μ , tedy $\mu(E) = 0 \Rightarrow F(E) = 0$ pro každou podmnožinu $E \in S$.

13.2.2 Vektorová integrace

Nechť (Ω, S, μ) je prostor s konečnou mírou, $\mu(\Omega) = 1$, X je úplný normovaný prostor a $F : \Omega \rightarrow X$ je vektorová funkce.

O funkci F říkáme, že je

— **jednoduchá**, pokud má tvar

$$F = \sum_{j=1}^n x_j c_{E_j} ,$$

kde c_{E_j} jsou charakteristické funkce po dvou disjunktních množin $E_j \in S$, $x_j \in X$.
Pro jednoduchou funkci definujeme integrál jednoduše

$$\int_{\Omega} F \, d\mu = \sum_{j=1}^n x_j \mu(E_j) .$$

— **měřitelná**, pokud je rovna μ -skoro všude limitě posloupnosti jednoduchých funkcí.

— **integrovatelná**, pokud existuje posloupnost $\{F_n\}$ jednoduchých funkcí tak, že

$$\int_{\Omega} \|F - F_n\| \, d\mu = 0 .$$

Pak definujeme integrál jednoduše

$$\int_E F \, d\mu = \lim \int_E F_n \, d\mu$$

pro každou množinu $E \in S$.

13.2.3 Prostory se základní větou analýzy

Nechť je X úplný normovaný prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní

(i) Je-li $F : [a, b] \rightarrow X$ absolutně spojitá funkce, pak je F diferencovatelná skoro všude a platí

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) .$$

(ii) Každé sublineární zobrazení $F : [a, b] \rightarrow X$ je diferencovatelné skoro všude.

(iii) Každá omezená podmnožina X je **zářezová**, tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x_ε tak, že $x_\varepsilon \notin \overline{D \setminus U(x_\varepsilon, \varepsilon)}$.

(iv) Každá omezená podmnožina X má **plátek** libovolně malého průměru, kde plátkem rozumíme průnik množiny nějakým uzavřeným "poloprostorem", tedy například průnik množiny M a poloprostoru $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ pro vhodná $\varphi \in X^*$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) Je-li (Ω, S, μ) prostor s konečnou mírou a $F : S \rightarrow X$ vektorová míra konečné variace, která je absolutně spojitá vzhledem k μ , existuje integrovatelná funkce $G : \Omega \rightarrow X$ tak, že

$$F(E) = \int_E G \, d\mu \quad \text{pro } E \in S .$$

Místo (Ω, S, μ) lze vzít (pocitivou) míru na $[0, 1]$.

(S.Bochner a A.E.Taylor 1938)

O úplném normovaném prostoru, ve kterém platí předchozí ekvivaletní podmínky, říkáme, že v něm platí **základní věta analýzy**.

(Radon, Nykodým)

Tuto vlastnost mají úplné součinnové prostory (J.v.Neumann 1932), reflexivní (R.S. Philips 1940) a uniformně konvexní prostory (J.A. Clarkson 1936).



Tam je nám dobře.

13.3 Funkční počet



Pro názornost si můžeme představit zobrazení jako matici. Pak následující kouzlení připadá průhledné.

13.3.1 Počítání s operátory

Pro operátory z lineárního prostoru X do lineárního prostoru X budeme chtít doplnit základní počítání (sčítání a násobení) s operátory o další funkce. Tak budeme zkoušet věci jako

$$\exp(T) = 1 + \frac{T}{1!} + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \dots,$$

kde chápeme T^2 jako skládání zobrazení $T(T)$. Půjde o konvergenci posloupnosti částečných součtů, někdy budeme potřebovat cosi jako komutativitu.

Základní výsledky budou vypadat podobně jako komplexní integrace:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(\lambda) \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + \dots \right) d\lambda,$$

tedy např.

$$\exp(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2} + \frac{T^2}{\lambda^3} + \dots \right) d\lambda.$$

13.3.2 Algebry operátorů

Pro studium operátorů budeme používat strukturu nazývanou **algebra** \mathcal{A} nad tělesem F , což je vektorový prostor nad tělesem F s další operací vnitřního násobení $(a, b) \mapsto ab \in \mathcal{A}$, které je asociativní, distributivní vůči sčítání a splňující $\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$ pro $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in F$.



Při vnitřním násobení jde o cosi jako skládání zobrazení.

Pokud je \mathcal{A} navíc úplný normovaný prostor s normou splňující $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, nazýváme ji **úplná normovaná algebra**.



Při vnitřním násobení jde o cosi jako skládání zobrazení.

Zpravidla budeme požadovat existenci jednotkového prvku operace násobení $e \in \mathcal{A}$ s jednotkovou normou.

13.3.3 Definice (Algebry s involucí)

Úplná normovaná algebra s operací $x \mapsto x^*$ splňující

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, (x^*)^* = x, (xy)^* = y^*x^*, (x+y)^* = x^*+y^*, (\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$$

se nazývá \mathcal{C}^* -**algebra** a operace $x \mapsto x^*$ se nazývá **involuce**. Zobrazení mezi \mathcal{C}^* -algebry zachovávající všechny operace nazýváme \mathcal{C}^* -**homomorfismus**.

Prvek x se nazývá **normální**, pokud $xx^* = x^*x$, pokud $x = x^*$, říkáme mu **samoadjungovaný**.

(Hermite)



Pokud je samoadjungovaný prvek reprezentován maticí, jde o (anti)symetrickou matici ($t_{i,i} = \overline{t_{j,i}}$).

13.3.4 Invertibilní prvky

Řekneme, že prvek $x \in \mathcal{A}$ je **invertibilní**, pokud existuje takové $y \in \mathcal{A}$, že $xy = yx = e$. Toto y pak značíme x^{-1} a nazýváme **inverze** prvku x . Množinu invertibilních prvků algebry \mathcal{A} označíme U .

13.3.5 Věta (Vztah inverze a geometrické řady)

Je-li prvek $x \in \mathcal{A}$ a $\|x\| < 1$, je prvek $e - x$ invertibilní a platí

$$(e - x)^{-1} = e + x + x^2 + x^3 + \dots$$

13.3.6 Definice (Spektrum a rezolventa)

Pro prvek $x \in \mathcal{A}$ nazýváme **rezolventa** $\rho(x)$ množinu těch (komplexních) čísel λ , pro něž prvek $\lambda e - x$ je invertibilní. Doplněk (v \mathbb{C}) nazýváme **spektrum** prvku x a značíme $\sigma(x)$. Číslo $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ nazveme **spektrální poloměr** prvku x .

13.3.7 Věta (O rezolventní funkci)

Funkci $\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1} = \sum \lambda^{-n-1} x^n$ nazveme **rezolventní funkce**, značíme $R_\lambda(x)$.

Rezolventní funkce je **slabě holomorfní** na rezolventní množině, t.j. pro $L \in \mathcal{A}^*$ je funkce $\lambda \mapsto L(R_\lambda(x))$ holomorfní na $\rho(x)$.

13.3.8 Věta (O spektru)

Spektrum libovolného prvku úplné normované algebry je neprázdná kompaktní podmnožina \mathbb{C} .

(Gelfand)

13.3.9 Reprezentace algeber

Prostor nenulových multiplikativních lineárních funkcionalů na úplné normované algebře \mathcal{A} nazveme **spektrum úplné normované algebry** \mathcal{A} , značíme jej $\Omega(\mathcal{A})$ (jde o w^* -kompaktní podprostor \mathcal{A}^*). Bude nás zajímat prostor $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ spojitých funkcí na $\Omega(\mathcal{A})$.

Platí následující

- ⇒ Úplná normovaná algebra \mathcal{A} je homomorfní jisté podalgebře $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ (základní homomorfismus $a \mapsto (L \mapsto L(x))$ se nazývá **spektrální transformace** a značívá se Ψ).

(Gelfand)

- ⇒ Spektrální transformace komutativní algebry \mathcal{A} je izometrie, pokud platí $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro všechna $x \in \mathcal{A}$.
- ⇒ Spektrální transformace komutativní \mathcal{C}^* -algebry \mathcal{A} je izometrickým $*$ -izomorfismem.

(Gelfand, Naimark)

Poznamenejme, že pro \mathcal{C}^* -algebru \mathcal{A} jsou její spektrum $\Omega(\mathcal{A})$ a spektrum $\sigma(a)$ libovolného jejího normálního prvku a homeomorfní.

13.3.10 Funkční kalkulus

Bud' C^* -algebru \mathcal{A} s jednotkou e . Zvolme pevně $a \in \mathcal{A}$. Nechť \mathcal{H} je C^* -algebra komplexních funkcí holomorfních na spektru $\sigma(a)$. Zobrazení $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ nazveme **funkční kalkulus**, pokud platí

- (i) Ψ je $*$ -homomorfismus,
- (ii) spektrum $\Psi(f)$ je rovno $f(\sigma(a))$,
- (iii) $(t \mapsto 1) \mapsto e$,
- (iv) $(t \mapsto t) \mapsto a$,
- (v) $(t \mapsto c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n) \mapsto c_0 + c_1 a + \dots + c_n a^n$.

Značíme zpravidla $f(a)$ místo $\Psi(f)$.

13.3.11 Analytický funkční kalkulus

Bud' C^* -algebru \mathcal{A} s jednotkou e . Zvolme pevně $a \in \mathcal{A}$. Nechť \mathcal{H} je C^* -algebra komplexních funkcí holomorfních na otevřeném okolí G spektra $\sigma(a)$. Zobrazení $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$ definované předpisem

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^3} + \dots \right) d\lambda,$$

kde Γ je kladně orientovaný cyklus s $\sigma(a) \subset \text{ins } \Gamma$ a $(\mathbb{C} \setminus G) \subset \text{out } \Gamma$, je funkční kalkulus, nazývaný **analytický funkční kalkulus**.

(Dunford)

Tedy například

$$\exp(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^3} + \dots \right) d\lambda.$$

13.3.12 Spojitý funkční kalkulus

Bud' C^* -algebru \mathcal{A} s jednotkou e . Zvolme pevně samoadjungovaný prvek $a \in \mathcal{A}$. Pak existuje právě jeden funkční kalkulus $\mathcal{C}(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$ zachovávající polynomy. Tento kalkulus zachovává normu a $f(a)$ je vždy normální.

(Riesz)



Kdyby nebyly obecné prostory a znali bychom pouze matice, pak bychom se při dalších zápisech umaticovali.

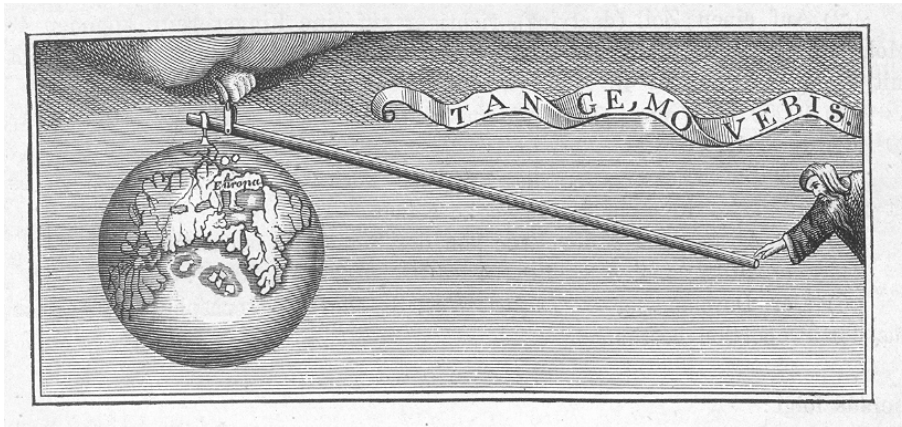
13.4 Pevný bod zobrazení

13.4.1 Pevný bod

Obecnou rovnici $F(x) = y$ pro zobrazení $F : X \rightarrow Y$ je možné často přeformulovat na úlohu $f(t) = t$ pro zobrazení $f : T \rightarrow T$. Bod $t \in T$ nazveme **pevný bod** zobrazení f , pokud $f(t) = t$.



K nalezení pevného bodu je často potřeba hodně práce ...



Obrázek 13.4.1: Pevný bod je užitečný.

Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí.
(Archimédés ze Syrákús ~ -250)

Řekneme, že topologický prostor T má **vlastnost pevného bodu**, krátce **FPP**, pokud každé spojitě zobrazení T do T má pevný bod.

13.4.2 Věty o pevném bodu

Platí

- ⇒ Každá kontrakce na úplném metrickém prostoru má právě jeden pevný bod.
- ⇒ Každá kompaktní konvexní podmnožina úplného normovaného prostoru konečné dimenze má vlastnost pevného bodu.
- ⇒ Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina úplného normovaného prostoru a $K \subset C$ kompaktní. Pak každé spojitě zobrazení z C do K má pevný bod.

(J.P.Schauder ~ 1922)

- ⇒ Nechť C je uzavřená omezená konvexní podmnožina úplného normovaného prostoru. Pak každé kompaktní zobrazení z C do C má pevný bod.

13.5 Operátory v akci

13.5.1 Dynamické děje

Uvažujme úlohu popsat nějaký plynulý děj v úplném normovaném prostoru X (například plynulé otáčení bodů roviny okolo počátku). Její řešení bude zobrazení z časové osy do prostoru operátorů na prostoru X . Tedy jde o zobrazení $T : t \rightarrow T(t)$, kde $t \in [0, +\infty)$, kde $T(0)$ je identita na X a kde platí neúprosná logika času : za dobu $s + t$ se dostaneme tam, kam se dostaneme za čas s složeno s tím, kam se dostaneme za čas t . Tedy $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$.



Ve skutečnosti jde o to najít zobrazení z $[0, +\infty)$ do množiny operátorů na X , které převádí součet kladných reálných čísel na složení jejich obrazů.

13.5.2 Definice (Semigrupa operátorů)

Sestava $\{T_t\}_{t \geq 0}$ omezených operátorů na úplném normovaném prostoru X (zkráceně $\{T_t\}_t$) se nazývá (jednoparametrická) **semigrupa operátorů** (na X), pokud

- (i) T_0 je identita na X ,
- (ii) $T_{s+t} = T_s T_t$ pro $s, t, \in [0, +\infty)$.

Jde tedy o homomorfní obraz aditivní pologrupy kladných reálných čísel v prostoru $\mathcal{L}(X)$.



Například zobrazení $t \mapsto (z \mapsto ze^{it})$ přiřazuje kladnému reálnému číslu t otočení bodů roviny o úhel t okolo počátku vytváří semigrupu.

13.5.3 Spojitost semigrupy

Semigrupa $\{T_t\}_t$ se nazývá

- ⇒ **silně spojitá**, pokud $\lim_{t \rightarrow 0_+} T_t(x) = x$ pro každé $x \in X$,
- ⇒ **stejněměrně spojitá**, pokud $\lim_{t \rightarrow 0_+} \|T_t - I\| = 0$,
- ⇒ **neexpanzivní**, pokud $\|T_t\| \leq 1$.

13.5.4 Generátor semigrupy

Pravostranná derivace zobrazení $t \mapsto T_t$ v nule se nazývá **generátor** semigrupy $\{T_t\}_t$. Jde o lineární operátor na lineárním podprostoru X .



Například operátor $z \mapsto iz$ je generátor semigrupy otočení bodů roviny o úhel t okolo počátku.

Pro semigrupy na úplném normovaném prostoru platí

- ⇒ Mají-li dvě silně spojitě semigrupy operátorů stejné generátory, jde o stejné semigrupy.
- ⇒ Generátor A silně spojitě semigrupy operátorů $\{T_t\}$ je omezený právě když je semigrupa $\{T_t\}$ stejnoměrně spojitá. V tom případě platí $T_t = e^{tA}$.

13.5.5 Abstraktní dynamická úloha

Nechť X je úplný normovaný prostor, $A : D_A \subset X \rightarrow X$ uzavřený lineární operátor a $x \in X$. Řešením úlohy

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) \quad \text{pro } t \geq 0, \\ u(t) &= x \end{aligned}$$

rozumíme každé zobrazení $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ splňující

$$u(0) = x, \quad u(t) \in D_A, \quad \dot{u}(t) = Au(t) \quad \text{pro každé } t \geq 0.$$

Je-li A uzavřený lineární operátor na úplném normovaném prostoru X a existuje-li silně spojitá semigrupa $\{T_t\}$, jejímž je A generátorem, pak pro každé $x \in D_A$ existuje právě jedno řešení uvedené úlohy a $u(t) = T_t x$ pro každé $t \in [0, +\infty)$.

Kapitola 14

Základní typy operátorů



ato kapitola ukáže známé operátory a jejich vlastnosti.



Řešení rovnice je často vlastně hledání jádra nějakého hloupého operátoru.

14.1 Kompaktní operátory

14.1.1 Definice (Kompaktní operátor)

Je-li $L : V \rightarrow W$ omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory V a W a zobrazuje-li omezené množiny V na množiny relativně kompaktní ve W , budeme mu říkat **kompaktní operátor** na vektorovém prostoru V . Množinu všech kompaktních operátorů značíme $\mathcal{L}_c(V, W)$, popřípadě $\mathcal{L}_c(V) = \mathcal{L}_c(V, V)$.

Řekneme, že operátor $L \in \mathcal{L}(V, W)$ je **konečně dimenzionální operátor**, pokud je obor jeho hodnot množina konečné dimenze ve W . Značíme $\mathcal{L}_f(V, W)$, popřípadě $\mathcal{L}_f(V) = \mathcal{L}_f(V, V)$.

14.1.2 Věta (O kompaktních operátorech)

Buďte U, V a W normované lineární prostory, X úplný normovaný. Pak

- ⇒ Konečně dimenzionální je kompaktní, kompaktní je spojitý.
- ⇒ $\mathcal{L}_f(V, W) \subset\subset \mathcal{L}_c(V, W) \subset\subset \mathcal{L}(V, W)$.
- ⇒ $\mathcal{L}_c(V, W)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(V, W)$.
- ⇒ Je-li $L \in \mathcal{L}(U, V)$ a $K \in \mathcal{L}(V, W)$, pak $K \circ L$ je kompaktní, pokud je K či L kompaktní.
- ⇒ Pro $T \in \mathcal{L}_c(V, W)$ je dimenze $\ker(I - T)$ konečná.

- ⇒ 0 leží ve spektru kompaktního operátoru na nekonečně dimenzionálním normovaném prostoru.
- ⇒ $T \in \mathcal{L}(V, W)$ je kompaktní právě když adjungovaný operátor T' je kompaktní.
- ⇒ Kompaktní operátor $\mathcal{L}_c(V, W)$ převádí slabě konvergentní posloupnost na konvergentní.

(J.P.Schauder ~ 1922)

14.1.3 Věta (O spektru kompaktního operátoru)

Nechť je L kompaktní operátor na úplném normovaném prostoru X a $\lambda \neq 0$. Pak platí

- ⇒ Operátor $L - \lambda I$ je prostý, právě když je na.
- ⇒ Platí pěkné vzorečky o kolmicích, např. $\text{range}(L' - \lambda I') = (\ker(L - \lambda I))^\perp$.
- ⇒ Dimenze $\ker(L - \lambda I)$ je konečná.
- ⇒ Každý nenulový prvek spektra je vlastním číslem konečné násobnosti, $\sigma(L) \subset \{0\} \cup \sigma_p(L)$.
- ⇒ Nenulových vlastních čísel je nejvýše spočetně, jejich hromadný bod může být pouze 0.

(Fredholm)



Tedy $L(x) - \lambda x = y$ má řešení pro každou pravou stranu y , právě když $L(x) - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení. To znám.

14.2 Samoadjungované operátory

14.2.1 Definice (Samoadjungované operátory)

Nechť $L \in \mathcal{L}(U, W)$, kde V a W jsou úplné součinnové prostory. Definujeme **adjungované zobrazení** $L^* \in \mathcal{L}(W, V)$ předpisem $(Lx, y) = (x, L^*y)$ pro $x \in V$, $y \in W$.

Operátor L na úplném součinnovém prostoru V se nazývá **samoadjungovaný**, jestliže pro každou dvojici $x, y \in V$ platí $(Lx, y) = (x, Ly)$, čili $L = L^*$. Operátor L na úplném součinnovém prostoru V se nazývá **normální**, jestliže platí $LL^* = L^*L$.



Jde o algebraické kouzlo.

14.2.2 Věta (Spektrum samoadjungovaného operátoru)

Samoadjungovaný operátor L na úplném součinném prostoru V má reálné spektrum. Platí $\sigma(L) \subset [m_L, M_L]$, kde

$$m_L = \inf\{(Lv, v) : \|v\| = 1\}, \quad M_L = \sup\{(Lv, v) : \|v\| = 1\}.$$

14.2.3 Věta (Měřitelný funkční kalkulus)

Nechť L je samoadjungovaný operátor na úplném součinném prostoru V , zvolme prvek $v \in V$. Označme Ψ spojitý funkční kalkulus. Pak zobrazení

$$f \mapsto (\Psi(f)v, v)$$

z prostoru $\mathcal{C}(\sigma(L))$ do \mathbb{R} je lineární nezáporné a jde reprezentovat nezápornou topologickou mírou na $\sigma(L)$, označme tuto míru E_v . Pak zobrazení

$$g \mapsto \int_{\sigma(L)} g dE_v$$

je funkční kalkulus algebry omezených topologických funkcí na $\sigma(L)$. Tento kalkulus nazýváme **topologický měřitelný funkční kalkulus**.

(É.Borel \sim 1920)

14.2.4 Kompaktní samoadjungované operátory

Buď L kompaktní samoadjungovaný operátor na úplném součinném prostoru V . Pak

- $\Rightarrow V = \mathcal{M} \oplus \ker L$, kde \mathcal{M} je uzavřený lineární prostor generovaný všemi vlastními vektory operátoru L příslušnými k nenulovým vlastním číslům.
- \Rightarrow Existuje ortonormální báze $\{u_n\}$ podprostoru $(\ker L)^\perp$ tak, že

$$L(v) = \sum_n \lambda_n(v, u_n)u_n$$

pro každé $v \in V$.

- \Rightarrow Označme P_n ortogonální projekce V na $\ker(L - \lambda_n I)$. Pak platí

$$L = \sum_n \lambda_n P_n$$

a

$$f(L) = \sum_n f(\lambda_n)P_n$$

je funkční kalkulus pro omezené komplexní funkce definované na spektru $\sigma(L)$.

14.3 Další třídy operátorů

14.3.1 Operátory konečného typu

Pokud pro operátor L na úplném normovaném prostoru V platí, že dimenze jádra $\ker L$ a kodimenze oboru hodnot $\text{range } L$ jsou konečné, říkáme L **operátor konečného typu**.

(Fredholm)

Platí

- ⇒ Je-li K kompaktní a $\lambda \neq 0$, je $K - \lambda I$ operátor konečného typu.
- ⇒ Operátor L je operátor konečného typu, právě když existuje operátor $M \in \mathcal{L}(V)$ tak, že operátory $LM - I$ a $ML - I$ jsou kompaktní.

(Noether)

14.3.2 Operátory typu l^2

Pokud pro operátor L na úplném součinném prostoru V existuje ortonormální báze $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prostoru V taková že

$$\sum_{\alpha \in A} \|L(e_\alpha)\|^2 < +\infty ,$$

pak je operátor L kompaktní.

(D.Hilbert \sim 1920, Schmidt)

14.3.3 Nukleární operátory

Pokud pro operátor L na úplném součinném prostoru V existují posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ prostoru V takové že

$$Lv = \sum (v, x_n) y_n ,$$

nazveme operátor L **nukleární**.

Platí

- ⇒ Každý nukleární operátor je kompaktní.

14.3.4 Uzavřené operátory

Pokud má operátor L na úplném normovaném prostoru V uzavřený graf, nazveme operátor L **uzavřený**.

Platí

- ⇒ Každý uzavřený lineární operátor L má spektrum $\sigma(L)$ uzavřenou podmnožinu \mathbb{C} a funkce $\lambda \mapsto (L - \lambda I)^{-1}$ je analytická na doplňku spektra $\sigma(L)$.

Kapitola 15

Základní operátory



ato kapitola ukáže, že je možné operátory najít všude kolem nás.



Reálnou funkci lze rozložit na komplexní frekvence, to je trochu silný kafe.

15.1 Obecné operátory



Operátory? To je trochu filosofická otázka. Proč by se měla jedna funkce měnit za druhou? Qui bono?

15.1.1 Prostor operátorů

Prostor $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ všech lineárních omezených operátorů s operací skládání tvoří úplnou normovanou algebru.

Prostor $\mathcal{L}_c(V)$ všech kompaktních lineárních omezených operátorů s operací skládání tvoří uzavřenou úplnou normovanou podalgebru algebry $\mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Pokud je dimenze prostoru V rovna konečná a rovná n , můžeme $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ chápat jako prostor všech čtvercových matic s n řádky a sloupci, značíme tuto algebru $M_n(\mathbb{R})$ popřípadě $M_n(\mathbb{C})$.

Platí

- ⇒ Duál prostoru $\mathcal{L}_c(V)$ všech kompaktních lineárních omezených operátorů na úplném součinovém prostoru H je prostor $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ všech nukleárních operátorů na V .

15.1.2 Disková algebra

Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní, množina $\mathcal{A}(K) = \{f \in \mathcal{C}(K) : f \text{ je analytická na } \overset{\circ}{K}\}$ s normou prostoru $\mathcal{C}(K)$ a násobením funkcí je úplná normovaná algebra. V případě jednotkového kruhu Δ nazýváme $\mathcal{A}(\Delta)$ **disková algebra**.

Platí

- ⇒ Spektrum diskové algebry $\mathcal{A}(\Delta)$ je homeomorfní Δ .

15.1.3 Algebra $H^\infty(U)$

Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Množina $H^\infty(U)$ je algebra omezených holomorfních funkcí na U . Množina U jde vnášet do spektra $H^\infty(U)$, přesnější vztah těchto množin zkoumá **problém korony**.

15.1.4 Příklady semigrup

Platí

- ⇒ Na úplném normovaném prostoru $V = \mathbb{R}$ uvažujeme semigrupu operátorů T_t

$$T_t = e^t .$$

- ⇒ Na úplném normovaném prostoru $L^p([0, +\infty))$, kde $p \in [1, +\infty)$, uvažujeme silně spojitou semigrupu operátorů T_t

$$T_t f(s) = f(s+t) \quad \text{pro } t \geq 0, s \geq 0 .$$

Její generátor je operátor derivování $f \mapsto f'$ s definičním oborem $\{f \in L^p([0, +\infty)) : f \text{ je absolutně spojitá na } [0, n] \text{ pro } n \in \mathbb{N}\}$.

15.1.5 Operátor derivování

Uvažujme prostor $V = \mathcal{C}([0, 1])$ a **operátor derivování** $f \mapsto f'$ definovaný na husté podmnožině prostoru V tvořené spojitými funkcemi se spojitou derivací.

Platí

- ⇒ Operátor derivování je lineární uzavřený, ale není omezený.

15.2 Kompaktní operátory

15.2.1 Příklady kompaktních operátorů

Nechť je k spojitá funkce na $[0, 1] \times [0, 1]$. Často se používají spojitě lineární operátory na prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}([0, 1])$

$$f \mapsto F(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

(Fredholm)

a

$$f \mapsto F(s) = \int_0^s k(s, t) f(t) dt .$$

(Voltera)

Takto zapsaný operátory nazýváme **integrální operátor**, funkci k nazýváme **jádro integrálního operátoru**.

15.3 Exponenciální transformace

15.3.1 Definice

Pro funkci $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zkusíme definovat funkci F předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt .$$

Tento operátor $L : f \mapsto F$ budeme nazývat **exponenciální transformace**.



Exponenciální transformace je kouzlo, kterým se dají diferenciální rovnice převést na obyčejné rovnice. Viz dále.

Operátor L je definován pro funkce, které nerostou příliš rychle. Jeho fungování vidíme na příkladu

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s - a} , \quad s > a .$$

Pro funkci $f(t)$ nanejvýš exponenciálního růstu je její exponenciální transformace definována pro dostatečně velká s (v komplexní rovině s dostatečně velkou reálnou částí). Toto zobrazení je prosté a jeho inverze je dána podobným vzorcem.



Něco raději zatajím. Ať je klid.

Ze zápisu

$$e^{-st} = 1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} + \dots$$

usuzujeme, že pokud přiřadíme proměnné t význam času a měříme jej v sekundách, pak proměnné s budeme říkat **komplexní frekvence**.

15.3.2 Zde se kouzlí

Užitečnost exponenciální transformace pro řešení různých úloh spočívá v tom, že dovede transformovat rovnici do nového tvaru. Základní předností je, že transformace derivace funkce jde spočítat pomocí transformace funkce. Podobně pro primitivní funkce. Tak se řada problémů ve tvaru diferenciálních, integrálních nebo smíšených rovnic transformuje do obyčejných rovnic s exponenciální transformací hledané funkce. Pokud jde takto

transformovaná rovnice spočítat, stačí pak k nalezení hledané funkce použít inverzní exponenciální transformaci.

Vzorečky jsou zde

$$\begin{aligned} Ly' &= sLy - y(0) \\ Ly'' &= sLy - y'(0) = s^2Ly - sy(0) - y'(0) \\ L \int_0^t f(u) du &= \frac{Lf}{s} \end{aligned}$$



Derivování odpovídá násobení, integrování odpovídá dělení. Prostě svět dovede být jednoduchý.

Podobně se dá postupovat při soustavách rovnic.

Neodmítám oběd jenom proto, že nerozumím procesu trávení.
(O.Heaviside)

15.3.3 Skoková funkce

Funkci

$$h(t) = 0 \text{ pro } t < 0, h(t) = 1 \text{ pro } t \geq 0$$

budeme nazývat **skoková funkce**.

(Heaviside)

Exponenciální transformace delta-funkce $\delta(t)$ je rovna jedničce. Podobně $L(\delta(t - c)) = e^{-sc}$.

15.3.4 Konvoluce

Jestliže na nějaké prostředí působil v čase t nějaký impuls $f(t)$, můžeme jeho vliv na budoucnost v čase T zachytit výrazem

$$\int_0^T f(t)g(T-t) dt .$$

Faktor g popisuje slábnoucí vliv impulsu f (slábnutí závisí na uplynulém čase $T - t$). Můžeme definovat operaci, která dvěma funkcím f a g přiřazuje $f * g$ předpisem

$$(f * g)(T) = \int_0^T f(t)g(T-t) dt .$$

Tuto operaci budeme nazývat **konvoluce funkcí** f a g .

Exponenciální transformace převádí konvoluci na součin

$$L(f * g) = LfLg .$$

15.3.5 Kde se hodí konvoluce

Uvažujeme klidová řešení rovnic s vhodným (např. diferenciálním) operátorem) T

$$Ty = f(t), \quad Tk = \delta(t).$$

Použijeme exponenciální transformaci a dostaneme $P(s)Ly = Lf$ a $P(s)Lk = 1$, z toho spočítáme

$$Ly = \frac{1}{P(s)}Lf = (Lk)(Lf) = L(k * f).$$

Tedy $y = k * f$. Řešení první rovnice je konvoluce pravé strany (f) a řešení druhé rovnice (k).



Tedy se k řešení diferenciální rovnice dopracujeme pouze konvolucí. Pozor! V praxi je však potřeba spočítat ty exponenciální transformace. To může být samozřejmě problém.

15.4 Frekvenční řady a transformace



Frekvenční řada je užitečný postup, jak ze spojitého udělat jednoduchým postupem diskrétní. Z funkce se udělá řada jen to fikne. Podobně jde někdy funkce napsat do aproximační řady.

15.4.1 Frekvenční řada

Budeme se zabývat otázkou, zda lze funkci f aproximovat pomocí konečných součtů funkcí známých, například polynomů nebo trigonometrických funkcí. Aproximace polynomy vede k vyjádření funkce pomocí mocninné řady. Pokud zvolíme vyjádření

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots,$$

dostaneme v mnoha případech schopnou aproximaci. Ze zápisu je vidět, že příslušná řada je určena pouze lokálním chováním funkce f v počátku. Pracovali jsme vlastně s vektorovým prostorem spojitých funkcí a zvolili jsme si "bázi" tvořenou funkcemi $1, x, x^2, x^3, \dots$

Taková aproximace se příliš nehodí k analýze funkcí, které jsou ve své podstatě periodické, které vznikly složením harmonických kmitů a podobně. Nechť máme funkci f ve tvaru součtu

$$f(x) = c + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x.$$

Spočítáme koeficient \mathbf{b}_2 pomocí integrace

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 2x \, dx = \pi \mathbf{b}_2 .$$

Budeme pracovat s funkcemi $1, \sin nx, \cos nx$. Tyto tvoří "ortogonální bázi", přičemž budeme "kolmost" dvou funkcí f a g měřit "skalárním součinem"

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx .$$

Tedy například

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 .$$

Pro funkci f integrovatelnou na intervalu $(0, 2\pi)$ vytvoříme formální řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

kde koeficienty a_n a b_n jsou definovány vztahem

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx , \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Tuto řadu budeme nazývat **frekvenční řada** funkce f , značit F_f a budeme psát

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

(Fourier)

Sherlock Holmes: "Z kapky vody by logik mohl předpovědět Atlantik nebo Niagaru."

(Sir A.C. Doyle 1929)

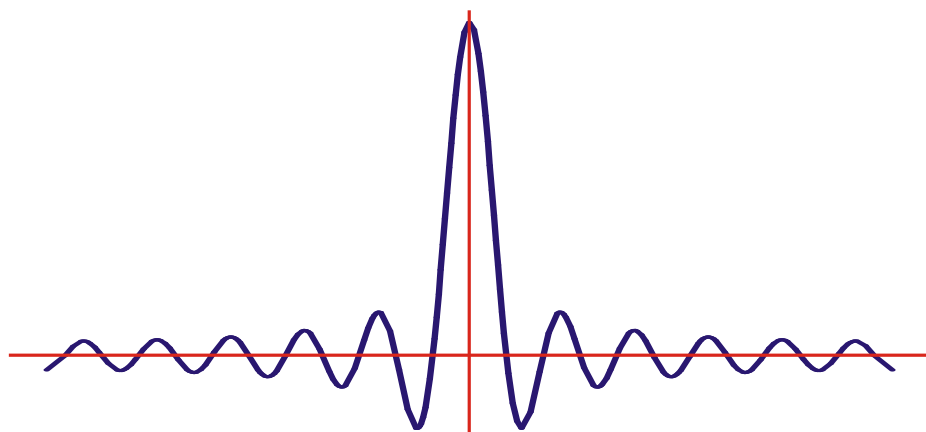
15.4.2 O součtu frekvenční řady

Označíme částečný součet frekvenční řady

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$



Obrázek 15.4.1: Atlantik a Niagara.

Obrázek 15.4.2: Jádro D_{11} ukazuje, že hodnota v sledovaném bodě bude dominovat.

Dosadíme si výrazy pro koeficienty a_k a b_k a dostaneme po úpravě

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt ,$$

kde

$$D_n(t) = 1/2 + \cos t + \dots + \cos nt = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} .$$

Tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} t D_n(t) dt = 0$$

pro $\delta = \pi$. Tvrzení platí i pro libovolné $\delta > 0$, protože integrály přes interval (δ, π) konvergují k nule vždy. Podstatnou měrou přitom používáme následující limitu

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin \lambda t dt = 0$$

platnou pro libovolnou integrovatelnou funkci g .

(B.Riemann \sim 1850 a Lebesgue)

15.4.3 Konvergence frekvenční řady

Konvergence frekvenční řady je tedy zaručena pokud existuje konečný

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} dt .$$

To je splněno například při existenci jednostraných derivací funkce f v každém bodě. Pokud je funkce f sublineární, její frekvenční řada je konvergentní k funkci f .

(Dini)

Pokud má funkce f konečnou variaci na intervalu $[a, b]$, konverguje frekvenční řada k $(f(x+) + f(x-))/2$ v každém bodě $x \in (a, b)$. Je-li navíc funkce f spojitá v (a, b) , konvergence je lokálně stejnoměrná.

(C.Jordan ~ 1870 a G.P.L.Dirichlet 1840)

Každá spojitá funkce, obecněji každá $f \in L^2(0, 2\pi)$, je součtem své frekvenční řady skoro všude.

(L.Carleson 1966)

15.4.4 Průměrované součty frekvenční řady

Budeme nyní zkoumat průměry částečných součtů frekvenční řady. Označíme

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} (s_0(x) + \dots + s_n(x))$$

(Cesaro)

Postup vytvoření frekvenční řady zopakujeme "v průměru", dostaneme podobné vzorečky. Například

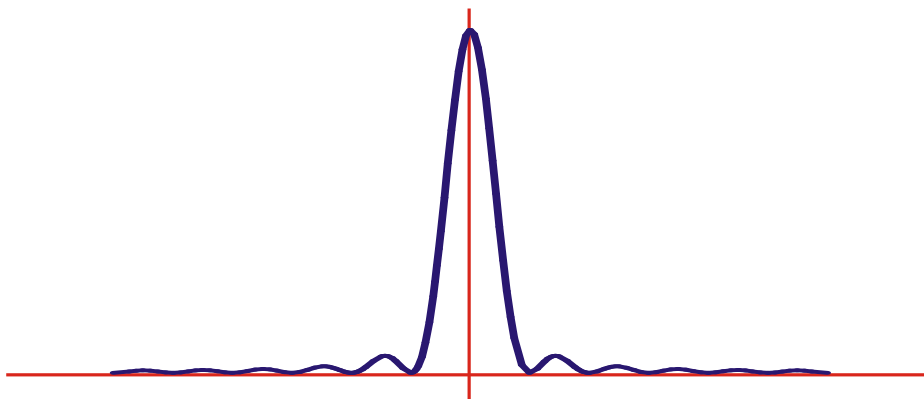
$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))K_n(t) dt ,$$

kde

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} (D_0(x) + \dots + D_n(x))$$



Funkce K_n mají oproti funkcím D_n výhodu nezápornosti. Proto některé kroky důkazů konvergence projdou lépe.

Obrázek 15.4.4: Jádru K_{11} - opět dominuje hodnota v sledovaném bodě.

15.4.5 Aplikace průměrových součtů

Pokud má funkce f konečné jednostranné limity v bodě x , konverguje zprůměrovaná frekvenční řada k $(f(x+) + f(x-))/2$. Je-li navíc funkce f spojitá v (a, b) , konvergence je lokálně stejnoměrná.

(Fejér)

Pokud konverguje frekvenční řada, pak konverguje i zprůměrovaná frekvenční řada. Tedy jediný možný součet frekvenční řady pro spojitou funkci je její funkční hodnota.

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[0, 1]$. Pak jde libovolně přesně aproximovat pomocí (trigonometrického) polynomu.

(K.Weierstrass 1885)

15.4.6 Frekvenční řady a L^2

Jde dokázat, že funkce 1 , $\sin nx$ a $\cos nx$ tvoří v prostoru L^2 úplný ortogonální systém. To nám dovoluje lépe pochopit frekvenční řady v prostoru spojitých funkcí. Frekvenční řady nikdy nebudou dobře aproximovat všechny spojitě funkce.



Jejich součty budou určovat funkci v L^2 , jejich součet bude rozumný "skoro všude". Frekvenční součty funkce f konvergují k funkci f v prostoru L^2 .

Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ její frekvenční koeficienty. Pak

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

v prostoru L^2 . Navíc

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

(Parseval)

Pokud jsou konstanty $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ dány a

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty ,$$

pak existuje právě jedna funkce v $L^2(0, 2\pi)$, jejíž frekvenční řada je těmito konstantami určena.

(Riesz a Fischer)

15.4.7 Komplexní tvar frekvenční řady

Položíme

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \in \mathbb{N} .$$

Pak

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} .$$

Komplexní tvar frekvenční řady pak vypadá takto

$$f(x) \sim \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} ,$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx .$$

15.4.8 O diskrétních a spojitých frekvencích

Pokud jde 2π periodická funkce napsat jako frekvenční řada, podařilo se nám jí rozložit na součet funkcí určitých frekvencí ($\sin nx$ a $\cos nx$).

Pokusíme se o spojitou analogii. Rozložit funkci na spojité spektrum "frekvencí". Budeme hledat vyjádření

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega .$$

Tomuto zápisu budeme říkat **frekvenční integrál** funkce f . Funkce hrající roli v tomto zápisu najdeme vzorečkem

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt , \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt .$$

15.4.9 Kdy je funkce rovna frekvenčnímu integrálu?

S integrály budeme zacházet opatrně. Označíme

$$I_\eta(x) = \int_0^\eta (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega .$$

Po úpravě se odvodí vztah

$$I_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \eta t}{t} dt .$$

Konvergence frekvenčního integrálu funkce f je zaručena pokud pro nějaké $\delta > 0$ existuje konečný

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t} dt .$$

Pak

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} I_\eta(x) = s .$$

To je splněno například při existenci jednostraných derivací v každém bodě. Pokud je funkce f sublineární, její frekvenční integrál je konvergentní k funkci f .

(Dini)

15.4.10 O komplexních frekvencích

Přejdeme ke komplexnímu tvaru. Položíme

$$I_\eta(x) = \int_{-\eta}^{\eta} c(\omega) e^{i\omega t} dt ,$$

kde

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt .$$

Pak

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega .$$

Takto sestavená funkce $c(\omega)$ je jakási frekvenční struktura funkce f . Aby byly vzorečky mezi f a c symetričtější, změníme koeficient před integračním znaméním.

15.4.11 Frekvenční transformace



Frekvenční transformace je kouzlo, kterým se dají diferenciální rovnice převést na obyčejné rovnice.

Pro (komplexní) integrovatelnou funkci $f \in L(\mathbb{R})$ položíme

$$f^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx .$$

Funkci f^\wedge nazýváme **frekvenční obraz** funkce f . Operátor $F^\wedge : f \mapsto f^\wedge$ budeme nazývat **frekvenční transformace**.

Pro (komplexní) integrovatelnou funkci $f \in L(\mathbb{R})$ položíme

$$f^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega .$$

Funkci f^\vee nazýváme **inverzní frekvenční obraz** funkce f . Operátor $F^\vee : f \mapsto f^\vee$ budeme nazývat **inverzní frekvenční transformace**.

15.4.12 Vlastnosti frekvenční transformace

Platí

- ⇒ Frekvenční obrazy jsou spojité.
- ⇒ Frekvenční obrazy mají v $\pm\infty$ nulovou limitu.
- ⇒ Nechť má funkce $f \in L(\mathbb{R})$ spojitou derivaci $f' \in L(\mathbb{R})$. Pak

$$(f')^\wedge(\omega) = i\omega f^\wedge(\omega) .$$

(Fourier)



Místo derivování se násobí. To je moc dobře ;-)

- ⇒ Pro $f(x) = e^{-x^2/2}$ je $f^\wedge(\omega) = e^{-\omega^2/2}$.



Některé funkce si s tím rozumějí.

15.4.13 Frekvenční transformace v L^2

Rozšíříme frekvenční transformaci díky hustotě spojitých a integrovatelných funkcí v prostoru L^2 na celý prostor L^2 . Frekvenční transformace je izomorfismus prostoru L^2 na sebe.

(Plancherel)

15.4.14 Frekvenční transformace (temperovaných) distribucí

Označme $S(\mathbb{R}^n)$ množinu funkcí $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ majících parciální derivace všech řádů a konvergujících k nule pro $|x| \rightarrow \infty$ rychleji než libovolná mocnina funkce $1/x$. Přesněji vyjádřeno necht' pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{D^\alpha \varphi(x)}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n} = 0 .$$

Funkcím v $S(\mathbb{R}^n)$ budeme říkat **testovací funkce** (například $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R}^n)$).

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}$ testovacích funkcí má v prostoru $S(\mathbb{R}^n)$ limitu φ , když pro každé multiindexy α, β platí na \mathbb{R}^n

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows x^\beta D^\alpha \varphi(x) .$$

Každý spojitý lineární funkcionál na $S(\mathbb{R}^n)$ se nazývá **temperovaná distribuce**. Prostor všech temperovaných distribucí budeme značit $S'(\mathbb{R}^n)$, nebo jen S' . Na S' budeme uvažovat slabou topologii, t.j. $f_k \rightarrow f$ v prostoru S' pokud pro každé $\varphi \in S$ platí $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$.

Pro $\varphi \in S$ se **frekvenční transformace** $F[\varphi]$ definuje předpisem

$$F[\varphi](\zeta) = \int \varphi(x) e^{i(\zeta, x)} dx ,$$

kde $(\zeta, x) = \zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_n x_n$. Nyní pro temperovanou distribuci f definici rozšíříme

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) .$$

Pro $f \in S'$ se **inverzní frekvenční transformace** definuje vzorečkem

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)] .$$

Platí

⇒ Frekvenční transformace je prostá (slabě) spojitá lineární transformace S na S' .

⇒ Frekvenční transformace jednotkového náboje je

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\zeta, x_0)} .$$

⇒ Derivace frekvenční transformace

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f] .$$

⇒ Frekvenční transformace derivace

$$F[D^\alpha f] = (-i\zeta)^\alpha F[f] .$$

⇒ Frekvenční transformace konvoluce (pro g finitní)

$$F[f * g] = F[f]F[g] .$$

⇒ Derivace temperované distribuce je temperovaná distribuce.

15.5 Operace s distribucemi

15.5.1 Součin funkce a distribuce

Uvažujeme situaci $\Omega = \mathbb{R}$. Funkci $f \in C^\infty$ a distribuci $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ přiřadíme součin fT předpisem

$$\varphi \mapsto T(f\varphi) .$$

Funkci $f \in C^\infty$ přiřazujeme distribuci

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi f \, d\mu .$$

Topologické míře λ na Ω přiřazujeme distribuci

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi \, d\lambda .$$

15.5.2 Distributivní derivace

Uvažujeme situaci $\Omega = \mathbb{R}$. Derivaci $\frac{dT}{dx}$ distribuce T v prostoru $\mathcal{D}^*(\Omega)$ definujeme předpisem $\varphi \mapsto -T(\varphi')$ pro funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Derivace distribuce je opět spojitý lineární funkcionál na základním prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$, tedy jde o distribuci, prvek $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Distribuce jsou tudíž nekonečně derivovatelné. Například derivace skokové funkce je bodový náboj

$$h'(x) = \delta(x) ,$$

derivace jednotkového náboje je **dipól** $\delta'(x)$, ...

Co je dokazatelné v matematice by nemělo být věřeno bez důkazu.
(R.Dedekind ~ 1899)

Operátor z $\mathcal{D}^*(\Omega)$ do $\mathcal{D}^*(\Omega)$, přiřazující distribuci její derivaci nazveme **distributivní derivace**. Distributivní derivace neklesající funkce na \mathbb{R} je topologická míra.

Derivaci distribuce T na prostoru \mathbb{R}^n podle multiindexu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ definujeme

$$(D^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T, D^\alpha \varphi) .$$

Například parciální derivace distribuce T v případě \mathbb{R}^n se definuje

$$\frac{\partial^3 T(x, y)}{\partial x^2 \partial y} : \varphi \mapsto (-1)^3 T \left(\frac{\partial^3 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right) .$$

15.5.3 Distributivní primitivní funkce v \mathbb{R}

Uvažujeme situaci $\Omega = \mathbb{R}$. Pro každou distribuci T má rovnice $y' = T$ právě jedno řešení ve třídě distribucí, toto řešení nazveme **distributivní primitivní funkce**.

15.5.4 Konvoluce distribucí v \mathbb{R}

Vzorečkem

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi), (g(x), \varphi(x + \xi)))$$

(pokud výrazy existují, například jedna z distribucí je finitní) se definuje **konvoluce distribucí**.

15.5.5 Vztah klasické a distributivní derivace

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Nechť $T \in D'(\Omega)$. Označme pro $i = 1, 2, \dots, n$ parciální distributivní derivace $G_i = \partial_i T \in D'(\Omega)$. Pak je ekvivalentní

- (i) T je funkce $f \in C^1(\Omega)$.
- (ii) pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je G_i funkce $g_i \in C^0(\Omega)$.

V obou případech je g_i klasickou parciální derivací $\partial f / \partial x_i$ funkce f . Speciálně distribuce s nulovou derivací jsou konstanty.

Co bývaly hříchy, jsou dnes dobré mravy.

(Seneca)

Kapitola 16

Obecné metody řešení problémů



ato kapitola se zabývá obecným pohledem na různé techniky řešení problémů.

Intelektuálové řeší problémy, géniové jim zabraňují.

(A.Einstein)

16.1 Obecně o problémech

16.1.1 Původ problémů

Jde o problémy vznikající v životě (tedy i v matematice, fyzice, technice, ekonomii, ...).

Pokud se matematická disciplína vzdaluje od myšlenek inspirovaných "realitou" a není budována s vyjímečným vkusem, stává se více a více pouhým "uměním pro umění". Největší hrozba je, že se matematika bude vyvíjet cestou nejmenšího odporu, rozdělí se na množství nedůležitých odvětví a stane se neorganizovaným souborem detailů.

(J.v.Neumann ~ 1940)



Například když hledáme všechny prostory jehož duál řádu 10^6 je homeomorfni s reálnou osou ...

16.1.2 Formulace problémů

Jedná se o rovnice, nerovnice, extrémní funkcionálů, můžeme zkoumat soustavy rovnic, mohou být zadány okrajové podmínky, můžeme hledat pouze řešení z jistého prostoru . . .



Jsou to tak různorodé problémy, že se nám z toho může až zatočit hlava ;-)

16.1.3 Základní otázky

Zajímají nás důležité otázky:

- ⇒ Má smysl řešit tuto úlohu?
- ⇒ Má smysl hledat přesné řešení?
- ⇒ Má úloha alespoň jedno řešení?
- ⇒ Kolik má úloha řešení?
- ⇒ Jaké má řešení vlastnosti?
- ⇒ Jak se mění řešení v závislosti na parametrech úlohy?

Pevně věřím, že problémy jsou jádrem matematiky, a doufám, že je budeme prosazovat stále více a více jako učitelé v učebnách, na seminářích, v knihách a článcích a že vypěstujeme z našich studentů lepší autory a řešitele problémů, než jsme my sami.

(P.R.Halmos 1980)

16.2 Obecně o metodách

Představivost je důležitější než znalosti, neboť znalosti jsou omezené, zatímco představivost obepíná vše na světě.

(A.Einstein ~ 1930)

16.2.1 Obecné a zobecněné řešení

Řešení budeme hledat tam, kde máme. Pokud to nepůjde, tak i v obecnějších prostorech. Tak budeme například hledat distributivní řešení, slabé řešení a podobně.

16.2.2 Problém zkoumáme i z praktického pohledu

Někdy můžeme zkoumat

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) .$$

Zaměňme role x a t , považujeme x za nezávisle proměnnou a t za závisle proměnnou. Pak řešíme

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}$$

pro neznámou funkci $t = t(x)$.

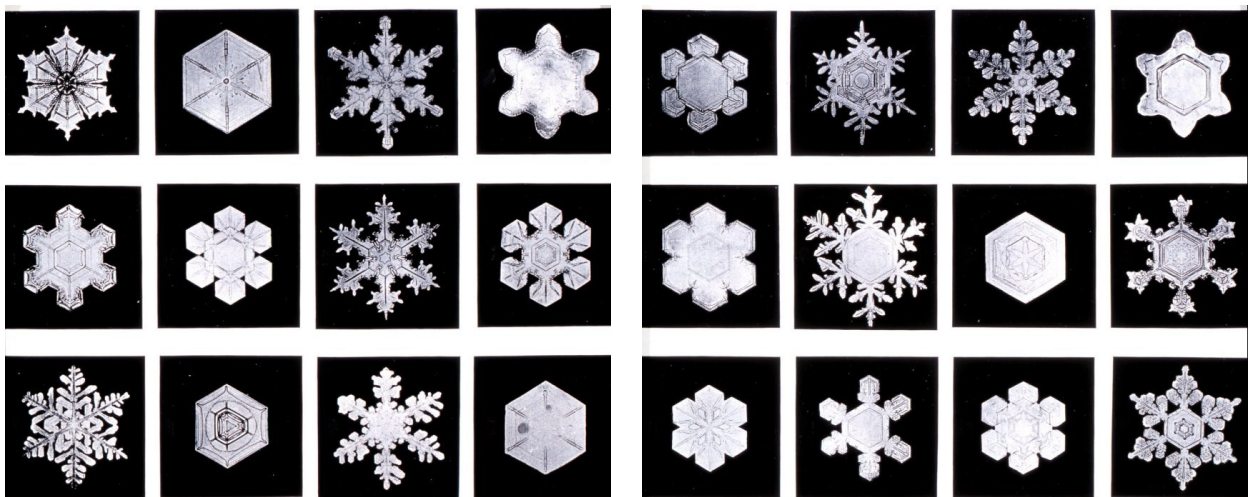


Někdy je totiž samotný řešený problém "nezávislý na volbě souřadnic". Když si lehneš, vidíš svět vzhůru nohama a je vše v pohodě.

16.2.3 Symetrie

Má-li problém nějakou symetrii, bude ji mít též řešení, popřípadě množina všech řešení.

(Curie)



Obrázek 16.2.3: Tvorba vloček probíhá v rotačně symetrickém prostředí, proto jsou tak symetrické.

16.2.4 Formalismus

Nahrazení zadané formulace formálním zápisem nám dovolí pracovat rychleji.

16.2.5 Elementární pozorování

Budeme pozorní. Například rovnice

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$$

má řešení, o němž bezpečně víme, že bude někde rostoucí, někde klesající, že budou existovat konstantní řešení ...

16.2.6 Rozložení problému na jednodušší

Místo úlohy

$$y'(x) = e^x + 1, \quad y(0) = 1$$

lze řešit dvě úlohy

$$y_1'(x) = e^x, \quad y_1(0) = 1$$

a

$$y_2'(x) = 1, \quad y_2(0) = 0$$

a hledané řešení je $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Tím jsme si díky linearitě operátoru $L : y \rightarrow y'$ mohli úlohu rozdělit na dvě jednodušší.

16.2.7 Linearita a nelinearita

Obecně lze předpokládat v mnoha aplikacích, že naše úloha zachycuje pouze základní (lineární) vazbu mezi objekty a že lze očekávat, že úloha má přesnější formulaci obsahující další (nelineární) vazby. Jde například o zanedbání tření a jiných vnějších vlivů.

Pokud například řešíme úlohu $y'(x) = y^2(x) + x$ a zajímá nás řešení v blízkosti bodu $(x, y) = (1, 3)$ můžeme studovat lineární přiblížení, tedy úlohu $y'(x) = 3^2 + x$.

16.2.8 Pokud to půjde, vyřešíme vše, co půjde ...

Řešení se snažíme najít co nejhezčí, na největším oboru a podobně.



Někdy to však "nepůjde" $x' = 1 + x^2$ vede na funkci tangens :-)

16.2.9 Substitute

V rovnici

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

pro neznámou funkci $x(t)$ a konstantu k provedeme substituci $x = e^y$, čili chceme vyjádřit rovnici v nové funkci $y(t)$. Píšeme tedy (po zderivování složené funkce)

$$e^y \frac{dy}{dt} = ke^y,$$

Tedy řešíme

$$\frac{dy}{dt} = k ,$$

což vede k řešení $y(t) = kt + C$, kde C je konstanta. Nakonec $x(t) = e^{kt+C} = ce^{kt}$ s nezápornou konstantou c .

Použili jsme zde postup, kterému se říká **substituční metoda**.



Jde o nejkouzelnější území. Zázračnou substituci musíme vymyslet sami. Hodně štěstí :-)

16.2.10 Implicitní tvar řešení

Někdy zjistíme řešení v implicitním tvaru, například $x^2 + y^2 = 1$.



Dál se tím nezabýváme. Je to jasně kulaté :-)

16.2.11 Hledání řešení v určitém tvaru

Někdy hledáme řešení v určitém tvaru. Například zkusíme dosadit obecnou mocninnou řadu ...



Uhodni (tvar) řešení a dobře se ti povede.

16.3 Metody prostorů funkcí

Použijeme kouzla teorie funkcí, uniformní konvexitu biduálu, ...

16.4 Přeformulování úlohy

Úloha s diferenciální rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) , \quad x(t_0) = x_0$$

je ekvivalentní úloze s integrální rovnicí

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau .$$



To koukám. Obě jsou lahůdky.
Nicméně ... alespoň něco.

Pokud označíme pravou stranu v předchozí rovnosti jako Ax , kde A je příslušný operátor, je rovnice přepsatelná na tvar $x = Ax$. Tedy hledáme pevný bod operátoru. Často funguje (lze dokázat konvergenci) rekurentní posloupnost $x_0, x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1, \dots, x_{n+1} = Ax_n$.

Pro rovnici $x' = x, x(0) = 1$ jsou postupné aproximace $1, 1 + x, 1 + x + x^2/2!, 1 + x + x^2/2! + x^3/3!, \dots$

(É.Picard \sim 1900, G.Peano \sim 1900)

16.4.1 Variační metody

Extrémy odpovídají nulové derivaci a naopak. To vede ke zkoumání malých odchylek funkce a pozorování diferenčního podílu. Těmto odchylkám se říká **variaci**.



Totálně omezený řešitel variační úlohy: Nechť je N největší přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že $N^2 \geq N$ a N je největší přirozené číslo, platí $N^2 = N$ a tedy $N = 1$.

16.4.2 Pravděpodobnostní a statistické metody

Použijeme kouzla z teorie pravděpodobnosti a statistiky. Modelujeme procesy a zkoumáme jejich chování.



Například zjistíme, že s pravděpodobností 1 má úloha řešení.

16.4.3 Topologické metody

Použijeme topologických kouzel. Použijeme kompaktnost, konvexitu, projekce, ...
Například najdeme řešení problému jako pevný bod jistého zobrazení.

16.4.4 Numerické metody

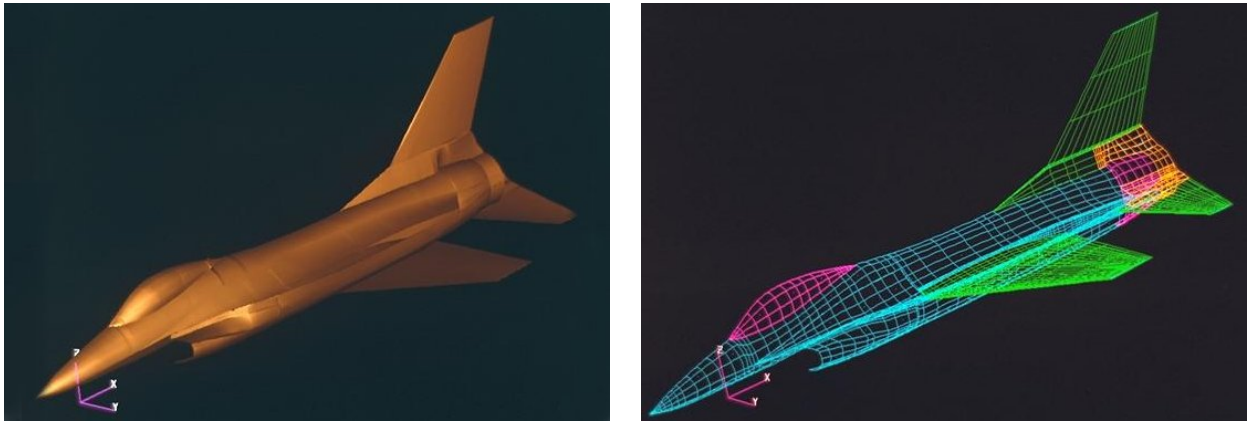
Budeme hledat řešení pomocí aproximací. Stejně skoro všechny úlohy vedou na pracné výpočty a přesné řešení nikdy nezískáme. Nabízí se řada možných aproximací.

Například při hledání minima funkcionálu F na množině $W^{1,2}(\Omega)$ rozdělíme množinu Ω na n jednoduchých množin, například trojúhelníků. Prvek tohoto dělení budeme nazývat **konečný prvek**. Metoda konečných prvků spočívá v nahrazení $W^{1,2}(\Omega)$ prostorem X_n funkcí, které jsou hladké na jednotlivých konečných prvcích.

V prostoru X_n najdeme prvek u_n tak, aby

$$F(u_n) = \inf_{u \in X_n} F(u) .$$

Pak zkoumáme, kdy má posloupnost $\{u_n\}$ limitu (a jakou).



Obrázek 16.4.4: Použití metody konečných prvků (konečné sítě bodů vedou na diskrétní problém).

Počítání takzvaných "crash testů" pomocí metody konečných prvků je velmi užitečné a opravdu se dělá.



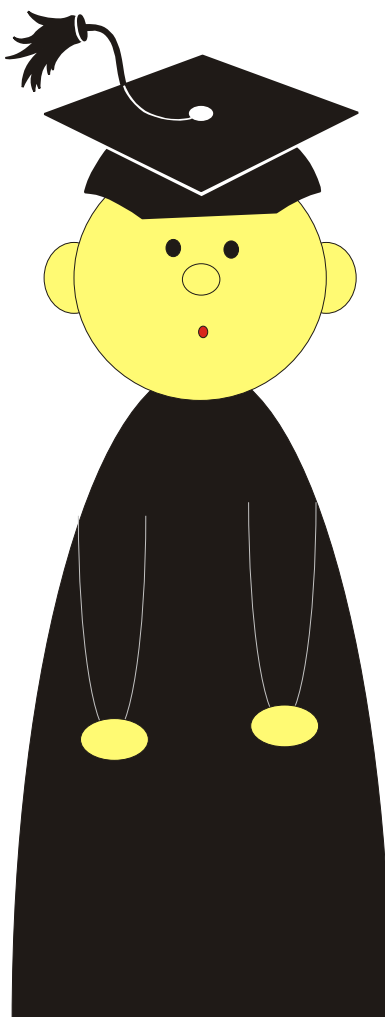
Obrázek 16.4.4: Škoda na autě - počítání crash-testů zachraňuje životy.

Kapitola 17

Problémy pro bakaláře



o nejkrásnější na matematice je řešení problémů.



Obrázek 17.0.0: Bakalář je takový malý človíček.

Matematika je místo, kde "Problém"
není špatná věc.

(Griffith 2000)

17.1 Pokladnice kouzel

17.1.1 Příklad (Vysoká stavba)

Králíci se potřebují dostat přes řeku. Na břehu jsou na sobě postaveny cihly (tvoří vysoký komín s podstavou jedné cihly). Šikovní králík do každé z nich trochu strčil, vylezl nahoru a spustil se po provaze na druhou stranu řeky. Je to možné ? ANO.

Studentům chybí ocenění důležitosti a
bohatosti matematiky.

(Griffith 2000)

Důkaz: Nejvyšší cihla se posune o $1/3$, pak se dalších 1000 cihel nechá bez posunu, až "horních" 1001 cihel má těžiště "téměř uprostřed 1001-ní cihly odshora. Pak cihlu 1002-hou posuneme o $1/3$. Nyní necháme milion cihel bez posunu ...

Duší vtípu je stručnost.

(W.Shakespeare ~ 1590)

Nasbíráme-li dost "třetin", dostaneme se kamkoliv. ■

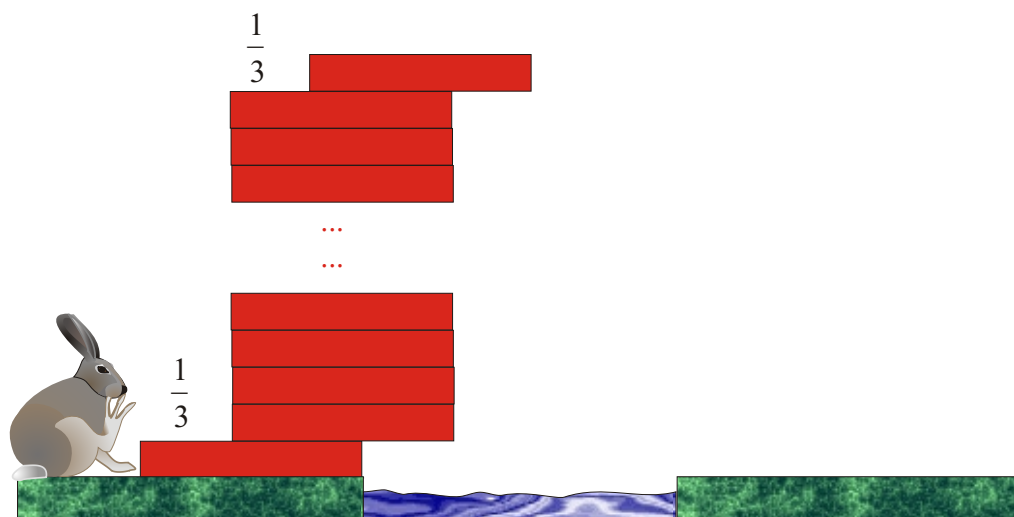
17.2 Příklad (Pomalý šnek)

Představme si pomalého šneka, který leze po rychle rostoucí houbě. Doleze na vršek?

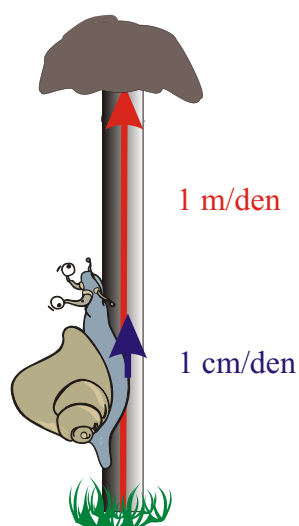
Důkaz: Jestli houba roste 100 krát rychleji než šnek leze, tak první den šnek popoleze o jednu setinu výšky houby. Druhý den o jednu dvousetinu a tak dál. Celkem takto sbírá části odpovídající harmonické řadě, která diverguje. Když součet těchto částí překročí jedničku, dosáhne na vršek houby. ■

Praxe je nejlepší učitelka.

(Cicero)



Obrázek 17.1.1: Králík staví komín.



Obrázek 17.2.0: Houba rovnoměrně roste do výšky. Doleze šnek na vršek?

17.3 Od kdy do kdy a co za to

17.3.1 Exponenciální banka

Banka vyhlásila, že bude poskytovat 100 % roční úrok. Pokud vložíš do banky jednu zlatku, dostaneš za rok dvě zlatky. Ženuška hned rozhodla, že pošle svého mužička do banky po půl roce, nechá jej vyzvednout jeden a půl zlatku a hned ji tam zase na půl roku vloží. Tak místo dvou zlatek dostane

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 .$$

Pak jí napadlo, že by tam mohl mužiček jít ještě častěji ... Nakonec tam stál mužiček od rána do večera, vkládal a vybíral a bankéř rozhodl, že s tím něco udělá.

Řekl si, že označí $x(t)$ stav mužičkových peněz v čase t , přičemž $x(0) = 1$ zlatka. Pak si uvědomil, že se vlastně peníze průběžně samy množí a že čím je jich víc, tím víc jich přibývá. Tak si napsal rovnici

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t),$$

čímž zachytil přírůstek peněz $dx(t)$ za čas dt .

Diferenciální rovnice jsou srdcem matematické analýzy, aplikace jsou krví.
(G.F.Simmons 1972)

Tato rovnice dává řešení $x(t) = e^t$, tedy dal po roce mužičkovi (ženušce) místo dvou zlatek neuvěřitelných e zlatek.

Nelze se ubránit pocitu, že matematické vzorečky existují nezávisle na nás a že jsou chytřejší než my
(H.Hertz)

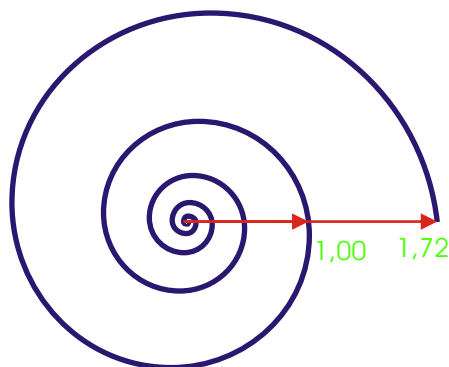
Tak ženuška dosáhla, že banka místo 100% dávala pěkných 172%.



Taková ženuška se prostě nedá vyvážit zlatem ...



Obrázek 17.3.1: Mušle.



Obrázek 17.3.1: Spirála odpovídá spojitému úročení.

Závislosti, při které změna jisté veličiny odpovídá množství této veličiny, se říká **zákon exponenciálního růstu**. Podle něj se množí bakterie, rozkládají se radioaktivní látky ...

17.3.2 Zjišťování stáří fosílií

V atmosféře se vlivem kosmického záření vytváří radioaktivní izotop uhlíku C^{14} . Tento izotop je nestálý a rozpadá se s poločasem rozpadu 5568 ± 30 roků. Tak se v atmosféře vytváří i rozpadá a ustálila se jeho rovnováha. Podobně se C^{14} rozpadá v žijícím organismu a je neustále doplňován z prostředí. Takto je v žijícím organismu jeho množství na jisté rovnovážné hladině. Pokud organismus nežije, nastává proces poklesu hladiny C^{14} , protože není doplňován.

Rovnice popisující množství C^{14} v čase t vypadá

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) ,$$

kde k je záporná konstanta. Řešení $x(t) = x(0)e^{kt}$ použijeme pro zjištění stáří fosílií. Známe-li množství C^{14} ve fosílii nyní a umíme-li odhadnout množství C^{14} v čase $t = 0$, zjistíme dobu, po kterou probíhalo odbourávání C^{14} v organismu. Například $x(5568) = x(0)/2$, tak určíme konstantu k (souvisí s "poločasem rozpadu").

Takto se například zjistila doba, kdy lidstvo osídlilo Ameriku, kdy se stavěl Stonehenge (3798 ± 275)



Obrázek 17.3.2: Stonehenge.

a kdy vzniklo Velké kráterové jezero v Oregonu (6453 ± 250).

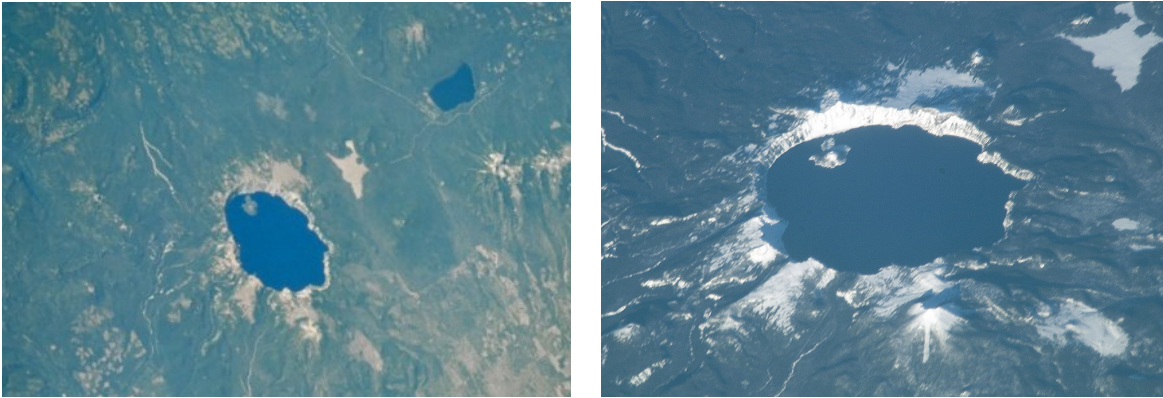
17.3.3 Metoda řešení

V rovnici

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

pro neznámou funkci $x(t)$ a konstantu k provedeme trikové násobení výrazem e^{-kt} . Ten je zvolen tak, aby levá strana rovnice byla derivací nějaké funkce. Dostaneme tedy

$$\frac{d}{dx} (xe^{-kt}) = 0 .$$



Obrázek 17.3.2: Velké kráterové jezero.

To znamená, že je jistá funkce konstantní. Platí tedy

$$xe^{-kt} = c$$

pro jistou konstantu c . Pak $x(t) = ce^{kt}$ s konstantou c .

Obecně můžeme dostat vztah $F(t, x(t)) = c$, který nazveme **řešení v implicitním tvaru**.

Použili jsme zde postup, kterému se říká **metoda integračního faktoru**.



Jaký integrační faktor (to je to, čím násobíme) použít ve které situaci, může být pěkné dobrodružství. Někdy může být integrační faktor roven 1 ;-)

17.4 Existence a jednoznačnost

17.4.1 Existence řešení

Řešíme rovnici

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 .$$

Budeme hledat řešení pomocí aproximace. Vycházíme z bodu (t_0, x_0) a sestrojíme z tohoto bodu úsečku ve směru hledaného řešení, tedy se směrnici $f(t_0, x_0)$. Její druhý koncový bod nazveme (t_1, x_1) a pokračujeme ve směru $f(t_1, x_1)$. Takto najdeme jakýsi polygon jako hrubý tvar řešení.

(L.Euler ~ 1740)

Je-li funkce f spojitá, omezená a sublineární vzhledem k proměnné x na obdélníku R , konvergují takovéto polygony k řešení.

(É.Picard 1893)

17.4.2 Asymptotická stabilita

Řešení u rovnice $Ty = f$ nazveme **asymptoticky stabilní řešení**, pokud pro každé řešení v platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0 .$$

Řešení se mohou blížit k stabilnímu sedlu, mohou tvořit sedlo, spirálu.

17.4.3 Distributivní řešení

Pro $L = \frac{d}{dt} + a$, $a > 0$, fundamentální řešení rovnice

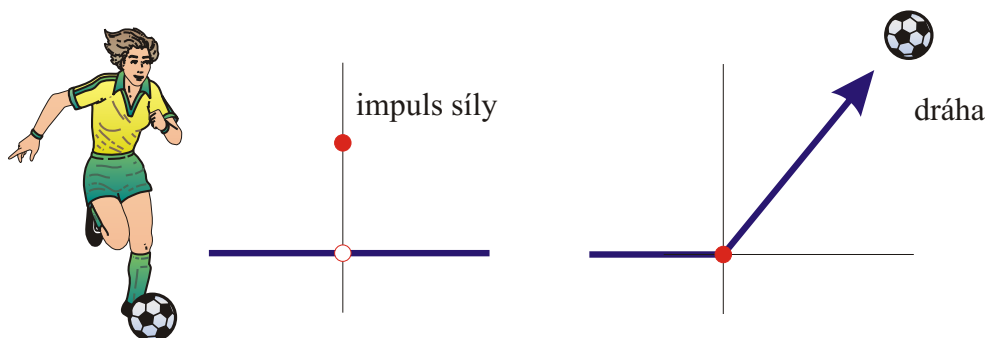
$$L\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt} + a\varepsilon = \delta(t)$$

je rovno

$$\varepsilon(t) = h(t)e^{-at} .$$

Let do Abstraktna musí začínat a končit v Konkrétnu.

(R.Courant)



Obrázek 17.4.3: Distributivní řešení nemusí mít všude derivaci, vstupy nemusí být spojitě.



Distributivní řešení je dobrý kompromis. Když nakopneš míč, tak vyletí danou rychlostí a nikoho příliš nezajímá okamžik výkopu.

17.5 Ono se to srovná

17.5.1 Kam dopluge loď

Po západu slunce přestali námořníci veslovat. Je bržděna pouze třením, nefouká vítr. Za 10 sekund doplula 30 metrů, za dalších 10 sekund doplula ještě 15 metrů. Kde se zastaví?



Obrázek 17.5.1: Loď pluje na Krétu. Na jakou rychlost musí rozjet loď, aby poslední míli na Krétu dojeli bez veslování?

Označíme si m hmotnost lodi s nákladem, $v(t)$ její rychlost v čase t a nechť kladná konstanta k je odpovídá tření, které pro malé rychlosti (snad) závisí lineárně na rychlosti. Pak

$$ma(t) = m \frac{dv}{dt} = -kv$$

vyjadřuje, že třecí síla působí na těleso a brzdí jej ($a(t)$ je zrychlení a záporné znaménko vypovídá o směru síly proti pohybu). Tedy

$$\frac{dv}{dt} = -mkv$$

má řešení $v(t) = v(0)e^{-mkt}$. Vzhledem k tomu, že je rychlost $v(t)$ derivací dráhy $s(t)$, tedy $ds/dt = v$, můžeme integrováním rychlosti získat dráhu

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{v(0)}{mk}(1 - e^{-mkt}) .$$

Vidíme, že

$$s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{v(0)}{mk} .$$

Víme, že $s(10) = 30$ a $s(20) = 45$. S těmito informacemi vytlačíme ze vzorečku pro $s(\infty)$ nežádoucí konstanty a dostaneme

$$s(\infty) = \frac{30^2}{60 - 45} = 60 ,$$

tedy loď dopluje ještě 15 metrů, celkem bez pohonu 60 metrů.

Nedovedu to udělat bez počítačů.
(W.Shakespeare ~ 1590)

17.5.2 Metoda variace konstant

Řešíme obecně rovnicí

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) + f(t)$$

pro neznámou funkci $x(t)$, konstantu k a funkci $f(t)$. K tomu použijeme řešení rovnice

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)$$

ve tvaru $x(t) = ce^{kt}$ s konstantou c . Nyní zkusíme do původní rovnice dosadit $x(t) = c(t)e^{kt}$, kde považujeme nyní $c(t)$ jako drobnou "variaci" konstanty c . Po dosazení dostaneme rovnici pro funkci $c(t)$ ve tvaru

$$\frac{dc(t)}{dt} = e^{-kt} f(t) .$$

Zintegrováním dostaneme $c(t)$ a následně máme $x(t) = c(t)e^{kt}$.

Použili jsme zde postup, kterému se říká **metoda variace konstant**.



Prostě a jednoduše – hádáme tvar řešení. Je to jako malá kapesní krádež z kapsy Osudu.

17.5.3 Populační exploze

Růst populace P závisí na přímo její velikosti. Na druhé straně je zpomalován problémy s dostatkem potravin. Pokud je maximální velikost populace rovna M , pak faktor $M - P$ brzdí přirozený růst populace. Řešíme tedy úlohu

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P) , P(0) = P_0 .$$

(P.Verhulst 1845)

Této rovnici se říká **logistická rovnice**. Rozkladem na parciální zlomky nebo substitucí $p = 1/P$ dostaneme řešení

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{M} + \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M} \right) e^{-kMt}$$

a populace se bude blížit M .

17.5.4 Společenská mobilita

Označme $s(t)$ množství lidí ochotných se přestěhovat za prací. Do hry vstupuje jejich motivace M , dovednosti D a odpor ke změně R . Rovnice může mít tvar

$$\frac{ds}{dt} = M \cdot D - R \cdot s(t) .$$

17.5.5 Chemická reakce

Chemická reakce $A + B \rightarrow C$ probíhá s rychlostí závislou na součinu koncentrací látek A a B . Označme koncentrace $a = [A]$ mol/litr, $b = [B]$ mol/litr. Pak pro $x = [C]$ platí

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x).$$

17.5.6 Znečištění jezera

Do jezera o objemu V obsahujícího škodlivé látky přitéká ročně $V/10$ čisté vody a odtéká $V/10$ průměrně (z pohledu jezera) znečištěné vody. Kdy poklesne množství škodlivých látek v jezeře na polovinu?

17.6 Když se dva perou ...

17.6.1 Jak neprohrát válku

Do boje jdou dvě armády (například mikroorganismů). Jejich počty v čase t označíme $x(t)$ a $y(t)$. Úbytek jedné armády je přímo úměrný velikosti druhé. Tady platí vztahy

$$\frac{dx}{dt} = -ky, \quad \frac{dy}{dt} = -kx$$

s vhodnou konstantou k (předpokládáme stejně šikovné armády). Vynásobíme první rovnici x a druhou rovnici y a odečteme:

$$x \frac{dx}{dt} - y \frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{čili} \quad \frac{d(x^2 - y^2)}{dt} = 0.$$

Vidíme tedy řešení $x^2 - y^2 = c$ pro vhodnou konstantu c . Tedy pokud byly armády veliké x_0 a y_0 , platí na konci války v čase T rovnost

$$x_0^2 - y_0^2 = x(T)^2 - y(T)^2 = x(T)^2,$$

tedy zbyde armáda x o velikosti

$$x(T) = \sqrt{x_0^2 - y_0^2}.$$

Pokud silná armáda z bojuje postupně se dvěma armádami x a y , zůstane

$$z(T) = \sqrt{z_0^2 - x_0^2 - y_0^2}.$$

(Lanchester 1916)

17.6.2 Odzbrojování

Uvažujme dva státy a jejich armády x a y . Pokud označíme A, B jejich vzájemnou nedůvěru, C, D ceny zbraní a E, F společenskou poptávku po zbrojení, lze zkoumat soustavu

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ay(t) - Cx(t) + E \\ \frac{dy(t)}{dt} &= Bx(t) - Dy(t) + F. \end{aligned}$$



Obrázek 17.6.1: V roce 1805 v bitvě u Trafalgaru admirál Nelson rozdělil loďstvo silnějšího protivníka na dvě poloviny a bojoval nejprve s jednou a pak s druhou polovinou. Vyhrál. Mohl to udělat lépe?



Je proces odzbrojování stabilní?

17.6.3 Boj s neštovicemi

Budeme se zabývat neštovicemi, což je vysoce nakažlivá nemoc. Pokud jí však někdo nepodlehne, získá natrvalo imunitu proti dalšímu nakažení.

Uvažujeme pouze populaci narozenou v čase $t = 0$ a její další vývoj. Označme $x(t)$ populaci v čase t a $y(t)$ tu část populace, která ještě neměla nemoc. Z důvodu nakažení se y zmenšuje rychlostí ay , kde a je koeficient nakažení, celková populace x se z důvodu nemoci zmenšuje rychlostí aby , kde b je koeficient úmrtnosti na nemoc. Z důvodů nesouvisejících s nemocí se x i y zmenšují s rychlostí $d(t)$ závisící na čase t (roky). Rovnice popisující tyto závislosti vypadají

$$\frac{dx}{dt} = -aby - d(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = -ay - d(t)y.$$

První rovnici vynásobíme y a druhou x a odečteme. Pak

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -aby^2 + axy.$$

Vynásobíme integračním faktorem $1/y^2$ a dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{y} \right) = -ab + a \frac{x}{y}.$$

Tedy pro poměr $z = x/y$ dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = -ab + az, \quad z(0) = 1$$

s řešením $z(t) = b + (1 - b)e^{at}$.

Čili pro odhad konstant $a = b = 1/8$ dostaneme hodnotu $z(20)$ přibližně rovnu 11. Tedy pouze asi 9% dvacetiletých ještě neprodělalo nemoc.

(Daniel Bernoulli 1760)



A pak Bernoulli navrhl očkování. Tím se prodlouží doba života o tři roky. . . .

17.6.4 Nákaza HIV

Uvažujeme základní model nákazy virem HIV, při kterém se viry HIV napadají buňky CD4+T, taková napadená buňka vytvoří kopie viru HIV a zanikne. V systému jsou ještě protilátky, které ničí viry HIV, nicméně jejich účinnost slábně.

Dále přistupují další okolnosti. Virus HIV dokáže mutovat, léky mohou zasáhnout do fungování celého systému.

Při modelování zkoumáme průběh infekce v čase. Počet $V(t)$ kopií viru HIV, počet $B(t)$ nenapadených buněk, počet $N(t)$ napadených buněk, množství $P(t)$ protilátek, množství léků $L(t)$, . . . zkoumáme pomocí soustavy diferenciálních rovnic.

Porovnáním modelu a reality vidíme, že je výhodné kombinovat několik typů léků.

17.6.5 Společenské problémy

Podobně jako nákaza se šíří drby. Množství "informovaných" $x(t)$ v čase t vyhovuje rovnici

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(M - x(t)) .$$

17.6.6 O soustavách

Soustava

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots &= \dots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

je šikovný zápis mnoha problémů.

Aktivisti = objevují metody k řešení vědeckých problémů

Pasivisti = analyzují myšlenky a nástroje aktivistů

(G.F.Simmons 1972)

Na tento zápis se dá převést problém

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

obsahující pouze jednu neznámou funkci pomocí převodního vztahu

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)},$$

který vede k zápisu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ \dots &= \dots \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že periodické řešení diferenciální rovnice vede na uzavřenou trajektorii soustavy. Pokud jsou pravé strany lineárními funkcemi

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots &= \dots \\ x_n' &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n, \end{aligned}$$

lze (často úspěšně) hledat řešení ve tvaru

$$(c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t}, \dots, c_n e^{\lambda t}).$$

17.6.7 Fundamentální systém řešení

Řešíme rovnici $Ty = 0$ bez počátečních podmínek. Někdy jsou nalezená řešení lineárně nezávislá a tvoří bázi lineárního prostoru všech řešení rovnice $Ty = 0$.

Lineární nezávislost řešení rovnice $Ty = 0$ pro diferenciální operátor

$$T : y \mapsto p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

se lehce zjistí pomocí následujícího kritéria.

Determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

je nulový pro řešení y_1, \dots, y_n rovnice $Ty = 0$ na intervalu právě když jsou daná řešení lineárně závislá.

(Wronski)

Pokud máme lineárně nezávislá řešení y_1, \dots, y_n rovnice $Ty = 0$, můžeme hledat partikulární řešení rovnice $Ty = f$ variací parametrů ve tvaru

$$c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) .$$

Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= 6x \end{aligned}$$

lze převést jednu rovnici formálním výpočtem

$$(D-1)x = y \ \& \ Dy = 6x \implies D(D-1)x = x = Dy = 6x \implies (D^2 - D - 6)x = 0 .$$



Tak se dovedeme zbavit "libovolné" soustavy.

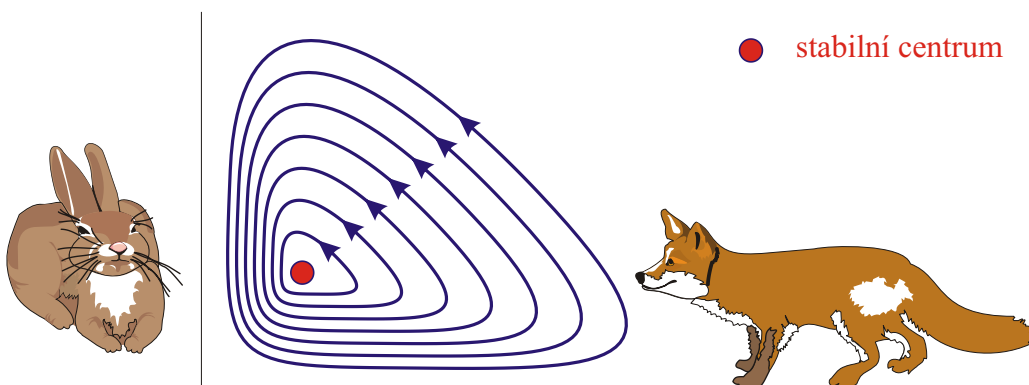
17.6.8 Dravec a kořist

Uvažujeme soustavu rovnic popisující soupeření dvou populací x a y

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -kx + bxy = x(-k + by) \\ \frac{dy}{dt} &= my - cxy = y(m - cx) . \end{aligned}$$

(Lotka, Voltera)

Stacionární řešení je $(m/c, k/b)$ je stabilní centrum.



Obrázek 17.6.8: Systém se periodicky mění ...



Obrázek 17.6.8: Jak vzpomínají žraloci na světovou válku?

Když se k soustavě dravec-kořist přidá vnější vliv, například rybolov v moři, projeví se to na pravé straně členy $-\varepsilon x$, $-\varepsilon y$. Tím v podstatě modifikujeme konstanty k a m . Posune se tím hodnota stabilního řešení ve prospěch jedné (čí?) strany.

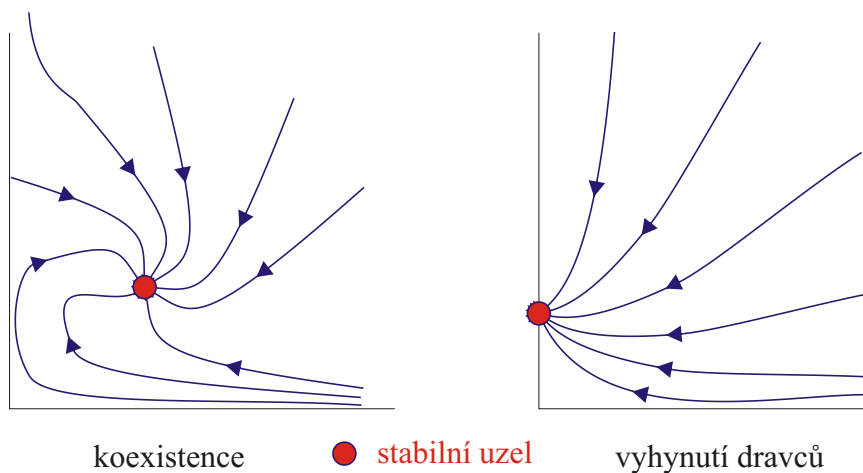
Přidáme-li samoomezující člen do rovnice dravec-kořist, dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kx - ax^2 + bxy = x(-k - ax + by) \\ \frac{dy}{dt} &= my - cxy - dy^2 = y(m - cx - dy),\end{aligned}$$

dostaneme stabilní řešení

$$x_0 = \frac{bm - dk}{ad - bc}, \quad y_0 = \frac{am + ck}{ad + bc}.$$

Pak y_0 je vždy kladné, ale x_0 může být nula. To vede k vyhynutí dravců.



Obrázek 17.6.8: Dravci se musejí krotit ...



Ach ta biodiverzita ...

17.6.9 O fázové rovině

Budeme řešit obecně nelineární úlohy, kde

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) .\end{aligned}$$

Pravá strana určuje, jak se při daném stavu $x(t)$ a $y(t)$ bude měnit funkce x a y . Pokud jednu rovnici vydělíme druhou, dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} , \quad \text{nebo} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} .$$

Tedy ve fázové rovině (x, y) mají trajektorie v každém bodě jasně definovanou směrnici, čímž se otevírá názorná možnost, jak se o řešení hodně dozvědět pomocí trajektorií.

Bez újmy na zajímavosti se budeme zabývat soustavou

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) .\end{aligned}$$

Nulovým bodům (body (x_0, y_0) , pro které se pravé strany nulují) odpovídá konstantní řešení. Jinak uvažujeme **trajektorie** $t \mapsto (x(t), y(t))$, což jsou křivky popisující pozici řešení v čase t ve fázové rovině xy .

17.6.10 Soupeřivé populace

Uvažujeme soustavu rovnic popisující soupeření dvou populací x a y

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx - ax^2 - bxy = x(k - ax - by) , \\ \frac{dy}{dt} &= my - dy^2 - dxy = y(m - cx - dy) .\end{aligned}$$

Člen xy v rovnicích odpovídá vzájemné interakci obou populací. Vynulováním jednotlivých činitelů zjistíme stacionární body soustavy.

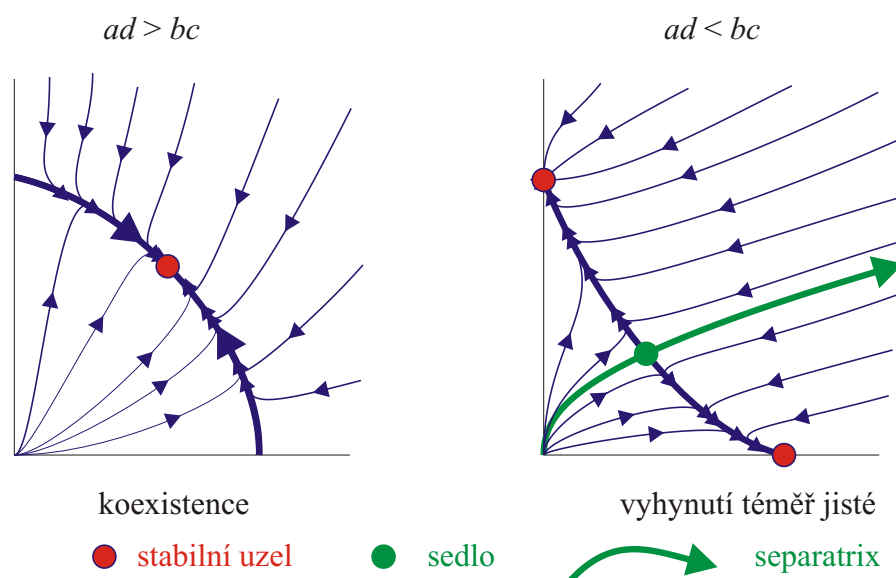
Pro určité parametry existuje stabilní uzel dovolující přežití obou populací, jindy jediné stabilní řešení vede k zániku jedné populace. Křivku oddělující oblasti vedoucí k vyhynutí jedné populace budeme nazývat **separatrix**.

17.6.11 O kritických bodech soustav

Uzavřená trajektorie soustavy

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}$$

ohraničuje vždy alespoň jeden kritický bod systému.



Obrázek 17.6.10: Někdy vyhynou jedni, jindy ti druzí ...

(H.J.Poincaré ~ 1910)

Je-li všude $\partial F/\partial x + \partial G/\partial y > 0$, pak neexistují uzavřené trajektorie.

(I.O. Bendixson ~ 1900)

Jestliže se trajektorie pohybuje a zůstává v uzavřené oblasti fázové roviny (například v uzavřeném mezikruží) bez kritických bodů, pak je to uzavřená trajektorie nebo spirála aproximující uzavřenou trajektorii.

(H.J.Poincaré ~ 1910 a I.O.Bendixson ~ 1900)

Příkladem je nelineární soustava rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= k(1-x^2)y - x. \end{aligned}$$

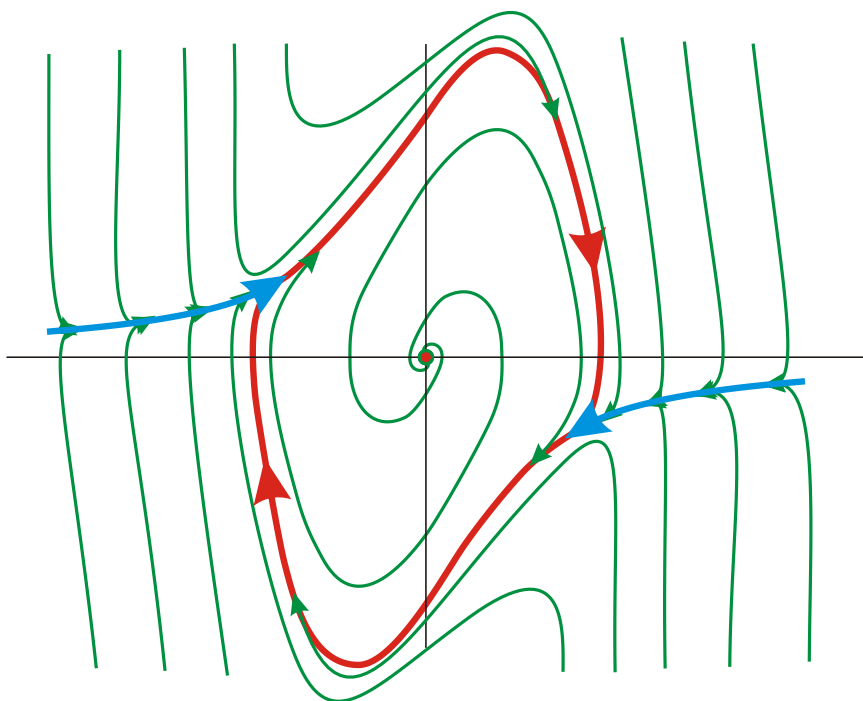
popisující nelineární oscilátor. Tato soustava má periodické řešení.

(van der Pol 1924)

Podobný charakter mají procesy v lidském těle. Tvorba některých látek se spouští až při indikaci jejich nedostatku. Tak v těle hladiny těchto látek periodicky kolísají.



Zásobu dříví na zimu si děláte až když minulá zásoba dochází.



Obrázek 17.6.11: Nelineární soustava může mít periodické řešení.

17.6.12 Maticový zápis a řešení

Soustavu

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1 \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2\end{aligned}$$

lze psát maticovým a vektorovým zápisem

$$X' = AX + F$$

nebo též ve tvaru $TX = F$, kde $TX = X' - AX$.



A je možné si hrát s maticemi.

Soustava

$$X' = AX, \quad X(0) = I,$$

kde I je jednotková matice, má řešení

$$X(t) = e^{At},$$

kde používáme operátorový počet $A \mapsto e^A$ (popřípadě definujeme e^A pomocí konvergentní řady $I + A/1! + A^2/2! + \dots$).

17.7 Jak ušetřit ...

17.7.1 Nejkratší cesta

Nejkratší křivka spojující dva body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) v rovině zkoumaná jako funkce $y = y(x)$ vede na minimalizaci integrálu

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx .$$

17.7.2 Variační metoda

Chceme najít funkci $y = y(x)$, která minimalizuje integrál

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx .$$

Uvažujeme nyní funkci $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$, kde η chápeme jako odchylku od funkce y . Jde o funkci dvakrát spojitě diferencovatelnou a nulující se v bodech x_1 a x_2 . Zkoumáme nyní funkci

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx .$$

Pokud integrál I nabývá minimum pro funkci y , očekáváme, že funkce $I(\alpha)$ bude mít nulovou derivaci v α .

Nerovnost je příčina všech lokálních pohybů.

(L.da Vinci ~ 1490)

Jedná se o slabou derivaci funkcionálu $y \mapsto I$.

Vyjádríme (derivujeme za integračním znaméním)

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx$$

a položíme rovno nule. Dostaneme

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0$$

a pomocí integrace po částech dostaneme

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0 .$$

Pokud se integrál nuluje pro každou uvažovanou η , musí být

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 .$$

Vyjádríme to lépe

$$f_{y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} + f_{y'y} \frac{dy}{dx} + (f_{y'x} - f_y) = 0 ,$$

kde indexy odpovídají parciálním derivacím. Této diferenciální rovnici druhého řádu budeme říkat **variační rovnice**.

(L.Euler ~ 1740)

Chceme najít dvě funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$, které minimalizují integrál

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z') dx .$$

Dostaneme podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0 .$$

17.7.3 Půjdeme rovnou za nosem ...

V našem případě se variační rovnice redukuje na

$$\frac{1}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 ,$$

proto jejím řešením jsou pouze lineární funkce.

17.7.4 Vázané extrémy

Hledáme extrém

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

vzhledem k podmínce

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = L .$$

Jde o kombinaci vázaných extrémů a metody variační. Její kritické body určíme řešením variační rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 ,$$

kde $F = f + \lambda g$. Při řešení máme dvě integrační konstanty a multiplikátor λ . Tyto tři veličiny zjistíme po dosazení okrajových hodnot pro funkci y a použitím vazbové podmínky.

17.7.5 Jak postavit plot

Hledáme křivku délky L spojující body $(0, 0)$ a $(1, 0)$, která leží nad osou x a ohraničuje maximální plochu mezi osou x a grafem funkce y . Čili maximalizujeme

$$\int_0^1 y(x) dx$$

vzhledem k podmínce

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = L .$$

Jedná se o vázaný extrém. Kombinací metody vázaných extrémů a metodu variační rovnice dostaneme rovnici

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) - 1 = 0 .$$

Po dvojitým integrováním dostaneme

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 .$$

Jedná se o kruhové oblouky kruhu o poloměru λ .

Pokud je L delší než příslušná polokružnice, zkusíme hledat křivku $t \mapsto (x(t), y(t))$ a maximalizovat

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - x'y) dt$$

vzhledem k podmínce

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = L .$$

Zase dostaneme oblouk kružnice o poloměru λ .

Pro kružnici platí

$$\pi r^2 = \frac{(2\pi r)^2}{4} .$$

Obecně jde vyslovit vztah

$$\text{plocha} \leq \frac{(\text{obvod})^2}{4\pi} .$$

Tomuto vztahu se říká **izoperimetrická nerovnice**.



Mám rád zakulacené tvary ;-)

17.7.6 Problém minimální plochy

Chceme najít funkci $z = z(x, y)$ na podmnožině R v rovině, která minimalizuje integrál

$$I(z) = \int f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy .$$

Rovnice pro extrémální plochu zní

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z_y} \right) = 0 .$$

Problém minimální plochy vede na minimalizaci

$$\int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

pro funkci $z = z(x, y)$ nabývajících předepsaných hodnot na okraji zkoumané oblasti. Variční rovnice lze přepsat ve tvaru

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) .$$

(L.Euler ~ 1740, J.L.Lagrange ~ 1770, T.Radó, J.Douglas, J.Plateau)



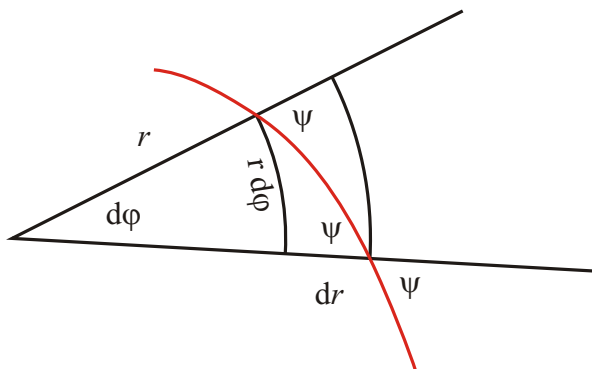
Její řešení jsou krásné plochy s nulovou střední křivostí, všechny body jsou sedlové, plochy odpovídají mýdlovým bublinám.

Pro každou nekonvexní rovinnou oblast lze sestavit okrajovou podmínku φ tak, že příslušný problém minimální plochy nemá klasické řešení.

17.8 Kudy kam ...

17.8.1 Jak si postavit ulitu

Nechť spirála popisující řez šnečí ulitou protíná spojnicí s počátkem pod konstantním úhlem ψ .



Obrázek 17.8.1: Detail spirály.

Pak z obrázku vidíme, že

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \, d\varphi}{dr},$$

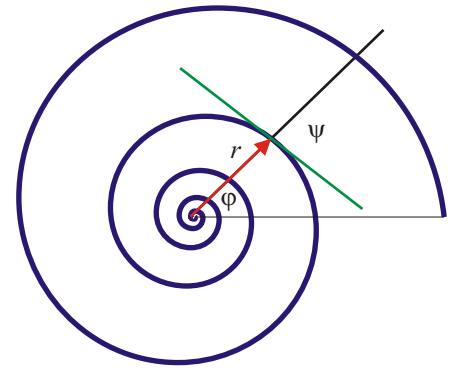
tedy máme rovnici $dr/d\varphi = r/\psi$ a její řešení $r = ce^{\varphi/\operatorname{tg} \psi}$ popisuje křivku, která se nazývá **logaritmická spirála**.

Vědec nestuduje přírodu proto, že je užitečná; studuje ji proto, že mu to činí potěšení. Pokud by příroda nebyla krásná, nestála by za poznání, a kdyby nestála za poznání, život by nestál za žití.

(H.J.Poincaré ~ 1910)



Obrázek 17.8.1: Skutečná mušle má několik do sebe zamotaných spirál.



Obrázek 17.8.1: Spirála.

Logaritmickou spirálu použijeme též při znázornění růstu úroků v bance.



Na šnekovi zde vidíme zákon exponenciálního růstu ;-)

17.8.2 Ortogonální trajektorie

Pokud daná křivka vyhovuje v bodě vztahu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

vyhovuje v tomtéž bodě křivka k ní kolmá vztahu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)},$$

což vidíme z obrázku.

Vezmeme systém křivek $x^2 + y^2 = cx$ vyhovujících diferenciální rovnici

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

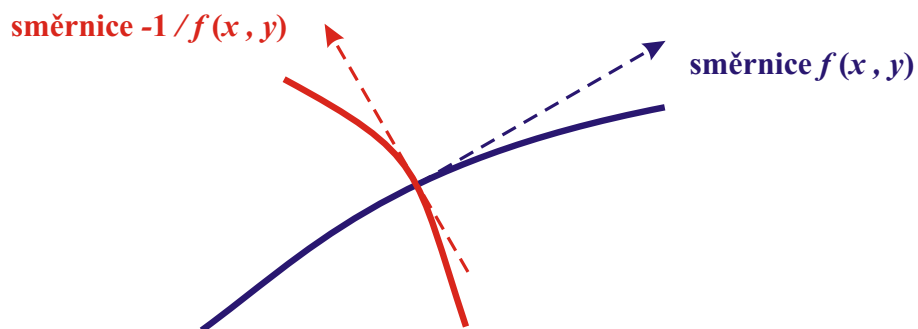
a k nim kolmé křivky vyhovující vztahu

$$-2xy \frac{dx}{dy} = y^2 - x^2,$$

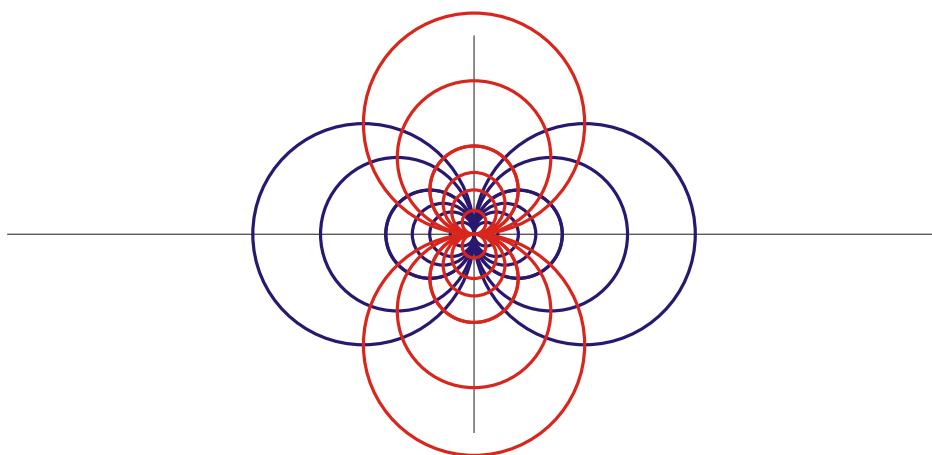
budou to křivky ze systému $x^2 + y^2 = cy$.

17.8.3 Řetězovka

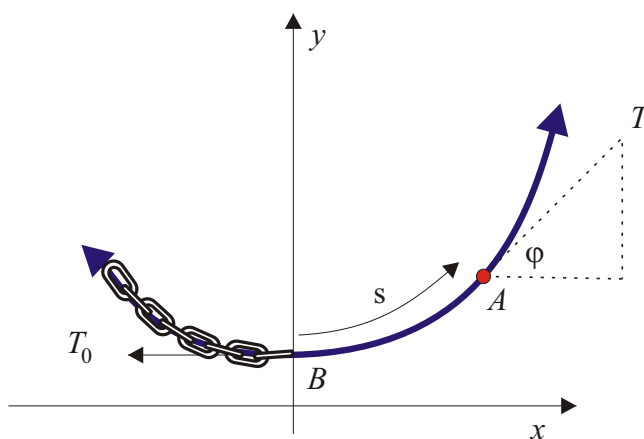
Uvažujme na visícím řetězu obecný bod $A = (x, y)$ a nejnižší bod $B = (0, 0)$. Nechť má v bodě A křivka $y(x)$ směrnici φ . Pak vodorovná složka síly T v bodě A je rovna vodorovné síle T_0 v bodě B .



Obrázek 17.8.2: Kolmé křivky a jejich směrnice.



Obrázek 17.8.2: Křivky a křivky k nim kolmé.



Obrázek 17.8.3: Řetězovka.

Pak

$$T_0 y' = T_0 \operatorname{tg} \varphi = T \sin \varphi = \int_0^s 1 \, ds = s .$$

Zderivujeme ještě jednou a dostaneme

$$T_0 y'' = \sqrt{1 + (y')^2} .$$

Substitujeme $y' = p$ a vyjádříme

$$p(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) .$$

Pak

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

je křivka nazývaná **řetězovka**.

17.8.4 Problém lana

Máme najít tvar dokonale ohebného, neroztažitelného homogenního lana délky l , zavěšeného v bodech A a B . V rovnovážném stavu zaujme těžiště nejnižší polohu. Proto hledáme minimum statického momentu vzhledem k ose x . Budeme minimalizovat

$$\int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

vzhledem k podmínce

$$\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l .$$

Variační rovnice vede opět na řetězovku.

17.8.5 Rotační plocha



Obrázek 17.8.5: Pokud chceme na hrnčířském kruhu vytočit hrnek, který půjde co nejlépe pozlatit, musíme se snažit o minimální rotační plochu.

Nejmenší rotační plochou je funkce minimalizující

$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx .$$

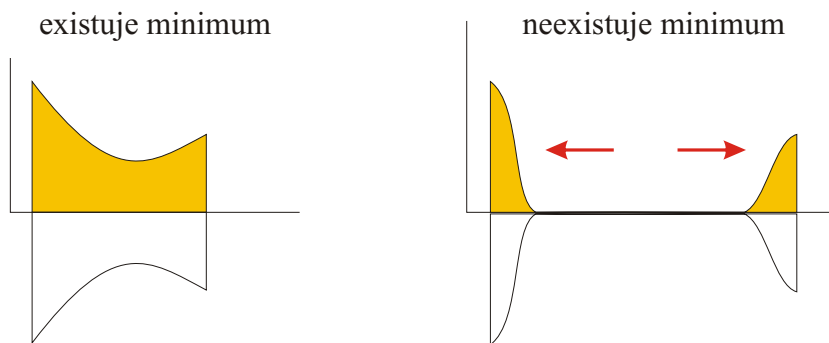
Budeme řešit příslušnou variační rovnici. Její řešení je řetězovka

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

pro vhodné konstanty a, b .



Ne vždy je možné dva body spojit takovou řetězovkou. Ne vždy existuje minimální řešení v prostoru spojitých funkcí.



Obrázek 17.8.5: Úzký vysoký džbánek nepůjde udělat nejlevněji.

17.8.6 Na tahu

Táhneme pejska za vodítko délky a . Zjistíme, jakou křivku opíše. Rovnice je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

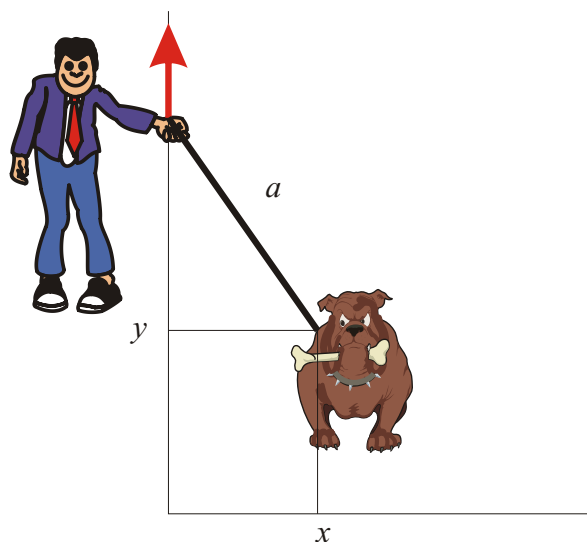
17.8.7 Plavec zvítězí ...

Řeku s proudem o rychlosti a chce překonat člun s rychlostí b . Stále pluje směrem k danému bodu. Jakou dráhu sleduje? Zkoumáme $t \mapsto (x(t), y(t))$ a odvodíme

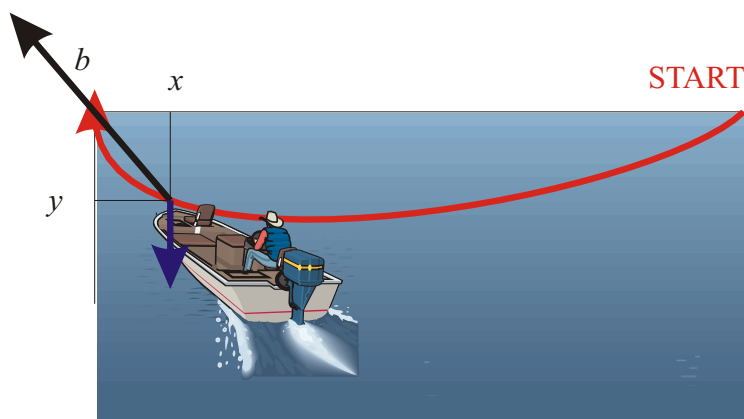
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -b \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= -a + b \sin \theta. \end{aligned}$$



Zkoumání tohoto řešení pro $a > b$ je zbytečné ...



Obrázek 17.8.6: Pán táhne pejska.



Obrázek 17.8.7: Je třeba neustále korigovat směr.

17.8.8 Stíhací křivka

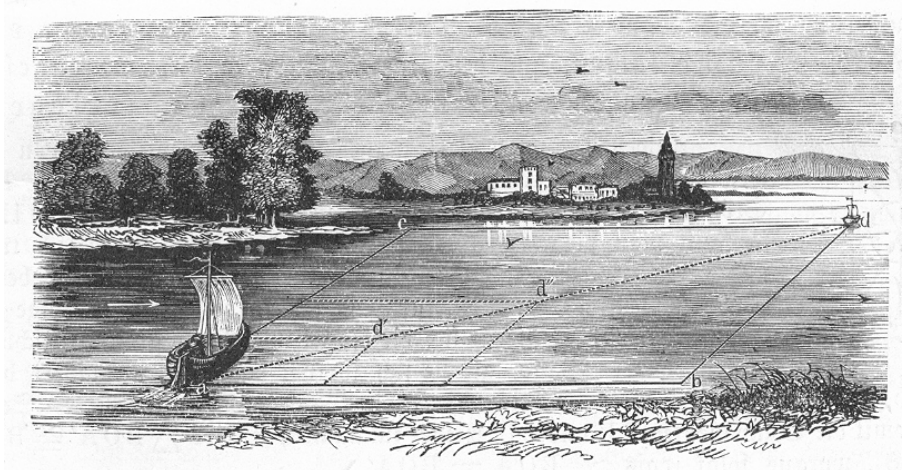
Uvažujme čtyři želvičky nacházející se v rozích čtvercového terária. V určitý okamžik se každá vydala stejnou rychlostí na kus řeči k želvičce napravo od ní. Díky symetrii jsou jejich trajektorie konečné spirály končící v prostředku terária.



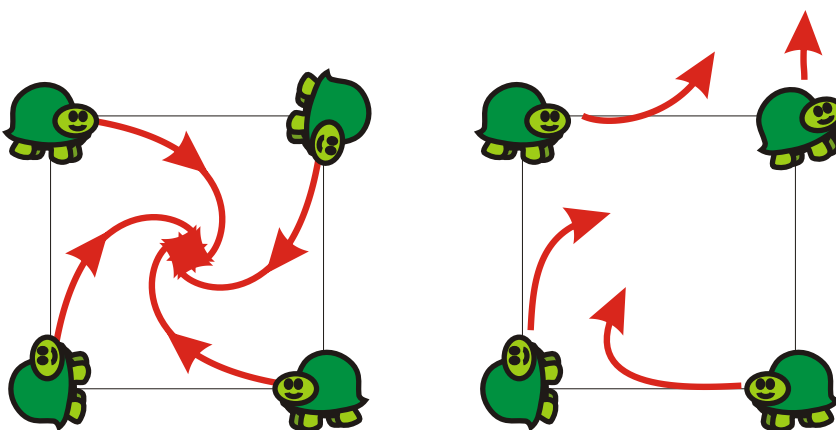
Pokud by však byly ve volné přírodě a jedna z nich by chtěla utéci co nejdále od ostatních, byly by trajektorie zcela jiné.

17.8.9 Hon na neřízenou střelu

Teroristé odpálili v čase $t = 0$ z místa A střelu neznámým směrem se známou rychlostí v . Střelu nejde zachytit radarem a jde lokalizovat a zničit pouze z bezprostřední blízkosti. Po

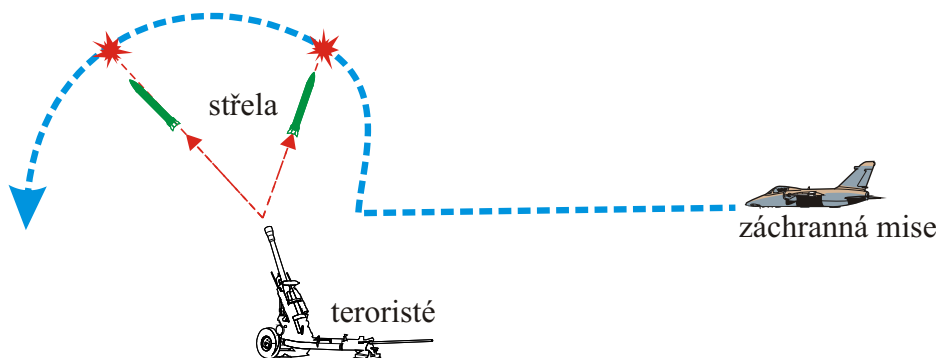


Obrázek 17.8.7: Loď unášená proudem nedorazí tam, kam chtěla.



Obrázek 17.8.8: Jak se mohou želvičky honit.

jaké křivce musí letět letadlo z místa B , pokud chce střelu zlikvidovat? Jakou potřebuje dosahovat rychlost?



Obrázek 17.8.9: Jestli se bude střela hledat po nebo proti směru hodinových ručiček je jedno.

Naše příroda spočívá na pohybu; absolutní klid je smrt.

(B.Pascal 1670)

17.9 Gravitace - dobrý sluha, zlý pán

17.9.1 Jistý "homerun"

Jakou rychlostí musí odpálit pálkař, aby měl jistý "homerun"?



Obrázek 17.9.1: Homerun vyžaduje sílu a rychlost.

Budeme chtít zjistit rychlost v_0 takovou, aby míč o hmotnosti m překonal zemskou přitažlivost a doletěl alespoň na Měsíc. Zanedbáme tření. Podle gravitačního zákona je míč přitahován k Zemi silou F závisející na vzdálenosti r od Země

$$F(r) = c \frac{Mm}{r^2},$$

kde M je hmotnost Země a c je konstanta. Označme R poloměr Země. Pak platí $F(R) = mg$, kde g je gravitační zrychlení. Tím se zbavíme konstanty c a máme

$$F(r) = mg \frac{R^2}{r^2}.$$

Pokud má míč vylétnout nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg \frac{R^2}{r^2} dr = \lim_{r \rightarrow \infty} mgR^2 \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) = mgR .$$

Kalkulus je nejlepší pomůcka, kterou máme pro aplikování fyzikální pravdy v nejširším slova smyslu.

(W.F.Osgoog)

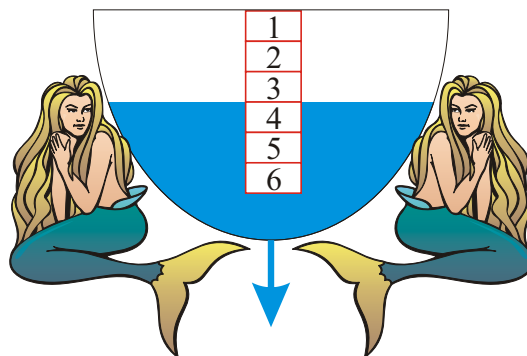
Tedy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR , \text{ čili } v_0 = \sqrt{2gR}$$

Přibližně dostaneme rychlost odpalu 11,2 km/s.

17.9.2 Vodní hodiny

Budeme chtít sestrojít hodiny, které by ukazovaly hodiny pomocí hladiny vody, která vytéká z nádržky. Jedna možnost je zvolit nádržku válcovitou, ale pak bude stupnice času nepravidelná. Zkusíme najít tvar nádržky, která povede k pravidelné stupnici.



Obrázek 17.9.2: Jak se měří čas - vodní hodiny.

Voda vytéká z nádržky rychlostí v , která je rovna rychlosti, kterou by získala voda při volném pádu od hladiny ve výšce h . Tedy potenciální energie mgh je rovna kinetické energii $mv^2/2$. Tedy $v = \sqrt{2gh}$. Má-li výtok průřez a , vytéká

$$ab\sqrt{2gh}$$

vody, kde konstanta b je pro vodu přibližně 0,6. Tedy úbytek celkového objemu vody

$$\frac{dV}{dt} = -ab\sqrt{2gh} .$$

Pokud má nádoba ve výšce h vodorovný řez $A(h)$, dostaneme pro celkové množství vody do výšky h vzoreček (integrujeme přes řezy)

$$V(h) = \int_0^h A(z) dz .$$

Tedy podle řetízkového pravidla máme

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = A(h) \frac{dh}{dt} ,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili základní větu analýzy na vztah V a A . Celkově máme

$$-ab\sqrt{2gh} = A(h) \frac{dh}{dt} .$$

Odsud vyjádříme dt/dh a spočteme integrací celkový čas T potřebný k vypuštění nádržky o výšce H

$$T = \int_0^T 1 dt = \frac{1}{ab\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{A(h)}{\sqrt{h}} dh .$$

Pokud chceme sestrojít vodní hodiny, kde T závisí lineárně na výšce H , dostaneme například průřez $A(h) = \pi\sqrt{h}$, což odpovídá rotačně symetrické nádobce vzniklé rotací $y = x^4$. Tyto vodní hodiny se nazývají **klepsydra**.

Příroda si zařídila své věci po svém a pak naučila lidi s velkou námahou porozumět části jejich tajemství
(Galileo)

17.9.3 Gravitační síla

Dvě tělesa o hmotnosti m_1, m_2 ve vzdálenosti r se přitahují vzájemně gravitační silou

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Budeme zkoumat padající těleso. Označíme $x(t)$ dráhu volného pádu bez tření a vidíme, že použití gravitační síly mg udělí tělesu zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$mg = F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Použili jsme druhý pohybový zákon: síla = hmotnost * zrychlení. Tedy dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g .$$

Její řešení jsou funkce

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0 ,$$

kde x_0 a v_0 udávají počáteční polohu a rychlost.

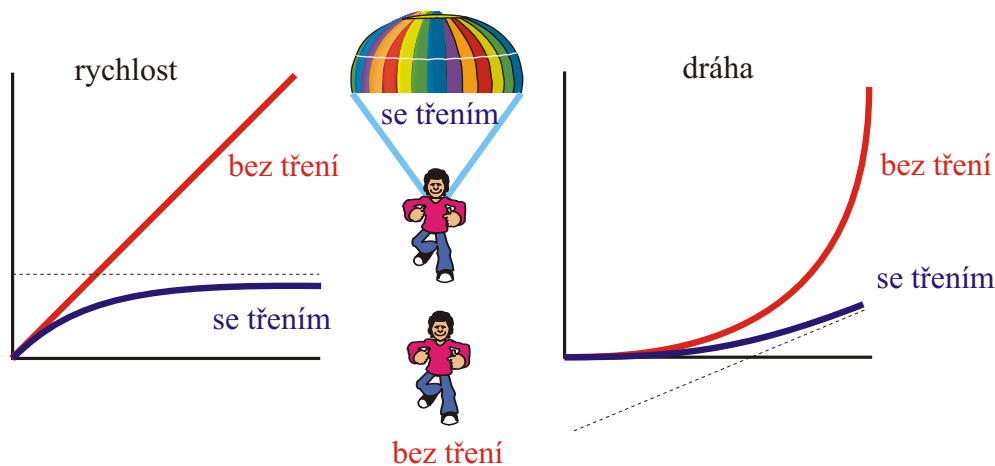
Pokud započítáme sílu tření, dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - c \frac{dx}{dt} .$$

Pro nulové počáteční podmínky funkce dostaneme

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}) ,$$

což potvrzuje známý fakt, že rychlost při volném pádu se třením neroste nade všechny meze.



Obrázek 17.9.3: Rychlost a dráha při volném pádu.

17.9.4 Pohyby planet

Gravitační síla závisí úměrně na hmotnosti obou těles a nepřímo na vzdálenosti obou těles

$$F = G \frac{Mm}{r^2} .$$

Hypotézy nevymýšlím.
(I.Newton ~ 1710)

Z tohoto vztahu jdou jednoduše odvodit zákony pohybu planet

- ⇒ Planety obíhají okolo slunce vlivem gravitační síly po eliptických drahách.
- ⇒ Rychlost obíhání je proměnlivá tak, aby průvodič za jednotku času pokryl vždy stejnou plochu.
- ⇒ Perioda závisí na průměrné vzdálenosti.

(J.Kepler)



Z těchto zákonů naopak odvodit vztah pro výpočet gravitační síly.

17.9.5 O tunelování

Uvnitř vytunelované Zeměkoule bude panovat stav beztíže.



Obrázek 17.9.5: Vytunelovaná zeměkoule.

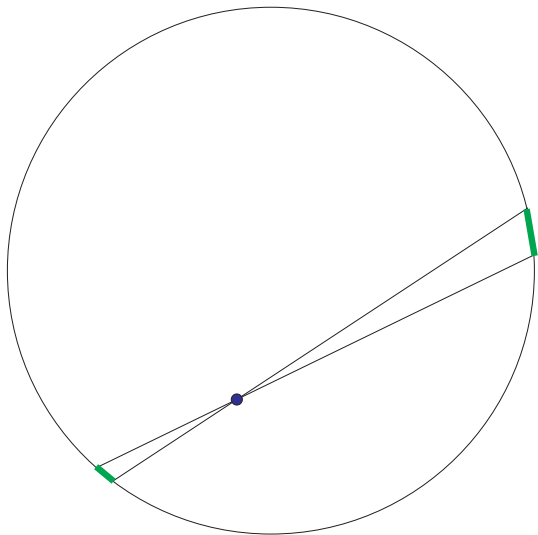


Obrázek 17.9.5: Řez dutou zeměkoulí.

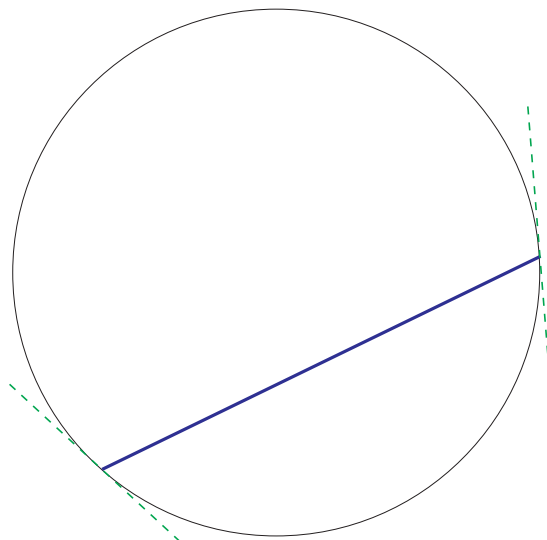
Důkaz: Zvolme bod x uvnitř Zeměkoule. Uvažujeme gravitační působení slupky S o poloměru $r > |x|$. Sestrojíme prostorový kužel K procházející bodem x . Kužel K na slupce S vykrojí dva díly, jejichž gravitační působení na bod x se ruší. Opravdu, velikost dílů závisí přímo úměrně na čtverci vzdálenosti a gravitační působení je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od x . Navíc se "efektivní plocha" obou dílů spočte ze skutečné plochy vynásobením týmž koeficientem, protože osa kuželu K protíná slupku S na obou koncích pod stejným úhlem. ■

Moje práce se vždy snažila spojit pravdivé a krásné a když jsem si musel vybrat jedno nebo druhé, obvykle jsem volil krásné.

(H.Weyl ~ 1930)



Obrázek 17.9.5: Ploška roste a gravitace klesá se čtvercem vzdálenosti.



Obrázek 17.9.5: Plošky jsou na obou koncích pod stejným úhlem.

17.9.6 Proč tunelovat?

Dopravní společnost přišla s revoluční myšlenkou. Vybuduje vlakové spojení mezi důležitými městy pomocí přímého tunelu pod povrchem Země. Místo paliva bude pohyb zajišťovat gravitační síla (zanedbáme tření). Spočítejte dobu jízdy.

Důkaz: Na bod T bude působit vzhledem k předchozímu problému pouze ta část Zeměkoule, která leží blíž ke středu než $|T|$. Z této (s hloubkou proměnné) gravitační síly pak pouze složka gravitační síly ve směru pohybu. Dostaneme rovnici ($x(t)$ označuje vzdálenost od středu tunelu)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3} x ,$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost Zeměkoule a R její poloměr. Řešením jsou harmonické kmity s periodou

$$2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} ,$$

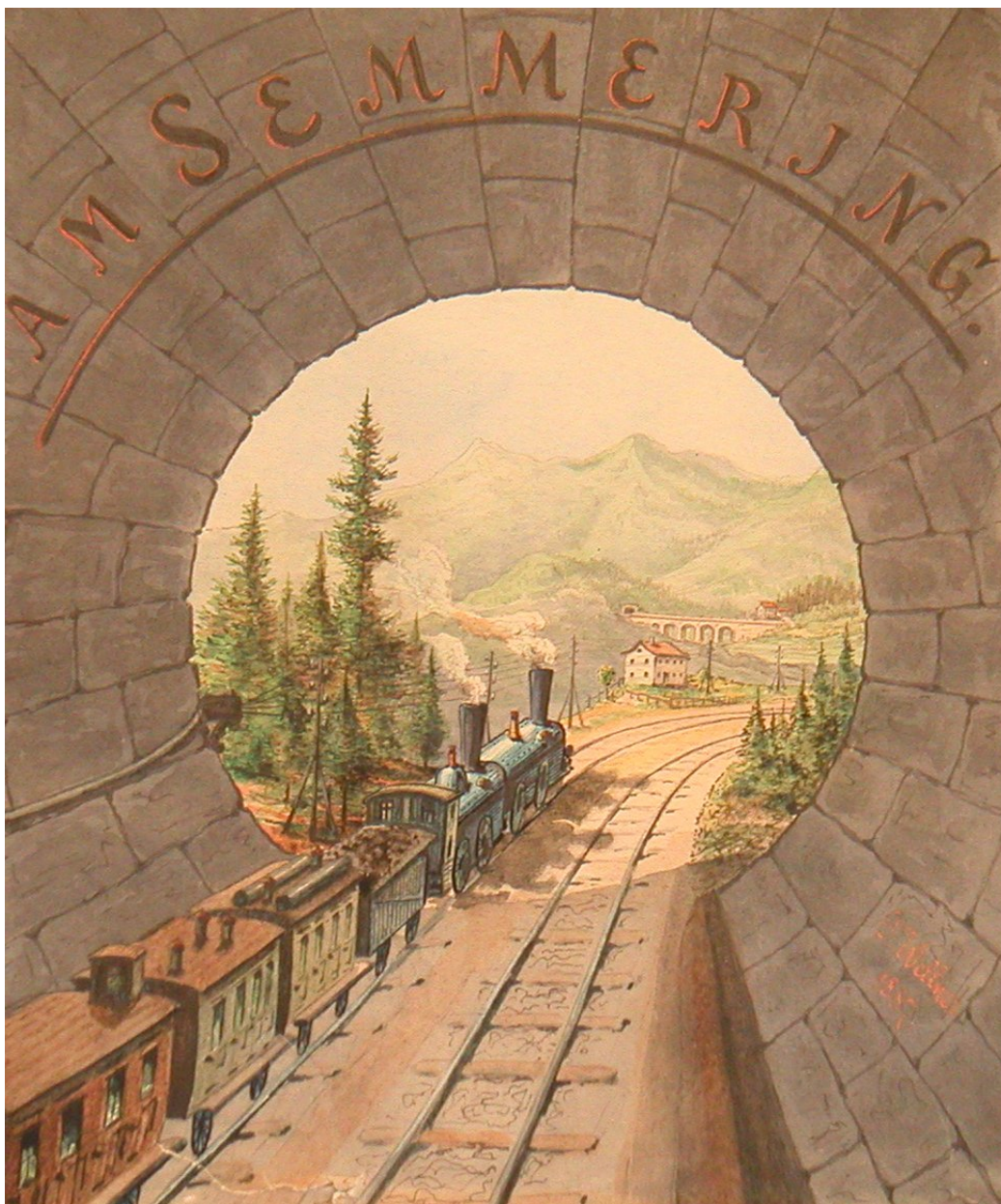
což dává slušný čas cca 90 minut odkudkoliv kamkoliv. ■

17.10 Jednou jsi dole jednou nahoře ...

17.10.1 Pružina

Pružina v klidovém stavu má délku l . Pa zavěšení závaží o hmotnosti m se prodlouží o délku d . Rovnováha nastane, pokud bude gravitační síla mg rovna síle pružiny, kterou je úměrná prodloužení. Tedy platí rovnovážný stav $kd = mg$ s vhodnou konstantou k . Pokud závaží popotáhneme ještě o x dolů, prodlouží se na celkovou délku $l + d + x$. Nyní na závaží působí síla

$$mg - k(d + x) = -kx .$$



Obrázek 17.9.6: Vítejte u nás.

Tato síla uvádí po uvolnění závaží do pohybu se zrychlením x'' , Tedy musíme vyřešit rovnici

$$mx'' + kx = 0 .$$

Pokud chceme ještě uvažovat tření, bude rovnice s časovou proměnnou t vypadat

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = 0 .$$

Jedná se o volné tlumené kmity pružiny. Pokud tuto pružinu držíme v ruce a začneme jí ovlivňovat vnější silou $F(t)$, bude mít úloha ještě pravou stranu

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = F(t) .$$



Obrázek 17.9.6: Gravitační cestování odkudkoliv kamkoliv?

Obrázek 17.9.6: Ekologická doprava!

17.10.2 Jednoznačnost řešení

Pro diferenciální operátor

$$T : y \mapsto p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

se omezenými koeficienty p_j na intervalu J a počátečními podmínkami

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

má rovnice $Ty = f$ nejvýše jedno řešení na J .

17.10.3 Jak vždy "uhodnout" řešení

Diferenciální operátor

$$T : y \mapsto y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y$$

lze symbolicky zapsat pomocí operátoru derivování D ve tvaru

$$Ty = (D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \dots + p_1D + p_0)y = P(D)y,$$

kde P je jistý polynom.

Hledáme řešení rovnice $Ty = 0$ ve tvaru $y(t) = e^{st}$ pro vhodnou konstantu s .



Mnohdy je vhodnější zkoumat obecnější problém, nahradit konkrétní rovnici jednodušším zápisem někdy šetří čas i peníze.

Dosazením dostaneme

$$P(D)e^{st} = P(s)e^{st}.$$

Rovnici $P(s) = 0$ nazveme **charakteristická rovnice** a polynom $P(s)$ **charakteristický polynom**. Jde-li o polynom $P(s) = (s - 6)^4$, má rovnice $Ty = 0$ řešení

$$e^{6t}, te^{6t}, \dots, t^3e^{6t}.$$

Pro komplexní kořen $a+ib$ zmodifikujeme řešení podle vzorečku $e^{a+ib} = e^a(\cos bt + i \sin bt)$.

Pokud například řešíme $Ty = (t^2 + 1)e^t$, lze "zkusit" tvar partikulárního řešení $y(t) = (at^2 + bt + c)e^t$.



Takto podobně lze "hádat" kdykoliv

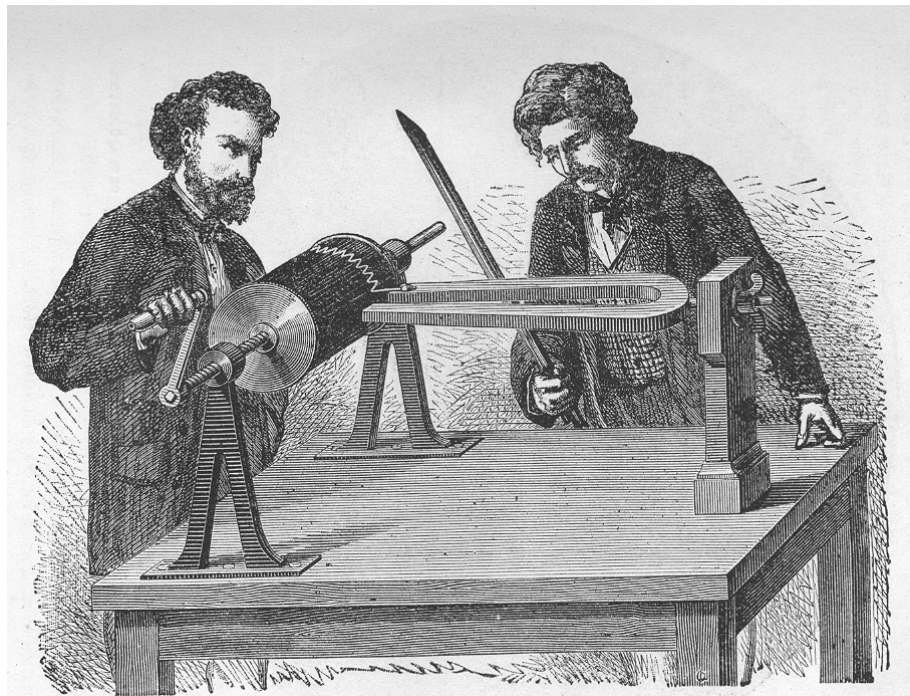
...

17.10.4 Harmonické kmitání

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

vede na řešení $x(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ s vhodnými konstantami a, b .



Obrázek 17.10.4: Jak si udělat sinusovku.

Pokud chceme, můžeme rovnici integrovat (použijeme rychlost $v(t) = x'(t)$) na tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E,$$

kde E je konstanta odpovídající celkové energii. Samozřejmě první sčítanec odpovídá kinetické energii a druhý odpovídá práci

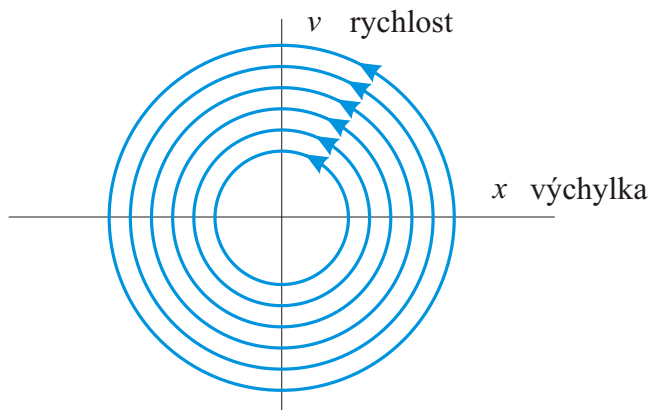
$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x k\tilde{x} d\tilde{x}$$

potřebné k natažení pružiny o délku x , tedy se jedná o vyjádření potenciální energie.



Jde zde o zákon o zachování energie v praxi.

Pokud si znázorníme v rovině $x \times v$ polohu bodu $(x(t), v(t))$ pro různé energie E , dostaneme kruhové dráhy. Tomuto znázornění říkáme **fázová rovina**.



Obrázek 17.10.4: Fázová rovina.

17.10.5 Trajektorie a orbity

U rovnice

$$u'' + pu' + qu = 0$$

můžeme zkoumat fázovou rovinu, ve které budeme sledovat chování $(u(t), v(t))$, kde $v(t) = u'(t)$. Křivky $t \mapsto (u(t), v(t))$ budeme nazývat **trajektorie**, graf trajektorie budeme nazývat **orbity**.

Orbity

$$u'' + qu = 0$$

jsou kružnice. Na fázové rovině jsou zajímavé body, které nazýváme centrum, ohnisko, sedlo, uzel. Tyto body dělíme na stabilní a nestabilní podle toho, zda jsou limitami trajektorií (s ohledem na čas $\rightarrow \infty$). Uzly zase dělíme na regulární a degenerované.

17.10.6 Srovnání řešení

Nechť máme $x(t)$ a $y(t)$ dvě netriviální řešení rovnic

$$x'' + q(t)x = 0, \quad y'' + r(t)y = 0,$$

kde platí $q(t) > r(t) > 0$ pro každé t . Pak řešení y má nulový bod mezi každými dvěma nulovými body řešení x .

(Sturm)



Pro $q(t) = 1$ lze použít jako řešení $x(t) = \sin t$.

17.10.7 Řešení pomocí mocninných řad

Jsou-li funkce $P(t)$ a $Q(t)$ rozvinutelné v mocninnou řadu o středu x_0 a poloměru r , pak existuje řešení

$$x'' + P(t)x' + q(t)x = 0$$

se stejnou vlastností.

17.10.8 Netlumené nucené kmity

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t) .$$

Pokud je vnější síla periodická, například

$$F(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

a $\omega \neq \omega_0$, lze najít řešení ve tvaru

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t .$$

Podobně pro (nekonečný) součet

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right)$$

(rovný $\frac{\pi}{2} - |t|$ pro $|t| \leq \pi$) dostaneme

$$x(t) = \frac{4\omega^2}{\pi} \left(\frac{\cos t}{1^2(\omega^2 - 1^2)} + \frac{\cos 3t}{3^2(\omega^2 - 3^2)} + \frac{\cos 5t}{5^2(\omega^2 - 5^2)} + \dots \right) .$$



Tedy je vidět, jak je užitečné napsat libovolnou vstupní funkci F jako šikovní součet sinů a cosinů.

17.10.9 Ladička a ladič ...

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega_0 t$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x'(0) = 0$ má řešení

$$x(t) = \cos \omega t - \cos \omega_0 t = 2 \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t .$$

Pokud bude frekvence ω struny na kytáře blízko frekvence ω_0 ladičky, bude jeden sinus mít malou frekvenci $\omega_0 - \omega$ a uslyšíme znatelné pulsy v síle zvuku.



Podobně se provádí amplitudová a frekvenční modulace rádiového signálu.

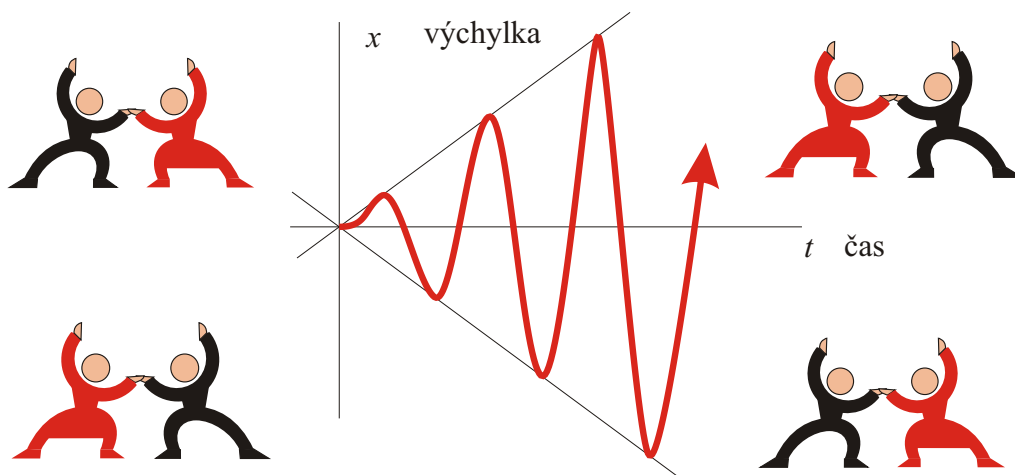
17.10.10 Resonance

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = A\omega^2 \cos \omega t$$

má řešení

$$x(t) = \frac{1}{2} A\omega t \sin \omega t .$$



Obrázek 17.10.10: Řešení v sobě kumuluje vnější impuls a rozkmitá se nade všechna očekávání.



Jsou známy případy, kdy tančící mládež zrušila vibracemi budovu. Proto se při konstrukci mostů, letadel, odstředivek a podobných věcí musí dávat pozor na rezonanci. A kdo má opravdu silný hlas nebo trumpetu se dostane všude, když se naladí na správnou frekvenci ;-)

17.10.11 Vibrující mobil

Postavíme-li mobilní telefon na pružnou podložku a ta se prohne o 2 milimetry, při jakém vyzváněcím tónu začne mobil tancovat?

Někteří lidé si myslí, že rozumné je všechno, co se dělá s vážnou tváří.
(G.Ch.Lichtenberg ~ 1770)

17.10.12 Past na piráty silnic

V běžném automobilu s řidičem je pružící systém stlačen přibližně o 15 cm. Jak hustě musíme na pěší zóně vybudovat zpomalovací retardéry, aby to pirátovi silnic při průjezdu rychlostí 100 km/h způsobilo kritickou rezonanci?

17.10.13 Tlumení

Zpravidla se nelze vyhnout tlumení způsobenému třením. V rovnici

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = 0$$

můžeme dostat při silném tření například řešení

$$2e^{-2t} - e^{-t}$$

a pružina neosciluje. Při slabém tření například řešení

$$e^{-t} \cos t$$

a pružina se bude uklidňovat do nekonečna kmitáním. Při tření "tak akorát" (jedna speciální hodnota) bude například řešením

$$e^{-t}(1 + t) .$$

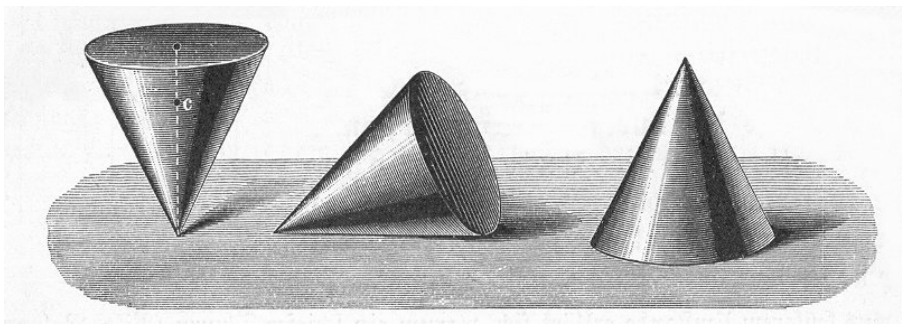


V přístroji na měření proudu chceme, aby se ručička rychle ustálila, proto musíme nastavit tření v přístroji šikovně ...

17.10.14 Stabilita s fiktivní energií

Jestliže systém

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned}$$



Obrázek 17.10.14: Stabilní a nestabilní polohy.

popisuje nějakou fyzikální situaci, může se řešení blížit k bodu, který bude reprezentovat minimum celkové energie E . Tento bod by pak mohl být stabilním konstantním řešením. Pokud se budeme pohybovat po křivce $t \mapsto (x(t), y(t))$, bude se energie E měnit v závislosti na čase takto

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G .$$

Pokud budou takové výrazy vždy záporné, budeme podél dané trajektorie snižovat hodnotu energie. Tedy lze očekávat, že se blížíme k bodu minimální energie.

Použijeme tuto myšlenku pro získání stabilního řešení. Pokusíme se najít funkci E tak aby výrazy

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G .$$

byly záporné v okolí konstantního řešení. Pak je toto řešení asymptoticky stabilní.

(Ljapunov)

Například pro rovnici kmitání na pružině

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(c je odpor prostředí, k je konstanta pružiny) dostaneme soustavu

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -k \frac{x}{m} - \frac{c}{m} y$$

s kritickým bodem $(0, 0)$. Celková energie E má složku kinetickou

$$\frac{1}{2} m y^2$$

a potenciální, která je vytvořena prací pružiny

$$\int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 .$$



Je úžasné, že takový obyčejný integrál nám poví, že stlačená i roztáhnutá pružina má kladnou energii :-)

Tedy celková energie je

$$E(x, y) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}my^2 .$$

Lehce ověříme, že

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = kxy + my \left(-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y \right) = -cy^2 \leq 0 .$$

Tedy počátek je stabilní kritický bod.

17.10.15 Dvojpružina a jízda na koni

Nechť je dvojice pružin se závažími z rovnovážných pozic vychýlena tak, že horní závaží o hmotnosti m_1 je vychýleno o x a dolní závaží o hmotnosti m je vychýleno o y směrem dolů.

Pak řešíme soustavu

$$m_1 x'' = k_2(y - x) - k_1 x, \quad m_2 y'' = k_2(y - x) .$$

Po dosazení z první do druhé dostaneme pro y rovnici

$$(D^4 + (a + b + c)D^2 + ab)y = 0$$

pro vhodné konstanty. Charakteristická rovnice má jednoduché komplexní kořeny, proto je řešení y i x ve tvaru

$$c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t + c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t .$$

Zde ω_1 a ω_2 jsou přirozené frekvence systému.



Obrázek 17.10.15: Jízda na koni vyžaduje zkušenost.



Proto se na koni tak divně hopsá ;-)

17.10.16 O kyvadle

Netlumené kyvadlo popisují rovnice

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \sin x.$$

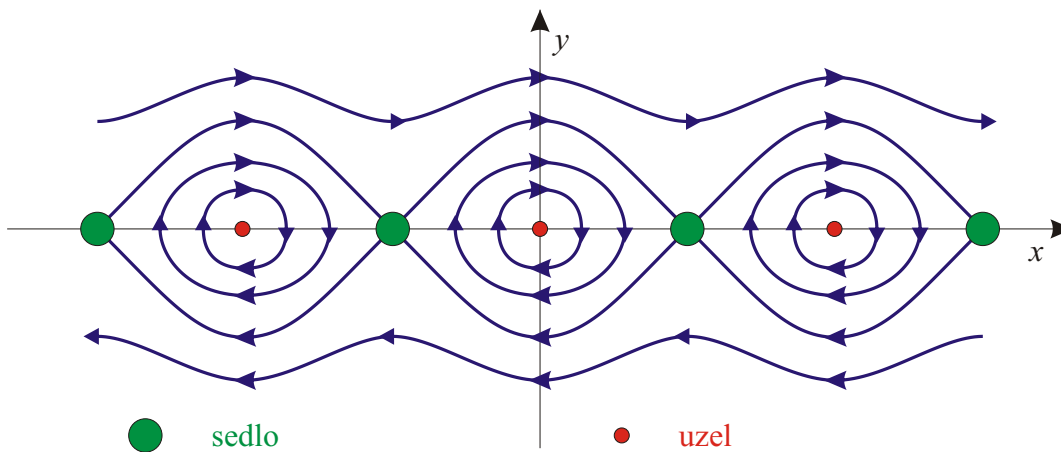
Odvodíme z nich, že

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \sin x}{y}.$$

To po separaci proměnných vede na křivky implicitně vyjádřené

$$\frac{1}{2}y^2 + (k - k \cos x) = E.$$

Zde y odpovídá rychlosti a první sčítanec odpovídá kinetické energii, druhý sčítanec potenciální energii a součet celkové energii (konstanta nezávislá na čase).



Obrázek 17.10.16: Netlumené kyvadlo.

Tlumené kyvadlo je popsáno rovnicí obsahující člen $-cy$ odpovídající tření

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \sin x - cy.$$

Na obrázku vidíme nestabilní sedla a stabilní centrum spirál.

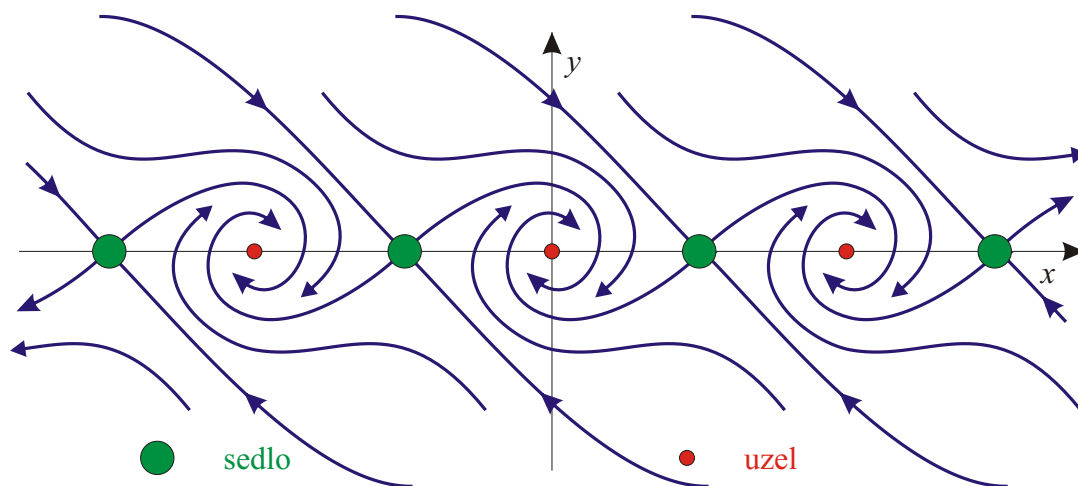
17.10.17 Řešení v distribucích a fundamentální řešení

Nechť L je diferenciální operátor ve tvaru

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^m D^\alpha u.$$

Distribuci $u \in D'$ nazveme **řešení ve smyslu distribucí** rovnice

$$Lu = f, \quad f \in D',$$



Obrázek 17.10.16: Tlumené kyvadlo.

pokud pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in D$ platí

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi) .$$

Důležité řešení pro daný operátor je řešení rovnice s pravou stranou rovnou bodovému impulsu. Řešení ε rovnice

$$L\varepsilon = \delta$$

budeme nazývat **fundamentální řešení** operátoru L .

Jeho význam plyne z následujícího pozorování

Řešení u rovnice

$$Lu = f , f \in D'$$

ve smyslu distribucí je konvoluce fundamentálního řešení a pravé strany, tedy

$$u = \varepsilon * f .$$

Toto řešení je jediná distribuce řešící danou rovnici, které má zároveň konvoluci s pravou stranou.

17.10.18 Počáteční úloha v distribucích

Soustavu diferenciálních rovnic v maticovém zápisu

$$y' - Ay = f , f \in D'$$

s počátečními podmínkami $y(0) = (y_1, \dots, y_n)$ budeme ve smyslu distribucí řešit nalezením distribuce Y nulové pro $t < 0$ splňující

$$Y' - AY = y(0)\delta(t) + F ,$$

kde F je distribuce nulová pro $t < 0$ souhlasící s f pro $t > 0$.

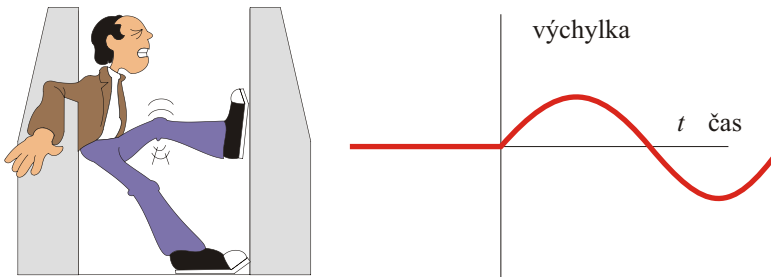
17.10.19 Rovnice kmitání v distribucích

Pro $L = \frac{d^2}{dt^2} + a^2$, $a > 0$, fundamentální řešení

$$L\varepsilon = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + a^2\varepsilon = \delta(t)$$

je rovno

$$\varepsilon(t) = h(t) \frac{\sin at}{a} .$$



Obrázek 17.10.19: Tak se nám roztrásla kolena, nic se neděje.

17.11 Rovnice vlnění

17.11.1 Snadné řešení vlnové rovnice

Je-li $y = F(x)$ libovolná funkce, pak funkce $u(x, t) = F(x + at)$ představuje vlnu, která se pohybuje podél x -ové osy s rychlostí a . Pokud přidáme ještě vlnu v protisměru, lze ověřit, že funkce

$$u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$$

vyhovuje rovnici

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Této rovnici budeme říkat **vlnová rovnice**. Pokud máme nekonečnou strunu, vychýlíme ji do pozice popsané funkcí $f(x)$ a následně uvolníme, má vlnová rovnice řešení

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + at) + f(x - at)) .$$

Pro lichou funkci f s hodnotami $f(0) = f(\pi) = 0$ dostaneme 2π -periodickou lichou funkci (například sinus).

(d'Alembert \sim 1765)

17.11.2 Vlnová rovnice v distribucích

Pro vlnový operátor $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$, $a > 0$, fundamentální řešení

$$L\varepsilon_n = \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varepsilon_n = \delta(x, t)$$

zjistíme pomocí frekvenční transformace. Dostaneme

$$\varepsilon_n(x, t) = h(t) F_s^{-1} \left[\frac{\sin a|s|t}{a|s|} \right].$$

Pro $n = 3$ dostaneme

$$\varepsilon_3(x, t) = \delta(a^2 t^2 - |x|^2).$$

Pro $n = 2$ dostaneme

$$\varepsilon_2(x, t) = \frac{h(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}.$$

Pro $n = 1$ dostaneme

$$\varepsilon_1(x, t) = \frac{1}{2a} h(at - |x|).$$

17.11.3 Distributivní řešení s počátečními podmínkami

Řešíme-li

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varepsilon_n = f(x, t)$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$$

přeformulujeme do řeči distribucí na tvar

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varepsilon_n = f(x, t) + u_0(x) \delta'(t) + u_1(x) \delta(t).$$

a pak dostaneme řešení v distribucích.

17.12 Je ti teplo?

17.12.1 Rovnice tepelné rovnováhy

Budeme řešit problém, jak je rozložena teplota na obdélníkové desce (reprezentujeme desku jako $[0, \pi] \times [0, \infty)$), pokud nastala rovnováha - teplota se již ustálila a nemění se v čase. Teplotu uvažujeme jako funkci $u(x, y)$ dvou proměnných, bodu $x \in [0, \pi]$ a $y \in [0, +\infty)$. Fyzikální argumenty vedou k tomu, že chceme, aby funkce $u(x, y)$ vyhovovala rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Tuto rovnici budeme nazývat **rovnice tepelné rovnováhy**. Očekáváme, že tuto úlohu lze jednoznačně vyřešit, pokud máme zadány počáteční podmínky, které zachycují teplotu $f(x)$ desky na okraji, tedy $u(x, 0) = f(x)$, $x \in [0, \pi]$. Řešíme tedy rovnici tepelné rovnováhy s podmínkami

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$



Obrázek 17.11.2: Padající kapky představují bodový impuls. Jeho projevy jsou kouzelné.

Pokud $f(x) = \sin x$, nabízí se dvě řešení

$$u(x, y) = e^y \sin x, u(x, y) = e^{-y} \sin x.$$

První řešení se nám příliš nehodí pro svoji děsivou neomezenost. Proto přidáme ještě limitní podmínku

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \text{ stejnoměrně v } x.$$

Zkusíme hledat řešení ve tvaru $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Po dosazení se rovnice rozdělí na rovnici s x a druhou s y . Vyřešíme v x a dostaneme

$$X(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x).$$

Pak pro Y dostaneme řešení

$$b_n e^{ny} \sin(nx), b_n e^{-ny} \sin(nx), n = 1, 2, \dots.$$

Celkově

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin(nx), b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin(n\zeta) d\zeta.$$



Pokud řada konverguje a pokud svítí sluníčko.

17.12.2 Problém minimalizace

Problém minimalizace

$$\int \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

pro funkci $z = z(x, y)$ vede na variační rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

17.12.3 Fundamentální řešení

Pro operátor tepelné rovnováhy $L = \Delta$, fundamentální řešení rovnice

$$L\varepsilon_n = \Delta\varepsilon_n = \delta(x)$$

získáme pomocí frekvenční transformace distribucí ve tvaru

$$\varepsilon_n(x) = F_s^{-1} \left[-\frac{1}{|s|^2} \right] .$$

Pro $n = 3$ dostaneme

$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{4\pi|x|} .$$

Pro $n = 2$ dostaneme

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x| .$$

17.13 Jen se zahřej

17.13.1 Jak rychle chladne bábovka

Na stole je čerstvě upečená bábovka, kdy se bude moci jíst?

Zákon ochlazování říká, že rychlost, s jakou se těleso ochlazuje, je přímo uměrná rozdílu teplot.

... ze stejných principů dokáží rámeč Systému světa.

(I.Newton ~ 1710)

Tedy teplota $T(t)$ v čase t vyhovuje rovnici

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T^*),$$

kde T^* je konstantní teplota okolí a k je konstanta. Dosadíme-li si $x(t) = T(t) - T^*$, dostaneme rovnici $dx/dt = -kx$ a obvyklé exponenciální řešení.

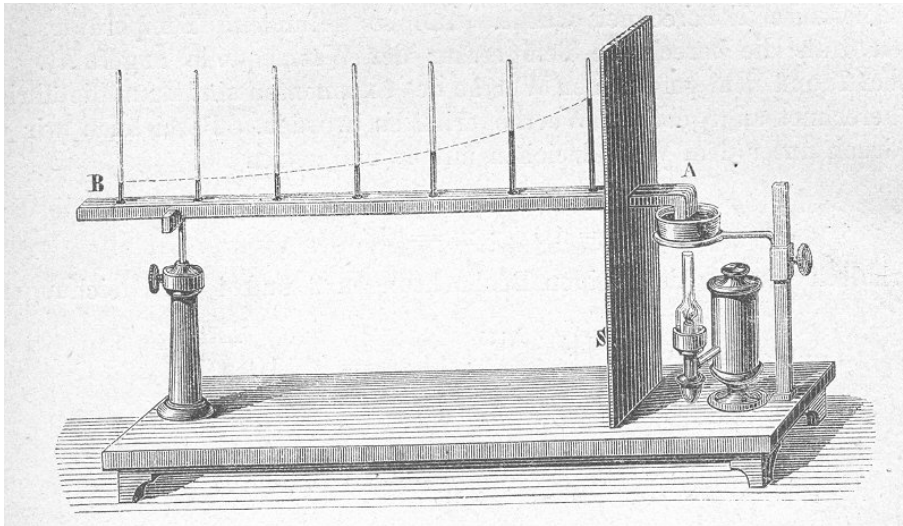
Pro výpočet potřebujeme nějaké údaje, například za kolik minut se ochladí o kolik stupňů a jakou teplotu měla na začátku.



Podobně stanovují kriminalisté dobu činu ...

17.13.2 Vedení tepla

Budeme řešit problém, jak se chová teplota na tyči (reprezentujeme tyč jako jednorozměrný interval $[0, \pi]$).



Obrázek 17.13.2: Jak je teplo rozváděno v jedné proměnné.

Teplotu uvažujeme jako funkci $u(x, t)$ dvou proměnných, bodu $x \in [0, \pi]$ a času $t \in [0, +\infty)$. Fyzikální argumenty vedou k tomu, že chceme, aby funkce $u(x, t)$ vyhovovala rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Tuto rovnici budeme nazývat **rovnice vedení tepla**. Očekáváme, že tuto úlohu lze jednoznačně vyřešit, pokud máme zadány počáteční podmínky, které zachycují teplotu $f(x)$ tyče na počátku.

17.13.3 Vedení tepla na tenkém drátu

Řešíme problém, jak najít funkci $u(x, t)$ reálné proměnné $x \in [0, \pi]$ a času $t \in [0, \infty)$ splňující rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

vyhovující okrajovým podmínkám

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Jde o funkci u popisující teplotu drátu (zde jednorozměrného intervalu proměnné x) v čase t .

Varuj se pátrat po tom, co bude zítra.
(Horatius)

Okrajové podmínky říkají, že oba konce drátu jsou udržovány na teplotě 0 stupňů a počáteční teplota drátu je zadaná funkcí f .

17.13.4 Tepelné jádro

Předpokládejme, že lze řešení napsat ve tvaru $u(x, t) = R(x)S(t)$. Pak se diferenciální rovnice transformuje do tvaru

$$\frac{R''}{R} = \frac{S'}{S}.$$

Tedy jde o jistou konstantu a můžeme řešit obě rovnice odděleně. Dostaneme řešení ve tvaru

$$R(x)S(t) = e^{-n^2 t} \sin nx$$

pro různá n přirozená. Tedy funkce $u(x, t)$ vytvořená jako nekonečný součet

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

je řešením problému, pokud funkce f jde napsat ve tvaru

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$



... a pokud máme v batůžku kouzelný nápoj konvergence.

Vzhledem k tomu, že

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\zeta) \sin(n\zeta) d\zeta,$$

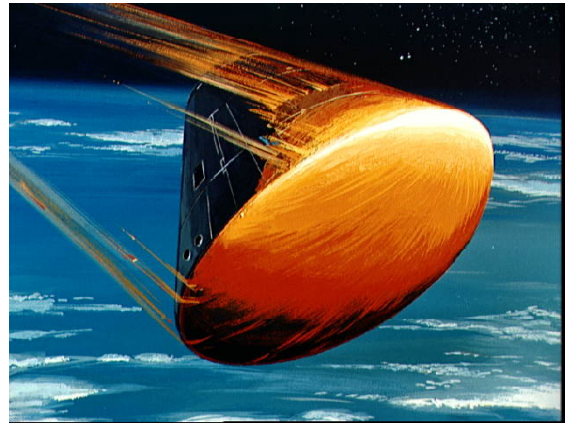
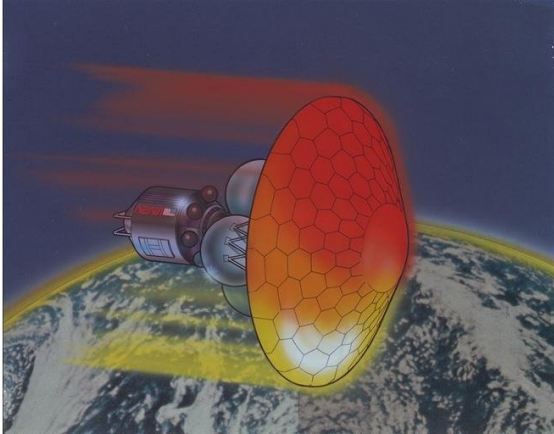
dostaneme vyjádření funkce u integrálem

$$u(x, t) = \int_0^\pi K(t, x, \zeta) f(\zeta) d\zeta ,$$

kde

$$K(t, x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin n\zeta .$$

Funkci K nazýváme **tepelné jádro**. Řešení je ve tvaru integrálního operátoru.



Obrázek 17.13.4: Vedení tepla a tepelná pohoda jsou velmi důležité.

17.13.5 Distributivní řešení

Pro operátor vedení tepla $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$, $a > 0$, fundamentální řešení

$$L\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon = \delta(x, t)$$

je rovno

$$\varepsilon(t) = \frac{h(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} .$$

Řešíme-li

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon = f(x, t)$$

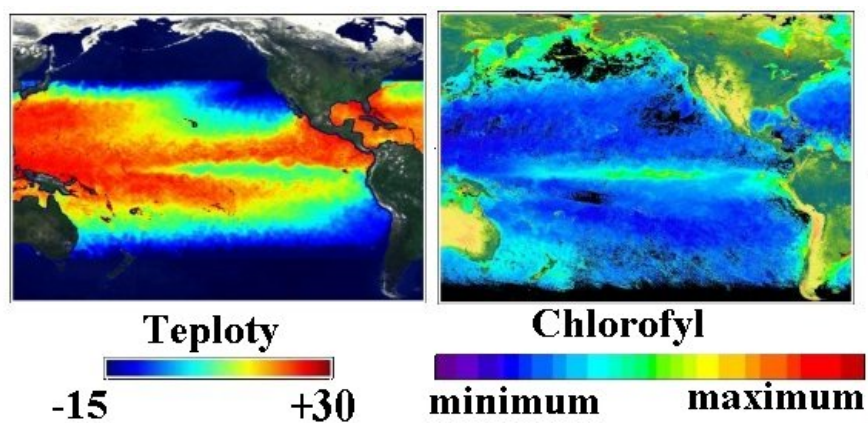
s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = u_0(x) ,$$

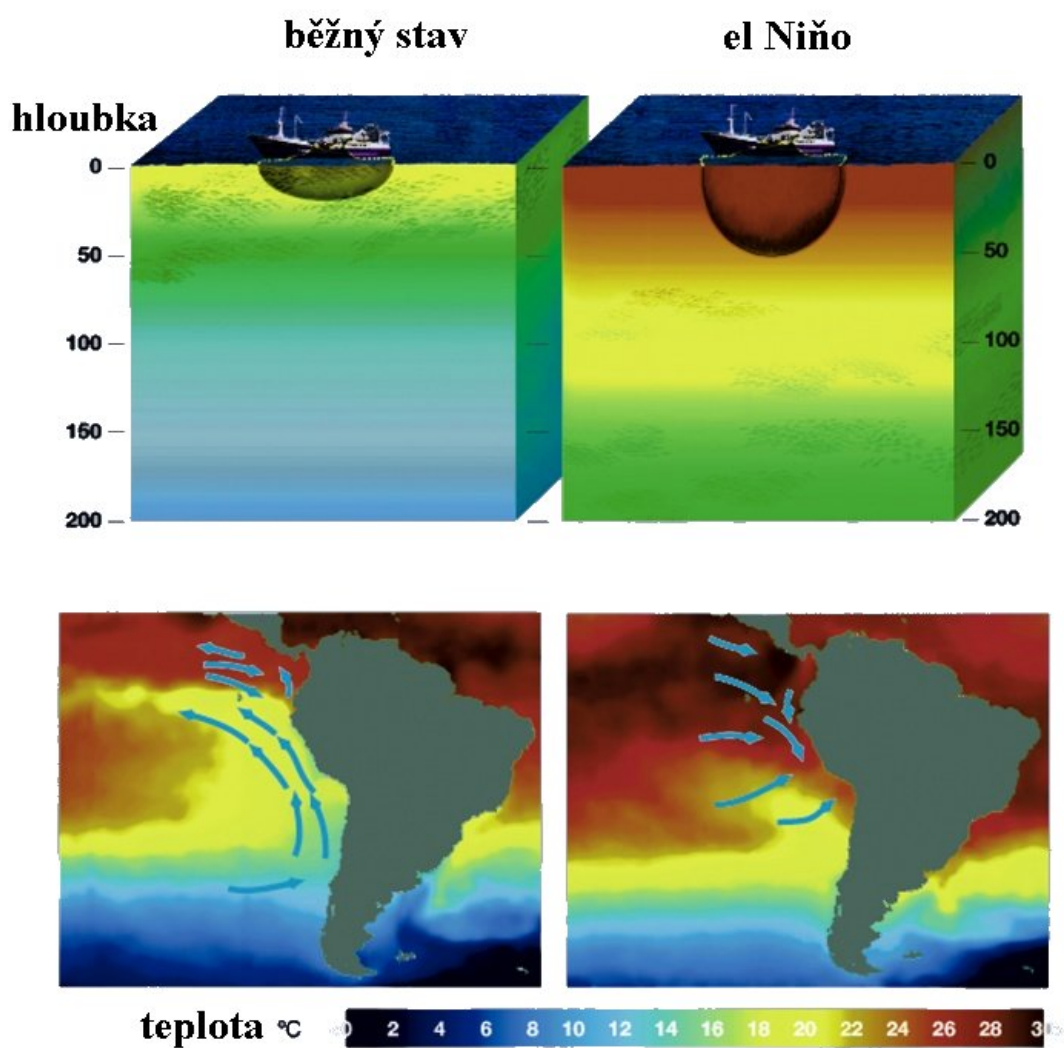
přeformulujeme do řeči distribucí na tvar

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon = f(x, t) + u_0(x) \delta(t) .$$

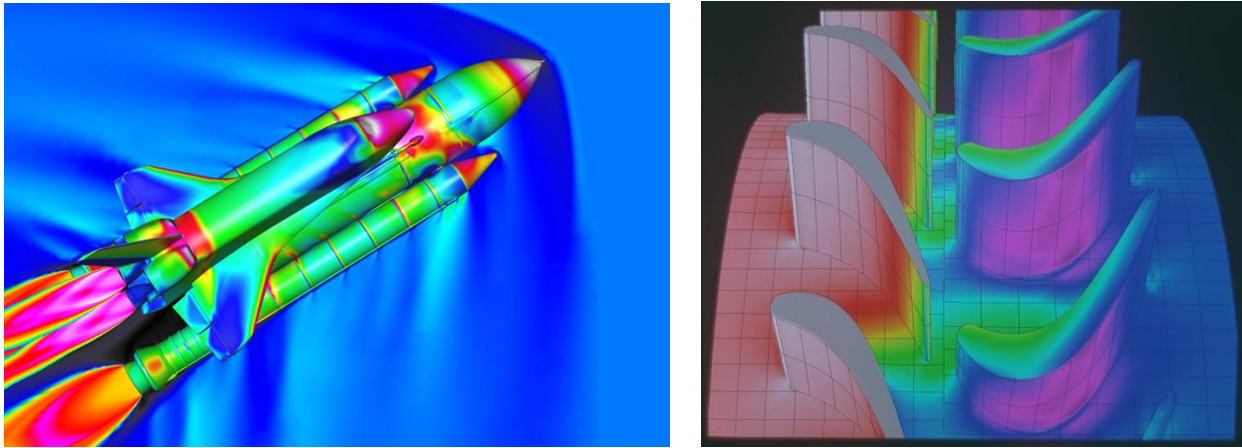
a pak dostaneme řešení v distribucích.



Obrázek 17.13.5: Teplota v oceánu a její vliv na plankton.



Obrázek 17.13.5: Teplota v hloubce má vliv na rybolov.



Obrázek 17.13.5: Tepelná únava materiálu a jak jí předcházet.

17.14 O lyžařích a sjezdovce

17.14.1 Brachystochrona

Chceme upravit lyžařský svah tak, abychom jej působením gravitace (zanedbáme tření) sjeli nejrychleji.

...zdroj veškeré velké matematiky je speciální případ, konkrétní příklad. Často v matematice pojem zdánlivě velké obecnosti je v podstatě stejný jako malý konkrétní speciální případ.
(P.R.Halmos)

Chceme tedy najít tvar křivky z bodu A do bodu B takový, abychom minimalizovali dobu sjezdu.



Hledání této křivky bylo velikou motivační rozvoje matematické analýzy.

Pomůžeme si světlem. Paprsek se na rozhraní vody a vzduchu láme. Pokud budou rychlosti ve vzduchu a ve vodě veličiny v_1 a v_2 , pak paprsek nejrychleji z bodu A do bodu B doletí přes bod P , ve kterém úhly α_1 a α_2 vyhovují vztahu

$$\frac{\alpha_1}{v_1} = \frac{\alpha_2}{v_2} .$$

To zjistíme lehce jako extrém funkce určující celkový čas

$$x \mapsto \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2} .$$

Podobně můžeme uvažovat více vrstev zlomu. V limitě očekáváme

$$\frac{\alpha}{v} = \text{konstanta} .$$

Při sjezdu se potenciální energie mění na kinetickou, tedy známe její rychlost po snížení nadmořské výšky o y . Dostaneme $v = \sqrt{2gy}$. Tvar sjezdovky odpovídá funkci $y = y(x)$ a její sklon α vyhovuje

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} .$$

Tedy dostaneme pro y diferenciální rovnici

$$y(1 + (y')^2) = c .$$

Použijeme zápis $y' = dy/dx$ a dostaneme

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy .$$

Po substituci nové proměnné θ vzorečkem

$$\text{tg } \theta = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy .$$

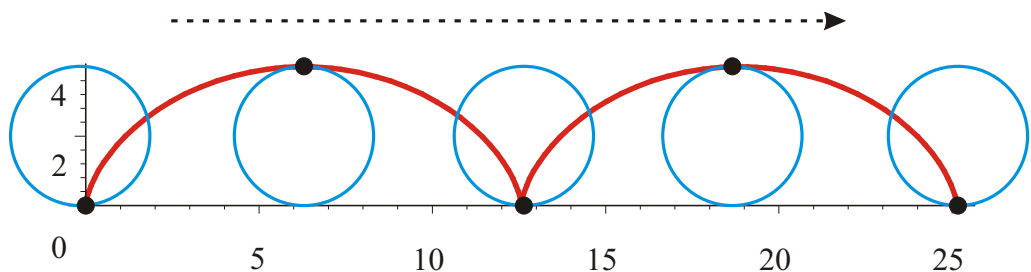
dostaneme

$$dx = c(1 - \cos 2\theta) d\theta .$$

Vyřešíme a dostaneme

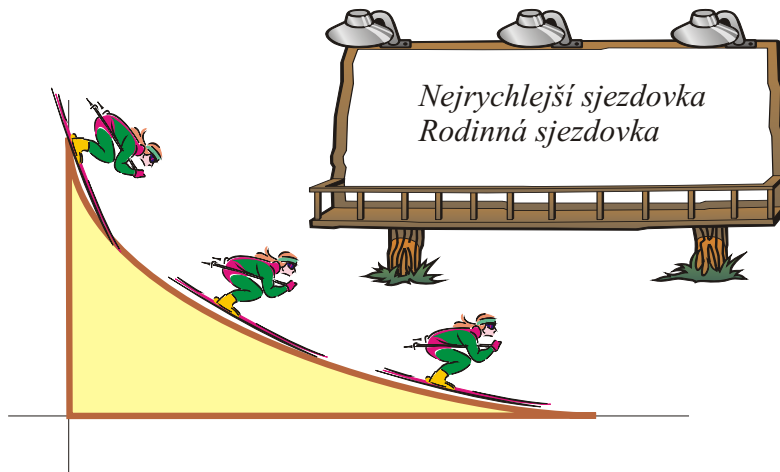
$$x = a(\theta - \sin \theta) , \quad y = a(1 - \cos \theta) ,$$

kde $a = c/2$. Jedná se o parametrickou rovnici křivky, kterou opisuje bod na kružnici při valení podél osy. Nazývá se **cykloida**.



Obrázek 17.14.1: Jak vidíme hřebík na pneumatice při jízdě.

Podarilo se nám najít tvar sjezdovky, která dává nejrychlejší sjezd. Této křivce se říká **brachystochrona** (z řečtiny brachystos = nejkratší, chronos = čas). A tento čas je roven $\pi\sqrt{a/g}$. Stejný čas trvá sjezd i z libovolného jiného bodu. Tedy optimální tvar sjezdovky pro to, aby se na ní rozmístili lyžaři a dojeli do cíle najednou. Proto se této křivce říká **tautochrona** (z řečtiny tauto = stejný, chronos = čas).



Obrázek 17.14.1: Nejlepší sjezdovka.

17.14.2 Jde to i jinak ...

Křivka nejrychlejšího sjezdu minimalizuje dobu vyjádřenou integrálem

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx .$$

Budeme řešit příslušnou variační rovnici. Její zkoumání vede na řešení rovnice

$$y[1 + (y')^2] = c$$

pro vhodnou konstantu c . Její řešení je cykloida

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) .$$

17.14.3 A ještě jinak

Máme sestavit sjezdovku, na které bude platit kouzelné pravidlo, že z libovolného místa se lyžař dostane k lanovce za 1 minutu.

Spočteme čas $T(Y)$ odpovídající sjezdu z převýšení Y . Předpokládáme, že sjezdovka je popsána funkcí $y(x)$. Rychlost při sjezdu odpovídá kinetické energii a ta zase ztrátě potenciální energie. To vede ke vztahu v daném bodě (u, v)

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = mg(Y - v) ,$$

čili

$$dt = - \frac{ds}{\sqrt{2g(Y - v)}} .$$

Celkový čas od $v = Y$ do $v = 0$ je tedy

$$T(Y) = \int_{v=Y}^{v=0} 1 dt = \int_0^Y \frac{ds}{\sqrt{2g(Y - v)}} .$$

Po substituci $s = s(v)$ dostaneme

$$T(Y) = \int_{v=y}^{v=0} 1 dt = \int_0^Y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{2g(Y-v)}} .$$

Označíme

$$f(v) = s'(v) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} .$$

$$T(Y) = \int_0^Y \frac{f(v)dv}{\sqrt{2g(Y-v)}} .$$

Pokud $T(Y)$ je konstanta T_0 , dostaneme pomocí exponenciální transformace

$$\frac{T_0}{p} = \frac{1}{\sqrt{2g}} L(f(v)) \sqrt{\frac{\pi}{p}} .$$

Používáme exponenciální transformaci (v čas, p komplexní frekvence) a pravidlo pro transformaci konvoluce. Tedy s použitím inverzní exponenciální transformace dostaneme

$$f(v) = \sqrt{\frac{b}{v}} ,$$

kde b je vhodná konstanta. Srovnáním s definicí funkce f dostaneme rovnici (píšeme již y místo v)

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y} .$$

Rovnici vyřešíme separací na tvar

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}} dy .$$

Substitucí $y = b \sin^2 \phi$ spočteme

$$x = a(\theta + \sin \theta) , \quad y = a(1 - \cos \theta) ,$$

s $a = b/2$, $\theta = 2\phi$. Tautochróna je cykloida.

17.15 Jestli nás váha neklame ...

17.15.1 Princip úměrnosti

Některé kulaté mikroorganismy přijímají potravu povrchem, tedy jejich růst popisuje vztah

$$\text{změna objemu} = k * \text{povrch} .$$

Pak je jejich průměr lineární funkcí času. Máme totiž rovnici

$$\frac{dar^3}{dt} = br^2$$

pro funkci $r(t)$ popisující poloměr v čase t , kde a, b jsou konstanty. Řešíme rovnici a dostaneme $r(t)$ jako lineární funkci času t .

17.15.2 Raketa a palivo

Pohybový zákon říká

$$F = ma$$

Přesnější tvar pohybového zákona říká, že síla F působící na těleso o hmotnosti m mu uděluje moment mv , kde v je rychlost. Tedy změna momentu je způsobena silou a platí

$$F = \frac{d}{dt}(mv) .$$

Pokud hmotnost nezávisí na čase, pak jsou obě formulace ekvivalentní. Pokud se k tělesu o hmotnosti m o rychlosti v připojuje s relativní rychlostí w další hmota s tempem dm/dt , pak celkový přírůstek momentu lze psát ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(mv) = F + (v + w) \frac{dm}{dt} .$$

Raketa vyletí s palivem do výšky závisící na množství paliva. Pokud má raketa bez paliva hmotnost m_1 a má m_2 paliva, pak platí při rovnoměrném spalování

$$\frac{dm}{dt} = -a .$$

Spočítáme, v jaké výšce bude palivo spotřebováno. Počítáme s konstantní gravitační silou mg . Vyjde $-gm_2^2/2a^2 + bm_2/a + bm_1/a \log(m_1/(m_1 + m_2))$.

17.15.3 Prší či mží ...

Kapka padá a s rychlostí odpovídající povrchu nabírá vodní páry. Padá se zrychlením $a = g/4$.

Kapka padá a sbírá kapičky na své cestě. Padá se zrychlením $a = g/7$.

17.16 Drobné si nechte (kvantová peněženka)

17.16.1 Kvantová mechanika

Uvažujeme funkci $p(x)$ popisující pravděpodobnost, že dva atomy v molekule vodíku H_2 jsou vychýleny z rovnovážné polohy o odchylku x .

Pokud tvůj experiment potřebuje statistiku, asi jsi měl udělat lepší experiment.

(E.Rutherford ~ 1910)

Budeme chtít, aby

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = 0 ,$$

což znamená, že zpravidla budou atomy v rovnovážném stavu. Navíc nějaká vzdálenost vždy nastane, tedy celková pravděpodobnost je jistota

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 .$$

Fyzikální důvody vedou k tomu, že pro $\psi(x) = \sqrt{p(x)}$ je splněna rovnice

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi = 0 .$$

Zde E je celková energie, $\frac{1}{2}kx^2$ odpovídá potenciální energii, m je hmotnost, h univerzální konstanta. Při šikovně zvolené lineární substituci $u = ax$ lze rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + (2p + 1 - u^2) \psi = 0 ,$$

kde a, p jsou konstanty.

(E.Schrödinger 1887 – 1961)

17.16.2 Řešení pomocí substituce a řad

Do získané rovnice

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + (2p + 1 - u^2) \psi = 0$$

dosadíme novou funkci y pomocí substituce $\psi(u) = y(u)e^{-u^2/2}$ a dostaneme

$$\frac{d^2y}{du^2} + -2u \frac{dy}{du} + 2py = 0 .$$

Pro tuto rovnici hledáme řešení ve tvaru mocninné řady. To nás vede k rekurentní formulce pro koeficienty a následně k fundamentálnímu systému řešení

$$1 - \frac{2p}{2!}u^2 + \frac{2^2p(p-2)}{4!}u^4 - \frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}u^6 + \dots$$

a

$$u + \frac{2(p-1)}{3!}u^3 - \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}u^5 + \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}u^7 + \dots .$$

Pokud je konstanta p přirozené číslo, dostaneme řešení ve tvaru polynomu a funkce ψ vyhovuje zkoumané rovnici i s omezujícími podmínkami na její růst v nekonečnu. Pokud není konstanta p přirozené číslo, je řešením řada, jejíž součtem je funkce tak rychle rostoucí nade všechny meze, že funkce ψ nekonverguje v nekonečnu k nule.



Tak nám rychlý růst v nekonečnu pro necelá čísla přinesla kvantový pohled na svět.

17.16.3 Fyzikální smysl řešení

Vrátíme-li se k původnímu značení, fyzikálně přípustné řešení existuje pouze pro určité hodnoty v rovnici vystupujících veličin. Celková energie E musí být ve tvaru

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) h \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}}$$

pro n přirozené. To znamená, že celková energie nemůže být libovolná, ale že se může měnit pouze po malých kvantech.

(E.Schrödinger 1887 – 1961)

Příroda neříká nikdy nic jiného, než
říká moudrost.

(Iuvenalis)

17.16.4 Excitované stavy

Řešení je ve tvaru

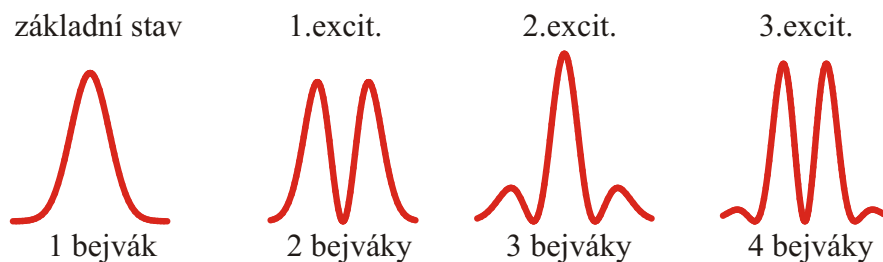
$$\psi(x) = b e^{-(ax)^2/2} H_n(ax) ,$$

kde a, b jsou konstanty a funkce H_n jsou vhodné polynomy

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} .$$

Polynom odpovídající základnímu stavu je $H_0(x) = 1$, další polynomy $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ a $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ odpovídají excitovaným stavům zkoumané molekuly.

(Ch.Hermite 1822 - 1901)

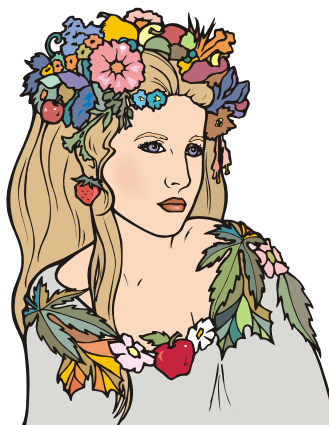


Obrázek 17.16.4: Základní a excitované stavy. Vlevo je základní stav. Atom je v pohodě. Vyšší energie mu poručí, aby se vyskytoval nejčastěji ve dvou (či více) pozicích.



Tak jsme se dozvěděli, kde by zpravidla měl být druhý atom v molekule. Jde o základní představu. V přesnějším tvaru rovnice můžeme zkoumat prostorové uspořádání a další fajnlosti.

17.17 Příroda je geniální, neplýtvá ...



Obrázek 17.17.0: Příroda to dělá jako my, ale jde jí to lépe.

17.17.1 Nejmenší akce

Mechanický systém se řídí pravidlem "nejmenší akce". To znamená, že se systém chová tak, aby neplýtval energií.

Příroda užívá všeho tak málo, jak možno.

(J.Kepler ~ 1602)

Definujeme akci A jako

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt ,$$

kde E_k je kinetická energie a E_p je potenciální energie. Pokud se částice pohybuje během času $t \in [t_1, t_2]$ z bodu P_1 do bodu P_2 , pak dráha je taková, ve které nabývá akce nulové slabé derivace. To zpravidla (pro malé časové intervaly) vede na "minimální akci".

(W.R.Hamilton 1805 - 1865)

Nejkrásnější věc, kterou můžeme objevit, je tajemství. Je to zdroj veškerého pravdivého umění a vědy.

(A.Einstein ~ 1950)

Problém nalezení nejkratších spojnic dvou bodů na ploše lze řešit pomocí variační metody nebo pomocí metody nejmenší akce. V obou postupech získáme tytéž geodetické křivky.

17.18 Relativita - ekvivalence hmoty a energie

17.18.1 Speciální teorie relativity

Základní axiomy speciální teorie relativity

- (i) Fyzikální zákony platí ve všech soustavách stejně, pokud se pohybují vůči sobě konstantní rychlostí.
- (ii) Rychlost světla je konstantní, značíme ji c .

Většina základních myšlenek vědy je v podstatě jednoduchá a lze zpravidla vyjádřit jazykem srozumitelným každému.

(A.Einstein ~ 1950)

17.18.2 Transformace času

Ve vlaku jedoucím rychlostí v_1 vzhledem k nádraží změříme, jak dlouho letí paprsek světla od stropu k zemi. Urazí ve vagónu vzdálenost D za čas $t_0 = D/c$. Vlak se mezitím posune o vzdálenost s_1 .

Pozorovatel na nádraží vidí dráhu paprsku delší a tím pádem naměří delší čas t_1

$$t_1 = \frac{\sqrt{s_1^2 + D^2}}{c},$$

tedy

$$c^2 t_1^2 = v_1^2 t_1^2 + c^2 t_0^2.$$

Čas se transformuje podle vzorečku

$$t_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

Matematika je potenciální most mezi různými disciplínami ...

(S.Markus ~ 2003)

17.18.3 Transformace hmotnosti

Uvažujeme souřadnice (x_0, y_0) pro pozorovatele ve vlaku, souřadnice (x_1, y_1) pro nádraží. Předmět upuštěný z vlaku na koleje má vertikální rychlost

$$\frac{dy_1}{dt_1} = \frac{dy_1/dt_0}{dt_1/dt_0} = \sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}} \frac{dy_0}{dt_0}$$

pro pozorovatele na nádraží. Tedy uvažované rychlosti u_1 a u_0 se přepočítávají podle vztahu

$$u_1 = \sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}} u_0 .$$

Fyzikální veličina moment setrvačnosti (=hmotnost x rychlost) je stejná ve všech soustavách, tedy

$$m_0 u_0 = m_1 u_1$$

čili

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} .$$

17.18.4 Hmota = Energie

Uvažujme těleso o hmotnosti m_0 umístěné v počátku v klidu. Budeme na těleso působit silou F ve směru osy x .

Energie, kterou těleso získá na dráze z 0 do x se rovná

$$E = \int_0^x F dx .$$

Síla F je odpovědná za změnu momentu setrvačnosti.

Tedy

$$F = \frac{d}{dt_1}(m_1 v_1) = \frac{d}{dt_1} \left(\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0 a_1}{\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} .$$

Tedy

$$E = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{m_0 a_1}{\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} dx .$$

Provedeme substituci

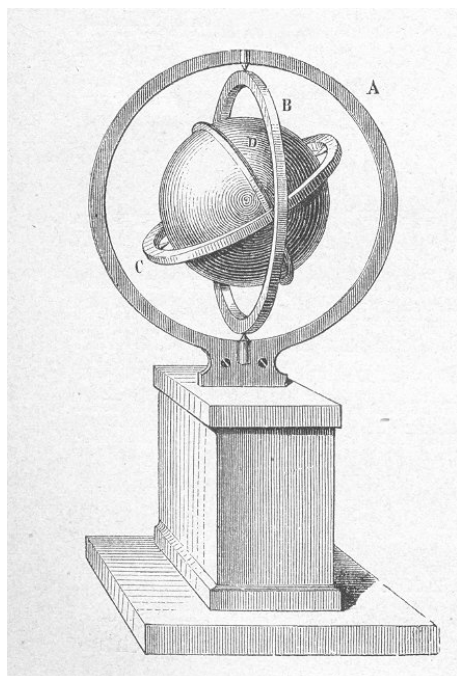
$$a_1 = \frac{dv_1}{dt_1} = \frac{dv_1}{dx} \frac{dx}{dt_1} = \frac{dv_1}{dx} v_1 .$$

Pak

$$E = \int_0^x \frac{m_0 v_1}{\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv_1}{dx} dx .$$

Tedy

$$E = \int_0^{v_1} \frac{m_0 v_1}{\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv_1 .$$



Obrázek 17.18.4: Setrvačný pohyb je užitečný.

Lehce zintegrujeme a dostaneme

$$E = c^2(m_1 - m_0) = mc^2 ,$$

kde $m = m_1 - m_0$ je změna hmotnosti.



Tady se ukázalo, že metody matematické analýzy dovedou (poté co si je vyzkoušíme ve viditelném světě) pracovat i v neviditelném světě. BTW, nečekal jsem to.

17.18.5 Délky a dálky

Pokud měříme délky paprskem světla, pak $l = ct$, tedy $l_1/t_1 = l_0/t_0$.

Není jisté, že všechno je nejisté.
(B.Pascal 1670)

17.19 Není to vidět, ale existuje to

17.19.1 Existence a neexistence řešení

Rozdělte úhel pomocí kružítko a pravítka na tři stejné úhly.



Některé úlohy v sobě mají skrytu zvláštní symetrii nebo pravidlo, které může celý problém vyřešit.

17.19.2 Ireducibilita polynomů

Nechť

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

je polynom stupně n s celočíselnými koeficienty a p je prvočíslo. Nechť

- (i) p není dělitelem a_n ,
- (ii) p je dělitelem zbývajících koeficientů a_0, \dots, a_{n-1} ,
- (iii) p^2 není dělitelem a_0 .

Pak neexistuje polynom nižšího stupně než n s racionálními koeficienty, který je dělitelem f . Tomu říkáme, že polynom p je **ireducibilní nad tělesem racionálních čísel**.

(Eisenstein)

17.19.3 Rozšíření

Nechť $K \subset L$ jsou tělesa. Uvažujeme L jako vektorový prostor nad tělesem K a značíme $L : K$ a nazýváme **rozšíření**. Pokud je dimenze $L : K$ konečná, značíme jí $[L : K]$ a říkáme že L je **konečné rozšíření** K . Pro prvek $\alpha \in L \setminus K$ označme $K(\alpha)$ nejmenší podtěleso L obsahující α .

Platí

- ⇒ Máme-li dvě rozšíření $M : L$ a $L : K$, pak platí $[M : K] = [M : L][L : K]$.
- ⇒ Je-li $[L : K]$ konečné rozšíření, pak každý prvek L je kořenem polynomu s koeficienty v K .
- ⇒ Rozšíření $K(\alpha) : K$ je konečné rozšíření, právě když je α kořenem polynomu s koeficienty v K , v tom případě dimenze $[K(\alpha) : K]$ je rovna stupni minimálního polynomu α nad K .
- ⇒ Je-li $[L : K]$ konečné rozšíření, pak $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

17.19.4 Konstrukce kružítkem a pravítkem

Nechť jsou dány body $P_0 = (0, 0)$ a $P_1 = (1, 0)$ v rovině. Bod P v rovině lze zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka, pokud existuje posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ ležících v rovině, kde body $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ a $P = P_n$, přičemž pro každé $j > 0$ platí jedna podmínka z následujících tří konstrukcí

- (i) P_j je průsečík dvou přímek a každá z nich prochází dvěma již zkonstruovanými body z P_0, \dots, P_{j-1} .

- (ii) P_j je průsečík přímky, která prochází dvěma již zkonstruovanými body z P_0, \dots, P_{j-1} , a kružnice s již sestrojeným středem, která prochází již sestrojeným bodem.
- (iii) P_j je průsečík dvou kružnic s již sestrojeným středem, které procházejí již sestrojeným bodem.

Pak říkáme, že P lze sestrojit kružítkem a pravítkem.

17.19.5 Konstrukce a rozšíření

Nechť $P = (x, y)$ lze sestrojit kružítkem a pravítkem. Pak rozšíření $[\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}] = 2^r$ pro jisté r .

Důkaz: Postupně ke \mathbb{Q} přidáváme souřadnice bodů P_2, \dots, P_n . Každá taková souřadnice je kořenem nejvýše kvadratické rovnice s koeficienty v předchozích rozšířeních. Tím se dimenze rozšíření $[K(\alpha) : K]$ v každém kroku rovná jedničce nebo dvojce. Tyto koeficienty se pak násobí. ■

17.19.6 Věta (Nelze roztřít úhel)

Pomocí kružítká a pravítka nelze rozdělit obecný úhel na třetiny.

(P.L.Wantzel 1837)

Důkaz: Pokud dovedeme pomocí kružítká a pravítka rozdělit každý úhel na třetiny, pak pro $\theta = \pi/3$ dovedeme sestrojit úhel $\pi/9$ a tedy i $\cos \pi/9$. Toto číslo je vyhovuje rovnici $8a^3 - 6a - 1 = 0$. Pak dovedeme sestrojit i $\beta = 2\alpha - 1$ a β je kořenem ireducibilního polynomu $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$. Pak $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2^r$ musí být dělitelné 3. Spor. ■

17.19.7 Věta (Nelze zdvojit krychli)

Pomocí kružítká a pravítka nelze sestrojit hranu krychle, která má objem 2.

Důkaz: Pokud dovedeme pomocí kružítká a pravítka sestrojit $\alpha = \sqrt[3]{2}$, pak α je kořenem ireducibilního polynomu $f(x) = x^3 - 2$. Pak $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2^r$ musí být dělitelné 3. Spor. ■

V důsledku toho nelze sestrojit pomocí kružítká a pravítka pravidelný 18-ti úhelník. To je možné právě tehdy, když $n = 2^s p_1 \dots p_t$, kde p_j jsou různá prvočísla tvaru $2^k + 1$.

(Fermat ~ 1640)

17.19.8 Věta (Kvadratura kruhu)

Lze dokázat, že nelze pomocí kružítká a pravítka sestrojit $\sqrt{\pi}$. Tedy nejde provést kvadraturu kruhu.

(F.Lindenmann 1882)

17.19.9 Grupa rozšíření

Pro rozšíření $L : K$ uvažujeme všechny automorfismy $L \rightarrow L$, které jsou identitou na K , s operací skládání. Grupu těchto automorfismů budeme nazývat **grupa rozšíření** a značit $\Gamma(L : K)$.

Za určitých okolností existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi podgrupami $\Gamma(L : K)$ a "mezitělesy" rozšíření $L : K$.

(Galois)

17.19.10 Rovnice 5-tého stupně není řešitelná

Neexistuje vzoreček na kořeny ireducibilního polynomu 5-tého stupně s racionálními koeficienty.

(N.H.Abel ~ 1824, Galois)

Naneštěstí se málo ví, že nejužitečnější vědecké knihy jsou ty, ve kterých autor jasně říká to, co neví. Autor nejvíce zasáhne čtenáře když zatají obtížnosti.
(E.Galois)

Důkaz: Půjde o boj komutativity a nekomutativity. Vzoreček na spočítání spočívá v postupném sčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pouze odmocňování nás donutí rozšířit těleso racionálních čísel. Pokud rozšiřujeme těleso, průběžně vytváříme grupu rozšíření. Vždy dostaneme komutativní grupu, protože grupa rozšíření

$$\mathbb{Q}(c^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{2\pi i}{n}}) : \mathbb{Q}$$

je komutativní.

Přidání jednoho kořene α vytvoří mezistupeň rošíření $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ se stupněm $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$. To odpovídá tomu, že grupa rozšíření obsahuje 5-cyklus. Pokud má rovnice právě dva různé komplexně sdružené kořeny, obsahuje grupa rozšíření zobrazení $z \mapsto \bar{z}$, tedy 2-cyklus. Pokud je v grupě 2-cyklus i 5-ti cyklus, obsahuje celou grupu S_5 permutací pěti prvků. Ta obsahuje jako podgrupu grupu všech sudých permutací, která nemá rozklad na "komutativní faktory". To jde použít například v případě polynomu $x^5 - 6x + 3$. ■

Někde přesnost vyždímá veškerou šťávu a zbyde humus.
(G.F.Simmons 1972)

17.19.11 O řešení rovnic

Pro lineární diferenciální rovnici s polynomiálními koeficienty uvažujeme grupu automorfismů nejmenšího tělesa funkcí obsahujícího všechna řešení zadané rovnice. Integrovatelnost rovnice závisí na "skoro komutativitě" grupy automorfismů.

(Morales, Ramis)

17.19.12 O grupách u diferenciálních rovnic

Pro diferenciální rovnici $F(x, y, y') = 0$ je možné sestavit vhodnou grupu transformací roviny (x, y) . S tou pak je možné určit vhodnou substituci, která převede danou diferenciální rovnici na lineární, což vede k řešení dané diferenciální rovnice,

Pokud je diferenciální rovnice invariantní na určité transformace, je pak na tyto transformace uzavřen i systém řešení. Tak je možné z jednoho řešení vygenerovat všechna.

To jde provést pro popsané typy diferenciálních rovnic. Pro zbývající typy jde dokázat, že řešit pomocí integrace nepůjdou.

(S.Lie 1883)

Někdy raději nepřesně, ale porozumitelně, než naopak.

(G.F.Simmons 1972)

17.20 Čísla jsme si vymysleli, prostor však je dán . . .

17.20.1 Nové geometrie

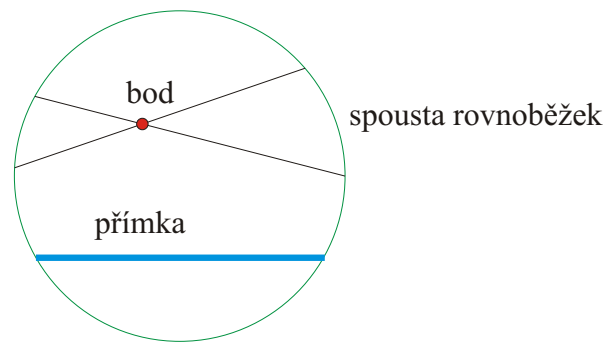
Uvažujeme geometrii uvnitř jednotkového kruhu, "body" jsou body, "přímky" jsou úsečky spojující body na hranici kruhu. Pak neplatí axiom o rovnoběžkách.

(E.Beltrami 1868, F.Klein, C.F.Gauss ~ 1800, Lobačevskij 1829, Bolyai 1832, Klein, H.J.Poincaré ~ 1910)

Z ničeho jsem vytvořil podivný nový svět.

(J.Bolyai ~ 1830)

Konstrukce nových geometrií dokázaly nezávislost axiomu o rovnoběžkách.



Obrázek 17.20.1: Daným bodem k dané přímce ...

Není to jednou nebo dvakrát, ale bezpočtukrát, že se objeví ve světě ta samá idea.

(Aristotelés ze Stageiry ~ -350)

Jaký je ve skutečnosti skutečný prostor nevíme.

Tak daleko, jak se matematici zabývají realitou, tak jsou nejistí. A jak moc jsou jistí, tak se nezabývají realitou.

(A.Einstein ~ 1950)

Fyzikální důvodu vedou k tomu, že má prostor dimenzi 3. Navíc je rozumné do rozměrů zahrnout i čas, tak získáme čtyřrozměrný časoprostor.



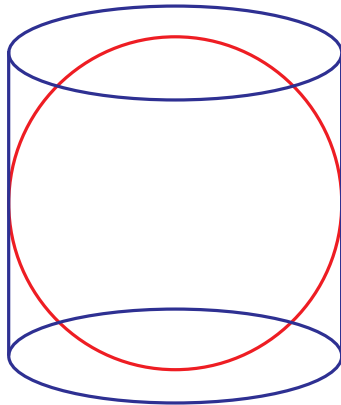
Někdy si fyzici představují, že prostor má tolik rozměrů, kolik máme prstů na ruce, někdy ještě o jedničku víc. Někteří se i s prsty na nohou dopočítají k dimenzi 26, sám nevím jak ...

17.21 Mix

17.21.1 Plášť válce a povrch koule

Válec opsaný kouli má plášť o stejné velikosti jako povrch koule.

(Archimédés ze Syrákús ~ -250)



Obrázek 17.21.1: Válec opsaný kouli.



Podle tohoto obrázku poznal M.T. Cicero Archimédův náhrobek a dal jej restaurovat. Říká se, že to byl jediný podstatný příspěvek starověkého Říma k čisté matematice.

17.21.2 Není to $22/7$, lituji ...

Nechť $\pi = a/b$ je podíl přirozených čísel a a b . Definujeme funkci

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{c_k x^k}{n!}.$$

Pozorování

- ⇒ Hodnota funkce f i jejích derivací v počátku je celočíselná.
- ⇒ To samé platí díky symetrii i v bodě $x = \pi = a/b$.
- ⇒ Nyní integrál

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx$$

je celočíselný, neboť

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(\pi) + F(0),$$

kde

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

protože

$$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x) = f(x) \sin x.$$

a funkce F v bodech 0 a π je celočíselná.

⇒ Na druhou stranu je

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < \pi \frac{\pi^n a^n}{n!} ,$$

Tedy pro velká n nemůže být tento integrál celočíselný. Spor.

17.21.3 A umocnil se ...

Zvolme kladné číslo x a uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ definovanou rekurentně

$$x_0 = x , \quad x_{n+1} = x^{x^n} .$$

Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje právě tehdy, když

$$\left(\frac{1}{e}\right)^e \leq x \leq e^{\left(\frac{1}{e}\right)} .$$

(L.Euler 1777)

17.21.4 Objem prostorové koule

Zkoumejme funkci

$$f(y) = \int_{\|x\|^2 \leq y} 1 \, dx ,$$

která počítá v \mathbb{R}^n objem koule o poloměru y . Spočítáme její exponenciální transformaci

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zy} f(y) \, dy .$$

Počítáme

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zy} f(y) \, dy = \int_{\|x\|^2 \leq y} 1 \, dx \, dy = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)} \frac{\Gamma(1 + n/2)}{z^{1+n/2}} .$$

Tedy lze spočítat inverzní exponenciální transformace

$$f(y) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)} y^{n/2} .$$

17.21.5 Rotující hřídel

Máme rovnou hřídel o délce l rotující ve dvou úzkých ložiskách. Při rotování je průhyb y funkcí bodu x . Systém v jednoduchém modelu vyhovuje při vhodných konstantách rovnici

$$y^{(iv)}(x) = \omega^2 y(x) , \quad y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0 .$$

Charakteristická rovnice má kořeny $\pm\sqrt{\omega}$, $\pm i\sqrt{\omega}$. Řešení tedy má tvar

$$y(x) = a \sinh x\sqrt{\omega} + b \sin x\sqrt{\omega}$$

a netriviální řešení existuje, pokud

$$\omega^2 = n \frac{\pi}{l} , \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$



Tedy pro jisté úhlové rychlosti hřídel vydává zvuky ...

17.21.6 Elektrický obvod jako kalkulačka

Zapojíme k baterii o napětí V jednoduchý obvod se dvěma prvky, odporem R a cívkou s induktancí L . Pak proud I splňuje diferenciální rovnici

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V, \quad I(0) = 0 .$$

Pak samozřejmě $I(t) = (V/R)(1 - e^{-Rt/L})$ je řešení a případné měřidlo proudu v obvodu nám ukazuje hodnoty docela užitečné funkce ...

Také matematika ke svému obnovení potřebuje opory. Přestože je schopna sama růst v rámci formálního světa, její obnova přichází z podnětu, které jí přinášejí experimentální vědy nebo prosté kontakty s vnějším světem a se životem.

(G.Choquet ~ 1990)

17.21.7 Hračky a diferenciální rovnice

Soustava

$$\frac{dx}{dt} = x(x + y - 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(x - 1 + 3)$$

demonstruje všechny typy specialit ve fázové rovině. Další hezké rovnice jsou

$$x'' + x = x^3, \quad x'' + x^3 = x$$

17.21.8 Jak snímat a prodávat

Můžeme si sejmout balíček karet a ponechat si sejmutou kartu, nebo sejmout ještě jednu a vzít si sejmutou kartu. Jak sejmout (pravděpodobně) co nejlépe?

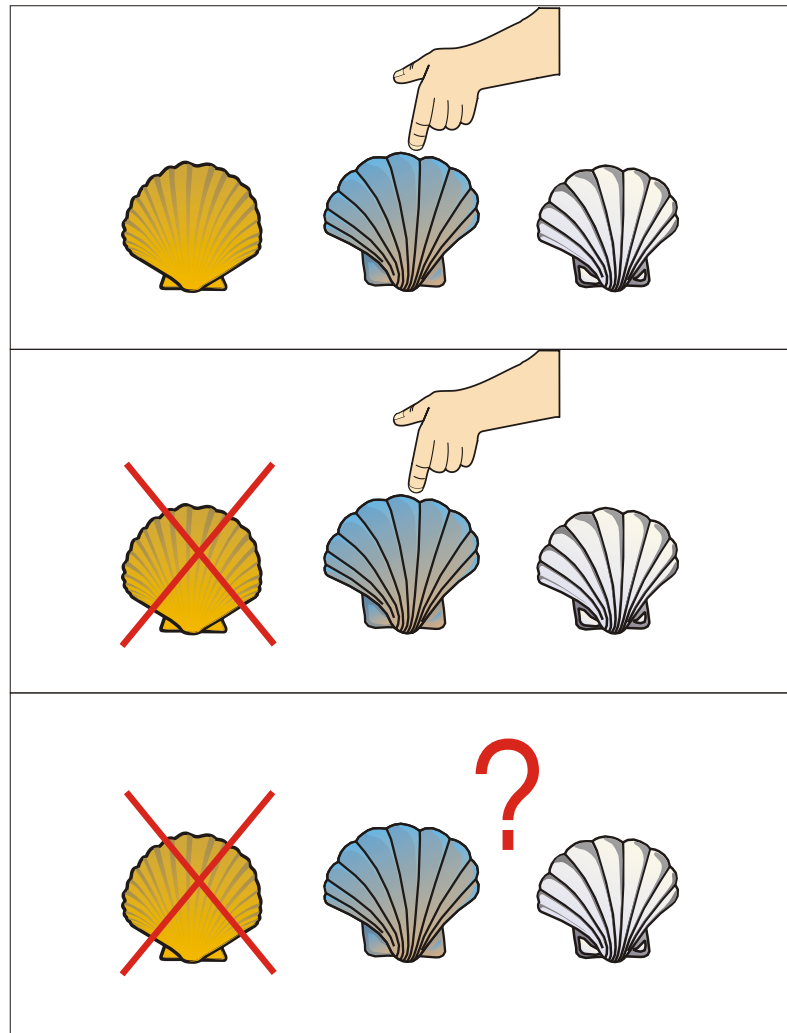
Správný postup zná každý karbaník. Předem si řekne, že v prvním sejmutí bude spokojen s kartou alespoň průměrnou (spodek). Pokud sejme poprvé hůře, riskne ještě jedno snímání. Co v průměru sejme?

Podobně můžeme prodávat něco dvěma (nebo více) kupcům, kteří chtějí koupit vaši věc a chtějí hned odpověď na jejich nabídku.

17.21.9 O poctivém skořápkářovi

Skořápkář schová pod jednu skořáčku perlu a nechá hádat, pod kterou je. Po označení dá druhou šanci. Otočí jednu ze dvou neoznačených skořápek, pod kterou není perla a my můžeme změnit naši volbu. Vyplatí se to?

ANO. Zvýšíme dvojnásobně pravděpodobnost, že vyhraje perlu. Je to tak.



Obrázek 17.21.9: Je to nečekané, ale vyplatí se změnit volbu.

Když řeší úlohu někdo jiný, všechno je jasné, když řešíš sám, nic tě nenapadá.
(L.Euler ~ 1740)

17.21.10 Jak se otáčet

Otáčení bodů v rovině jde realizovat pomocí zápisu bodů roviny jako komplexních čísel $a + ib$ a vynásobením komplexní jednotkou i . Podobná situace se zvládne ve vyšších dimenzích přidáním nových čísel podobných číslu i .

Uvažujeme množinu

$$H = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ a $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Tuto množinu nazveme **algebra kvaternionů** nad tělesem reálných čísel (jde pracovat i nad jiným tělesem), někdy prvku této algebry říkáme **hyperkomplexní číslo**.

(H.G.Grassman 1844)



Prostě se k reálným číslům přidá místo komplexní jednotky, která otáčela v rovině, rovnou více čísel, které otáčejí v prostoru. (Jakém?)

17.21.11 O počasí

Počasí bylo každý rok "průměrné" (průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.

Označme $x_1 = A$, $x_2 = B$. Platí

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} .$$

Nabízí se konstantní řešení $y_n = 1$. To nevyhovuje svými prvními členy. Další řešení se nabízí $z_n = (-1/2)^n$. To také nevyhovuje svými prvními členy. Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počasí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$A = \alpha \cdot 1 + \beta \frac{-1}{2} \tag{1}$$

$$B = \alpha \cdot 1 + \beta \frac{1}{4} \tag{2}$$

(porovnáme první dva členy posloupností).

Počasí se jistě ustálí na $(A + 2B)/3$.



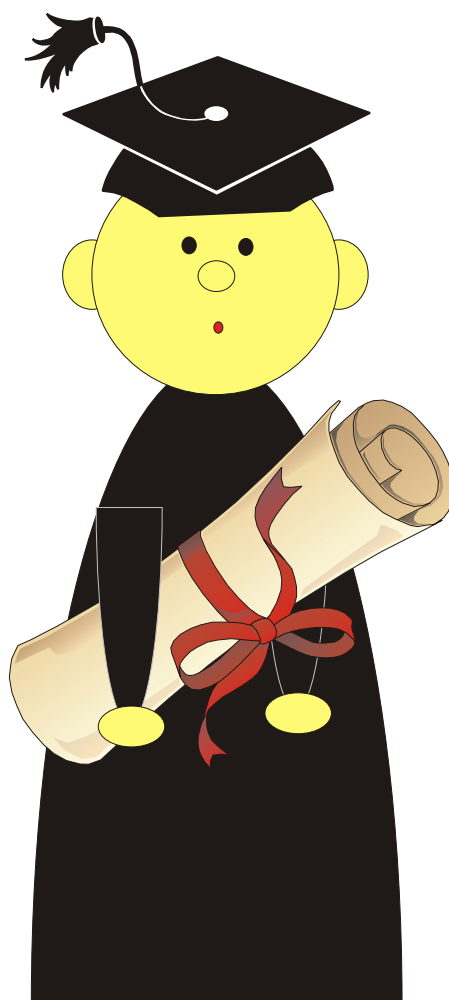
Pokud by to ale ve skutečnosti šlo v čase "v protisměru", to by byla nádílka.

Kapitola 18

Problémy pro magistry



y náročnější problémy přinášejí velké uspokojení.



Obrázek 18.0.0: Magistr je takový malý človíček s diplomem.

18.1 O periodických přírodních jevech

18.1.1 O jablkách

Každý druhý rok je velká úroda jablek. Podobně se některé ryby objevují ve velkém množství každý druhý rok. Můžeme si popsat tuto situaci jako diskrétní záležitost.

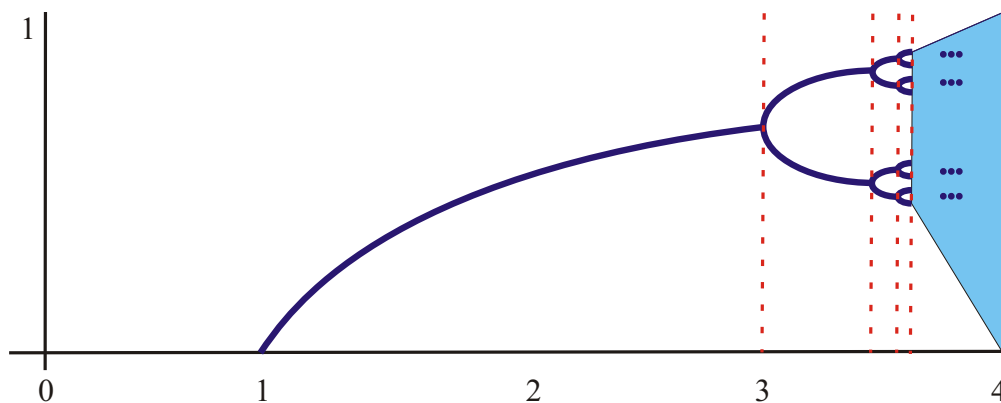
Zvolíme funkci f a počáteční hodnotu x dané populace. Pak $f(x)$, $f(f(x))$, ... budou odpovídat stavům za rok, za dva roky a tak dál. Zkusíme si funkci $f(x) = ke^{-x}x$. Pro $k < 1$ má iterovaná posloupnost $\{f^k(x)\}$ limitu 0. Pro $1 < k < e^2$ má posloupnost jednu kladnou limitu. Pak nastane rozvětvení a pro určitý interval parametru k jsou právě dva hromadné body. Pro rostoucí hodnotu parametru k se vždy zdvojnásobí počet hromadných bodů.

Délky intervalů mezi dvěma následujícími hodnotami parametru, kdy nastává rozvětvení, tvoří přibližně geometrickou posloupnost s koeficientem $1/4, 69 \dots$

(M. Feigenbaum)



Takto se to chová "zpravidla". Ta konstanta funguje vždy stejná.



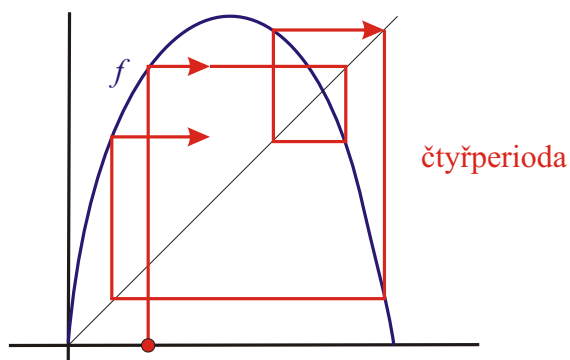
Obrázek 18.1.1: Podobné chování předvádí iterování funkce $x \mapsto kx(1-x)$. Napřed je jenom jeden limitní bod, pro parametr větší než 3 jsou dva, ...

18.1.2 O bifurkacích

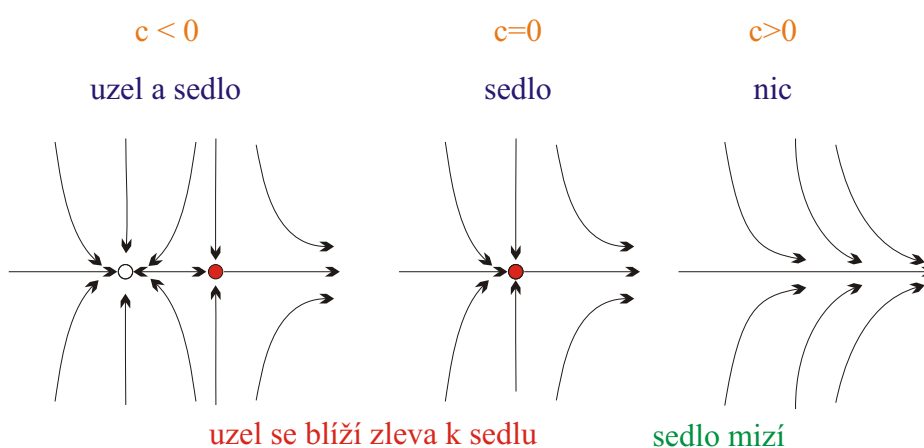
Pro systém

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 + c \\ \frac{dy}{dt} &= -y \end{aligned}$$

pozorujeme chování trajektorií s měnící se hodnotou parametru c .



Obrázek 18.1.1: Zacyklené hledání pevného bodu.

Obrázek 18.1.2: Pro záporná c má systém jeden stabilní uzel. Pro nulu stabilní uzel ztrácí stabilitu a slepí se se sedlem. Toto sedlo pro kladné hodnoty parametru zmizí.

18.2 Pružnost a pevnost

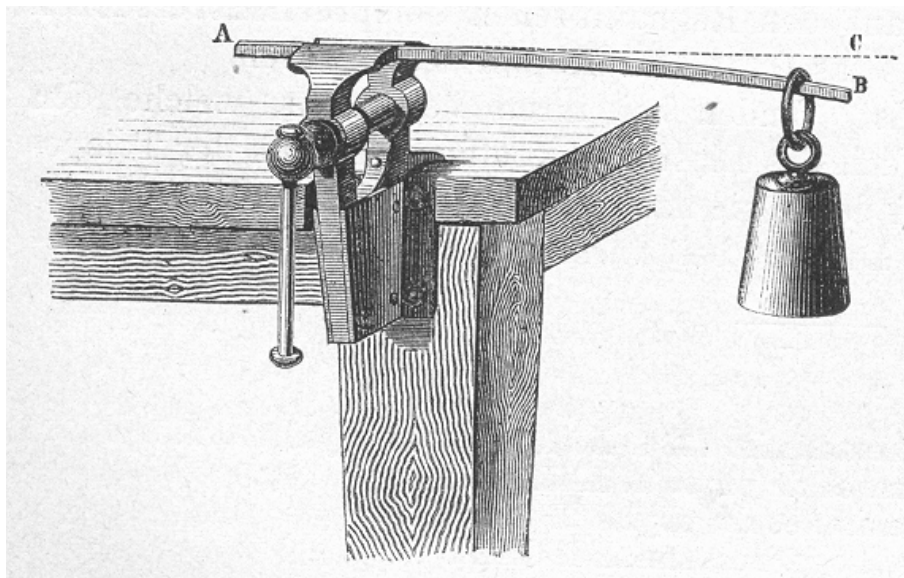
18.2.1 Rovnice prutu

Rovnici prutu délky 1 lze napsat ve tvaru

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x)I(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] + Q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

kde

- ⇒ E je modul pružnosti,
- ⇒ I moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose,
- ⇒ Q koeficient poddajnosti podloží,
- ⇒ f vertikální zatížení.



Obrázek 18.2.1: Průhyb prutu vede k počítání diferenciálních rovnic.

18.2.2 Pružná membrána (a tepelná rovnováha)

Pružná membrána (popřípadě rovnovážný stav tepla) vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

18.2.3 Průhyb membrány (a tepelná rovnováha)

Průhyb membrány zatížené vertikálními silami (případně rozložení teploty při ustáleném vedení tepla v prostředí o konstantní tepelné vodivosti a s vnitřními zdroji tepla nezávislými na čase) vyhovuje

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) ,$$

kde konstanta k odpovídá pružnosti (tepelné vodivosti).

(Poisson)

18.2.4 Průhyb tenké desky

Rovnice průhybu tenké desky je

$$\Delta^2 u = f .$$

18.2.5 Pružně plastická deformace

Pružně plastická deformace rovinného tělesa vyhovuje rovnici

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(m(|\text{grad } u|^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(m(|\text{grad } u|^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) ,$$

kde m charakterizuje materiálové vlastnosti tělesa.

Také je to rovnice stacionárního magnetického pole v elektrickém stroji, kde m charakterizuje permeabilita prostředí.

Pokud je

$$m(t) = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} t^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}.$$

kde $\gamma > 1$ je konstanta, jedná se o proudění plynů.

Pokud je

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

a $f = 0$, pak řešíme problém minimální plochy.

Ty chceš vědět, proč jsem přerušil tvůj učený hovor, abych se ohlédl za hezkou ženou? Lituji tě můj příteli, protože to byla otázka slepce.

(Aristotelés ze Stageiry ~ -350)

18.3 Tepelná rovnováha

18.3.1 Harmonické funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Spojitá funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými druhými parciálními derivacemi splňující rovnici tepelné rovnováhy

$$\Delta f = 0$$

se nazývá **harmonická funkce**, operátor

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

budeme nazývat **operátor tepelné rovnováhy**.

18.3.2 Okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina a funkce f je spojitá na ∂U . Budeme hledat funkci u na U splňující v U rovnici

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

a vyhovující okrajové podmínce $u = f$ na ∂U . Této úloze budeme říkat **okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy**.

(G.P.L.Dirichlet ~ 1840)

18.3.3 Řešení pro kouli

Existuje explicitní integrální vyjádření řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy pro kouli. Pro $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ označme

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}, \quad S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| = r\}.$$

Funkci funkci $f : S_r(a) \rightarrow \mathbb{R}^*$ integrovatelnou podle $(m - 1)$ -rozměrné míry povrchové míry σ na R^m přiřadíme funkci $Hf : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$Hf(x) = \frac{1}{\sigma(S_r(a))} \int_{S_r(a)} f(y) \frac{r^2 - |x - a|^2}{|x - y|^m} r^{m-2} d\sigma(y).$$

Funkce Hf je harmonická a nekonečně derivovatelná na $B_r(a)$ a jde spojitě rozšířit na $S_r(a)$ hodnotou f v bodech spojitosti funkce f . Pro spojitou funkci f získáme tedy řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy na kouli. Toto řešení je určeno jednoznačně.

(Poisson)

18.3.4 Hlavní problém

Otázka je, pro které množiny U existuje řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy pro každou spojitou okrajovou podmínku f . Takovou množinu U budeme nazývat **regulární množina**, v opačném případě **iregulární množina**. Například koule je regulární množina. Ukáže se, že koule s vyjmutým středem není regulární množina.



Chování ve středu je vynucené chováním na povrchu koule.

18.3.5 Nezáporné harmonické funkce

Pro nezápornou harmonickou funkci h na $B_r(a)$ existuje právě jedna nezáporná topologická míra μ na $S_r(a)$ tak, že

$$h(x) = \frac{1}{\sigma(S_r(a))} \int_{S_r(a)} \frac{r^2 - |x - a|^2}{|x - y|^m} r^{m-2} d\mu(y).$$

18.3.6 Vlastnost průměru

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje **vlastnost objemového průměru**, pokud

$$f(a) = \frac{1}{m(B_r(a))} \int_{B_r(a)} f(x) dm,$$

kde m je m -rozměrná míra na R^m , platí pro každou kouli $B_r(a) \subset U$ o poloměru r a středu a .

Řekneme, že funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje **vlastnost povrchového průměru**, pokud

$$f(a) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(a))} \int_{\partial B_r(a)} f(x) d\sigma,$$

kde σ je $(m - 1)$ -rozměrná míra na R^m , platí pro každou kouli $B_r(a) \subset U$ o poloměru r a středu a .

18.3.7 Věta o průměru

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Následující podmínky jsou pro funkci f ekvivalentní

- ⇒ Funkce má vlastnost objemového průměru.
- ⇒ Funkce má vlastnost povrchového průměru.
- ⇒ Funkce je harmonická.

18.3.8 Vlastnosti harmonických funkcí

Platí

- ⇒ Princip minima: Harmonické funkce nenabývají ostrých extrémů ve vnitřních bodech.
- ⇒ Lokálně stejnoměrná limita harmonických funkcí je harmonická.
- ⇒ Monotonní limita harmonických funkcí je buď harmonická, nebo identicky rovna $\pm\infty$.



Podobně jako pro holomorfní funkci.

18.3.9 Fundamentální řešení a harmonické jádro

Označme ε_m fundamentální řešení rovnice

$$\Delta \varepsilon_m = \delta(x) .$$

Pro $m = 3$ dostaneme

$$\varepsilon_3(x) = \frac{1}{4\pi|x|} .$$

Pro $m = 2$ dostaneme

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x| .$$

Pro $x, y \in \mathbb{R}^m$ definujeme $N(x, y) = \varepsilon(|x - y|)$, budeme této funkci říkat **harmonické jádro**.

18.3.10 Superharmonické funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina. Zdola polospojité funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, která má **vlastnost povrchového nadprůměru**

$$f(a) \geq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(a))} \int_{\partial B_r(a)} f(x) d\sigma(x)$$

kdykoliv $\overline{B_r(a)} \subset U$, se nazývá **hyperharmonická funkce**. Pokud je v každé komponentě U bod, v němž je funkce f konečná, budeme jí říkat **superharmonická funkce**.

18.3.11 Harmonický potenciál

Pro (nezápornou) topologickou míru (konečnou na kompaktech) μ v \mathbb{R}^m (v případě $m = 2$ s kompaktním nosičem) definujeme **harmonický potenciál** předpisem

$$N\mu(x) = \int N(x, y) d\mu(y) .$$

Harmonický potenciál je superharmonická funkce na \mathbb{R}^m a pokud má míra μ navíc kompaktní nosič, je harmonický potenciál harmonický mimo nosič míry μ . Ve smyslu distribucí platí

$$\Delta(-N\mu) = \mu .$$

18.3.12 Vlastnosti superharmonických funkcí

Platí

⇒ Superharmonické funkce jsou lokálně integrovatelné.

18.3.13 Lokální harmonická modifikace

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a $V = \overline{B_r(a)} \subset U$. Funkci f hyperharmonickou na U modifikujeme na V tak, že na V najdeme řešení okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy s okrajovou podmínkou $f \upharpoonright \partial V$. Takto upravenou funkci budeme nazývat **lokální harmonická modifikace** funkce f vzhledem k V a značit f_V . Při lokální harmonické modifikaci hodnota funkce f neporoste, vzniklá funkce bude opět hyperharmonická.

18.3.14 Regularita distributivního řešení

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a f je lokálně integrovatelné distributivní řešení rovnice tepelné rovnováhy

$$\Delta f = 0 .$$

Pak existuje funkce h harmonická na U tak, že $h = f$ skoro všude na U .

18.3.15 Rozklad superharmonické funkce

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina a u je funkce superharmonická na U . Pak existuje právě jedna topologická míra μ na U tak, že ve smyslu distribucí platí

$$\Delta(-u) = \mu .$$

Ke každé omezené otevřené množině V , pro niž $\overline{V} \subset U$, existuje funkce h^V harmonická na V taková, že na V platí

$$u = N(\mu \upharpoonright V) + h^V .$$

Nechť $m > 2$ a funkce u je superharmonická na \mathbb{R}^m . Jestliže je dána funkce u harmonická na \mathbb{R}^m splňující $h \leq u$, pak existuje právě jedna topologická míra μ a právě jedna nezáporná konstanta c tak, že

$$u = N\mu + h + c ,$$

přitom je $h + c$ největší harmonická minoranta funkce u .

18.3.16 Harmonický operátor

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina. Existuje právě jeden operátor H přiřazující funkci f spojitě na ∂U funkci Hf harmonickou na U splňující

- (i) H je lineární,
- (ii) H je nezáporný (obraz nezáporné funkce je nezáporný),
- (iii) Pokud okrajová úloha pro rovnici tepelné rovnováhy s okrajovou podmínkou f má řešení u , pak $u = Hf$.

(Keldyš)

18.3.17 Konstrukce harmonického operátoru

Nechť je $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^*$ libovolná funkce. Říkáme, že funkce $u : U \rightarrow \mathbb{R}^*$ je **horní funkce** k funkci f , je-li u superharmonická na U a pro body z na hranici ∂U platí

$$\liminf_{x \rightarrow z} u(x) \geq f(z) , \quad \liminf_{x \rightarrow z} u(x) \geq -\infty .$$

Označme $\overline{H}f$ infimum všech horních funkcí k funkci f a nazveme jej **horní řešení** okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy. Podobně u je **dolní funkce** k funkci f , pokud $-u$ je horní funkce k $-f$. Dostaneme pak $\underline{H}f$ jako suprémum všech dolních funkcí k funkci f a nazveme jej **dolní řešení** okrajové úlohy pro rovnici tepelné rovnováhy.

Pro spojitou funkci platí $Hf = \overline{H}f = \underline{H}f$.

(O.Perron, N.Wiener, M.Brelot)

18.3.18 Regulární hraniční body

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast a $z \in \partial U$. Říkáme, že z je **regulární bod**, jestliže pro každou funkci f spojitou na hranici ∂U platí

$$\lim_{x \rightarrow z} Hf(x) = f(z) .$$

Pokud toto neplatí, jde o **iregulární bod**.

Dobrá matematika na jakékoliv úrovni by měla obsahovat společenský rozměr, dávat to vztahu myšlenky, motivace, vztah k jiným disciplínám, estetický, filosofický a historický aspekt.

(S.Markus ~ 2003)



Obrázek 18.3.18: Střecha s regulárním bodem.

18.3.19 Věta (Regularita hraničního bodu)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast a $z \in \partial U$. Bod z je regulárním bodem právě tehdy, když existuje otevřená množina V a kladná funkce u superharmonická na $U \cap V$ taková, že

$$\lim_{x \rightarrow z} u(x) = 0 .$$

18.3.20 Kuželový test

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast a $z \in \partial U$. Jestliže existuje kužel T protínající U v okolí bodu z pouze v bodě z , pak bod z je regulární bod. V rovině stačí úsečka.

Kužel je například množina

$$T = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0 \text{ \& } x_1^2 \geq x_2^2 + \dots + x_m^2\} .$$

18.3.21 Kapacita

Mějme kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$. Definujeme

$$\text{cap}(K) = \sup\{\mu(K)\} ,$$

kde suprémum se počítá přes všechny topologické míry s kompaktním nosičem v K , jejichž harmonický potenciál $N\mu$ je nanejvýš 1.

Pak pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ definujeme

$$\text{cap}(M) = \sup\{\text{cap}(K) : K \subset M\} .$$

18.3.22 Věta (O kapacitě)

Nechť máme kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$ a $\text{cap } K > 0$. Pak existuje nenulová topologická míra s kompaktním nosičem v K taková, že harmonický potenciál $N\mu$ je spojitý.

18.3.23 Věta (Kapacita a regularita)

Množina iregulárních bodů oblasti má nulovou kapacitu.

18.4 Les metod



Prostory integrovatelných distribucí jsou nastoupeny a dobrovolně se hlásí do služby v první linii zákopové války s nelítostnými diferenciálními rovnicemi. Do útoku!!!

18.4.1 Slabé řešení

Řekneme, že funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ je **slabé řešení** diferenciální rovnice

$$Au = f ,$$

kde f je funkcionál nad prostorem $W_0^{1,p}(\Omega)$, A operátor z $W^{1,p}(\Omega)$ do duálního prostoru $W^{1,p}(\Omega)^*$, pokud pro všechna $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ platí

$$(Au, v) = (f, v) .$$

Pokud je slabé řešení dostatečně hladké a diferenciální rovnice má dostatečně hladké koeficienty, existuje řešení klasické a je rovno slabému řešení.

Okrajové podmínky ve formě funkce na hranici se interpretují ve smyslu stopy řešení. Tím se zmenší prostor řešení.



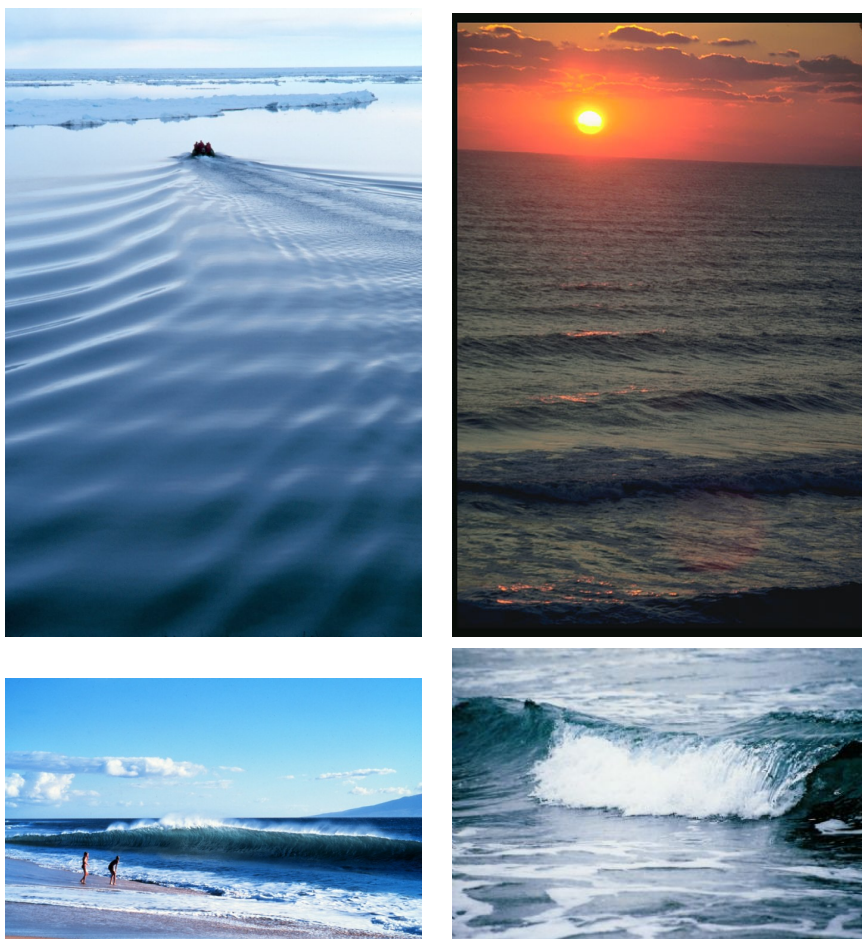
Jsou možné i jiné podmínky.

18.4.2 Slabé řešení a variační úloha

Slabé řešení $Au = f$ můžeme hledat tak, že sestavíme úlohu na minimum jistého funkcionálu, pro nějž bude naše rovnice variační rovnicí.

Například pro funkce $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ a pro $f \in L^1(0,1)$ budeme zkoumat funkcionál

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4(x) dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx .$$



Obrázek 18.4.1: Vlny v akci ...

Tento funkcionál je potenciálem okrajové úlohy

$$-u''(x) + u^3(x) = f(x) , \quad x \in (0, 1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 .$$

18.4.3 Problém - s hezkými operátory není problém

Nechť je X reflexivní úplný normovaný prostor. Nechť je $T : X \rightarrow X^*$ omezený a slabě spojitý operátor splňující

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{(Tu, u)}{|u|} = \infty$$

nazývanou **podmínka koercivity** a podmínku

$$(Tu - tv, u - v) \geq 0 , \quad u, v \in X ,$$

nazývanou **podmínka monotonie**.

Pak má pro každé $f \in X^*$ rovnice

$$Tu = f$$

alespoň jedno řešení $u \in X$.

(Browder)

18.5 Provázanost topologie a integrování

18.5.1 Simplexy a komplexy

Konvexní obal n lineárně nezávislých bodů v \mathbb{R}^{n+1} se bude nazývat n -**simplex** v \mathbb{R}^m . Budeme uvažovat "slepeniny" konečně mnoha simplexů a budeme je nazývat **komplex**. Navíc můžeme komplexy psát jako formální součet simplexů. Koeficienty mohou být reálná čísla.

Pokud vynecháme jeden z vrcholů n -simplexu, dostaneme $(n-1)$ -simplex, který budeme nazývat **stěna simplexu**. Soubor stěn simplexu Δ budeme značit $\partial\Delta$.

Uvažujeme od nynějška simplexy odvozené od uspořádané posloupnosti vrcholů. Tím se jeho stěny a hrany stanou orientovanými. Například píšeme hranici úsečky

$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0] ,$$

hranice trojúhelníku

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

a hranice čtyřstěnu

$$\partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2] .$$

Hranice hranice je 0.



Pracujeme vlastně s grupami.

18.5.2 Řetězy

Označíme $\Delta_n(X)$ komutativní grupu s bází tvořenou n -simplexy v X a budeme tuto grupu nazývat Δ -**komplex prostoru** X . Prvek $\Delta_n(X)$ budeme nazývat n -**řetěz**. Označme

$$\partial : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

hraniční homomorfismus.

18.5.3 Řetěz komplexů

Uvažujme schéma

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1 \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 .$$

Budeme toto schéma nazývat **řetěz komplexů**.

Díky tomu, že hranice hranice je nulová, t.j. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ platí, že $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{Ker } \partial_n$. Tedy lze vytvořit faktorovou grupu. Označme $H_n = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ a budeme tuto grupu nazývat n -tá **homologická grupa** řetězu komplexů.

18.5.4 Derivace derivace a co dál

Lze ukázat, že

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0 \quad .$$

Obecně lze ukázat, že $d^2 = 0$, kde chápeme operátor d jako operátor derivování diferenciální formy. Diferenciální 2-forma ω je například formální výraz

$$\omega = A dy dz + B dz dx + C dx dy \quad .$$

Derivace diferenciální formy ω je pak 3-forma

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz \quad .$$

Diferenciální 0-forma je hladká reálná funkce $f(x_1, \dots, x_n)$. Její derivace je 1-forma

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad .$$

Je-li $\omega = f dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$ diferenciální k -forma, její derivace je diferenciální $(k+1)$ -forma

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dx_{j_1} \dots dx_{j_k}$$

s konvencí, že $dx dx = 0$.

Diferenciální formy tvoří posloupnost komutativních grup $\{\Omega^k : k \in \mathbb{N}\}$ a homomorfismů $d^k : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ s $d^{k+1}d^k = 0$.

(H.J.Poincaré ~ 1910)

18.5.5 Kohomologie

Vytvoříme faktorgrupu p -forem na varietě M , které mají nulovou derivaci, podle podgrupy p -forem, které jsou derivací nějaké $(p-1)$ -formy na M . Získáme grupu $H^p(M)$, kterou budeme nazývat **kohomologická grupa**.

18.5.6 Věta (Dualita forem a komplexů)

Pro p -řetěz $c = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n$, kde a_i jsou čísla a s_i jsou simplexy, a pro p -formu ω definujeme

$$(c, \omega) = \sum_i a_i \int_{s_i} \omega \quad .$$

Pak platí

$$(\partial c, \omega) = (c, d\omega) \quad .$$

Málo, ale zralého.

(K.F.Gauss ~ 1840)



Ona je to pořád v podstatě základní věta analýzy. Jenom je půjčená algebraikům ...

Pro kompaktní varietu M je duál homologické grupy roven kohomologické grupě. Tedy

$$(H_p(M))^* = H^p(M)$$

(de Rham)

Speciálně p -forma ω je potenciální, tedy derivací nějaké $(p-1)$ -formy, právě tehdy, když

$$\int_z \omega = 0$$

pro každý p -řetěz z s nulovou hranicí.

Vidíme, že operátory d a ∂ jsou navzájem adjungované.



Jde o obecnou formu zákona zachování: "Integrál z funkce přes hranici množiny je roven integrálu z derivace funkce přes množinu."

18.6 Prvočísla a komplexní funkce

18.6.1 Prvočíselná věta

Označme $\pi(x)$ počet prvočísel menších nebo rovných x . Pak platí

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

(J.Hadamard ~ a Ch.J.V.Poussin 1900)

Používáme zápis $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow \infty$ pro

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Základní vazba, pomocí které lze počítání "přes prvočísla" převést na počítání "přes všechna čísla", dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{r_2, r_3, \dots \geq 0} \left(\frac{1}{2^{r_2} 3^{r_3} \dots} \right)^s = \prod_p \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{p^{rs}} \right) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

které platí pro komplexní s s reálnou částí větší než 1. Součty a součiny "přes prvočísla" jsou ty s p .

18.6.2 Důkaz prvočíselné věty

Zatím nejjednodušší důkaz probíhá takto

Krok A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1}$ je holomorfní pro $\Re(s) > 0$.

Krok B. $\frac{\sum_{p \leq x} \log p}{x}$ je omezená.

Krok C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ je nenulová pro $\Re(s) \geq 1$.

Krok D. $\sum_p \frac{\log p}{p^s} - \frac{1}{s-1}$ je holomorfní pro $\Re(s) \geq 1$.

Krok E. $\int_1^{\infty} \frac{\sum_{p \leq x} \log p - x}{x^2}$ je konvergentní integrál.

Krok F. $\sum_{p \leq x} \log p \sim x$, $x \rightarrow \infty$.

Nyní

$$\pi(x) \log x = \sum_{p \leq x} \log x \geq \sum_{p \leq x} \log p \sim x.$$

Dále

$$x \sim \sum_{p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} p \leq x} (1-\varepsilon) \log x = (1-\varepsilon) \log x [\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon})].$$

Tak vidíme, že věta platí.

Mile tě překvapí chvíle, která už neměla přijít.

(Horatius)

18.7 Mix

18.7.1 O pevném bodu

Každé spojitě zobrazení B^n do B^n má pevný bod.

(Borsuk 1909, Hadamard 1910)



Nejde si "pořádně" zamíchat kafe.

18.7.2 Chlupatá koule

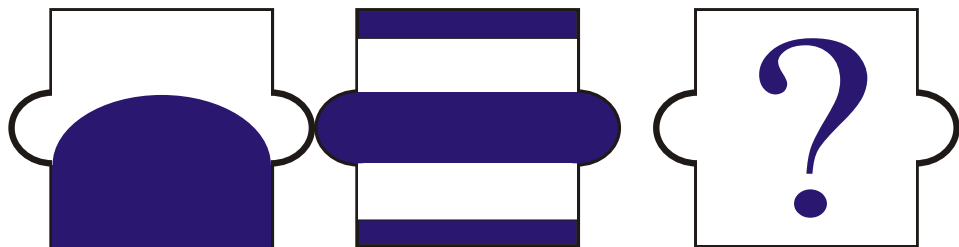
Důsledky:

- ⇒ Vždy je někde bezvětrí.
- ⇒ Magnetická sféra na jadernou fúzi musí prosakovat.
- ⇒ Polynom má komplexní kořen.

18.7.3 Superkapilára

Existuje rotačně symetrická kapilára, která připouští nespočetně mnoho rotačně symetrických hladin tekutiny.

Tato řešení jsou mechanicky nestabilní, v libovolné blízkosti se nachází hladina tekutiny, která dává menší mechanickou energii.



Obrázek 18.7.3: Rotačně symetrická baňka s tekutinou má ve stavu beztíže nekonečně mnoho možných klidových stavů, stabilních je asi jen pár ...

Existují alespoň dvě lokální minima, žádné z nich není rotačně symetrické. Vidíme, že symetrická úloha může mít nesymetrické řešení.



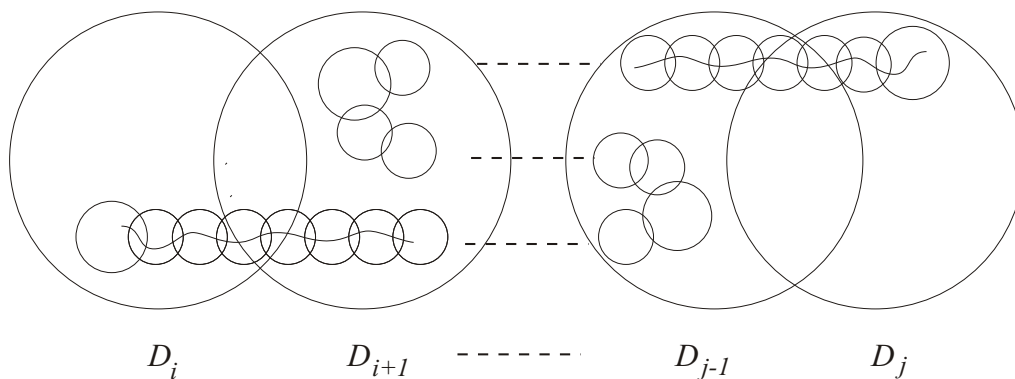
Stabilní řešení se objeví při pokusech ve stavu beztíže.

18.7.4 Neviditelný cedník

Uvažujme řetěz tvořený posloupností kruhů v rovině z bodu A do bodu B . Dva takové kruhy mají neprázdný průnik právě tehdy když jde o sousední kruhy v posloupnosti. V tomto řetězku vytvoříme podřetízek podle pravidla, že podřetízek musí cestou z kruhu D_i do kruhu D_j nejprve dosáhnout do D_{j-1} , pak do D_{i+1} a pak teprve do D_j , opět z bodu A do bodu B . Dělá prostě alespoň jednu kličku mezi každými dvěma kruhy původního řetězku. Posloupnost takto sestrojených řetězků má průnik, který je souvislý a kompaktní. Nazývá se (při splnění podmínek na velikost kruhů tvořících řetězky) **pseudooblouk**.



Jde o takové neviditelné skoro nic. Vede to od začátku na konec, nicméně neobsahuje to žádnou křivku. Prostě se to pořád jenom klikatí. Je to prostě neviditelný cedník.



Obrázek 18.7.4: Řetěz s naznačeným řetízkiem.

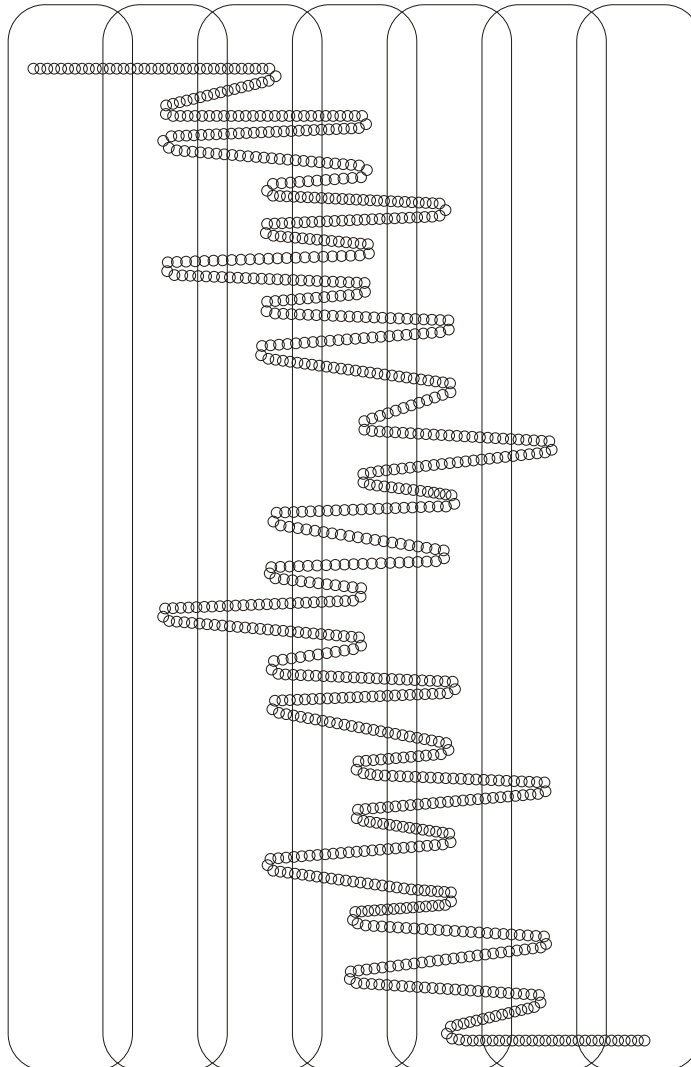
Jde o jedinečný objekt. Každá jeho uzavřená souvislá podmnožina je s ním homeomorfní. Tuto vlastnost má také interval $[0, 1]$.

18.7.5 Prostorová křivka a dimenze v háji

Sestrojíme posloupnost zobrazení z intervalu $[0, 1]$ do jednotkového čtverce. První zobrazení proběhne úhlopříčku jednotkového čtverce. Tento čtverec rozdělíme na 9 shodných čtverců. Druhé zobrazení proběhne po úhlopříčkách 9 menších čtverců. Tento postup opakujeme a v limitě získáme spojitě zobrazení úsečky na čtverec.

18.7.6 Problém prosakování

Předpokládáme, že se nějaká tekutina prosakuje nějakým prostředím. V problému prosakování hledáme rozložení rychlosti $v(x, y)$, k tomu najdeme potenciál rychlosti, funkci $u(x, y)$ takovou, aby $v = -\text{grad } u$. Funkce u vyhovuje rovnici tepelné rovnováhy v oblasti.



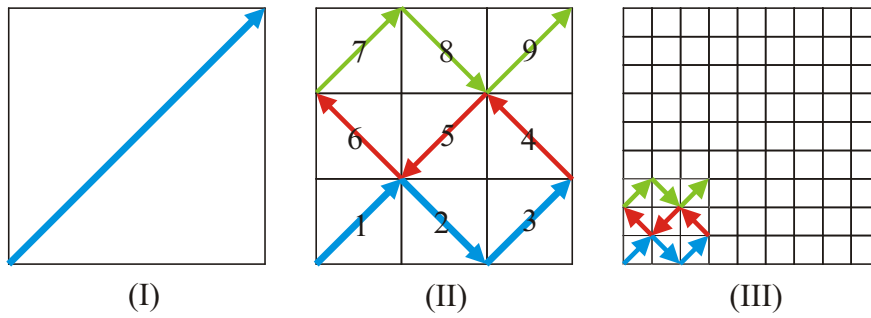
Obrázek 18.7.4: Konstrukce podřetízku v 7 "šišatých" kruzích řetízku - iterováním dostaneme pseudooblouk.



Pokud hledáme ropu, tak se prosakování vyplatí umět.

18.7.7 Uzavřené povrchy - koule s "ušima" a "dírama"

Kompaktní prostor X s vlastností, že každý prvek X je obsažen v otevřené množině homeomorfní jednotkovému kruhu, nazveme **topologická uzavřená plocha**.



Obrázek 18.7.5: První dvě zobrazení úsečky do čtverce.

Příroda je nekonečná sféra, jejíž střed
je všude a povrch nikde.
(B.Pascal 1670)

Každá topologická uzavřená plocha je homeomorfní právě jedné z ploch

- (i) Plocha M_g pro nezáporné celé číslo g .
- (ii) Plocha N_h pro celé číslo $h \geq 1$.

Není královská cesta ke geometrii.
(Eukleidés z Alexandrie \sim -330)

M_0 je 2-sféra, M_g s kladným g je sféra s g dírami. N_1 je projektivní rovina, N_2 je kouzelná láhev. Obecně se prostor N_h udělá tak, že se na sféře odstraní h kruhů a k nim se přilepí svou hranicí zkřížený pásek.

18.7.8 Věta o indexu

Nechť je $P(f) = 0$ systém diferenciálních rovnic popisujících situaci na prostoru X . Analytický index systému je zhruba řečeno počet řešení daného systému. Platí

$$\text{analytický index} = \dim \ker(P) - \dim \text{coker}(P) .$$

Čili analytický index je počet parametrů popisujících obecné řešení mínus počet vazeb mezi výrazy $P(f)$.

Nechť $P(f)$ je systém s jednou rovnicí $df/dx = 0$ (popřípadě $P(f) = 0$ eliptický systém parciálních diferenciálních rovnic) definovaný na kružnici (popřípadě kulové ploše, nebo obecněji na uzavřené hladké orientované n -rozměrné varietě) X . Pak

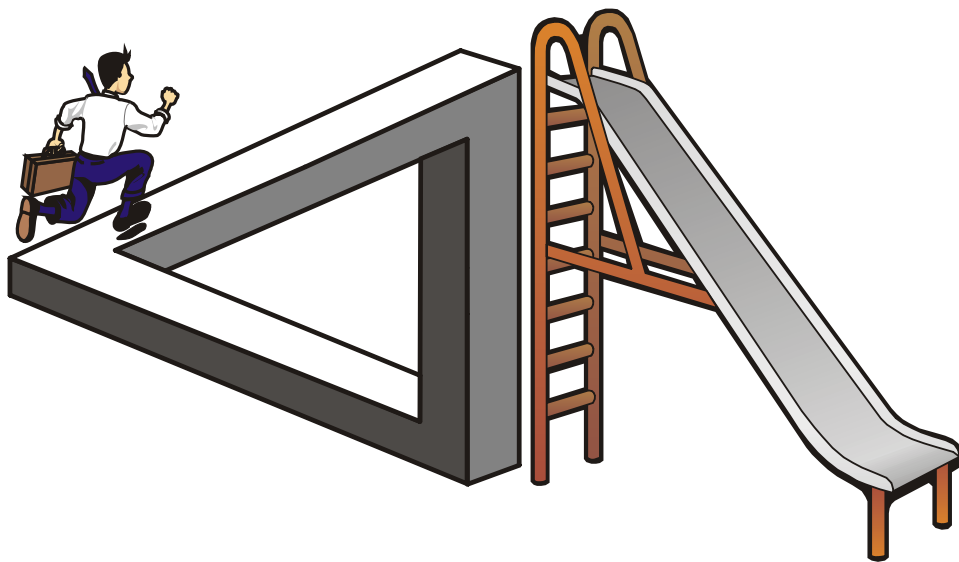
$$\text{analytický index}(P) = \text{topologický index}(X) .$$

(M.F.Atiyah, I.M.Stinger)

Topologický index kružnice je roven 0. Tedy analytický index P musí být roven 0. Prostor řešení $df/dx = 0$ je jednorozměrný (jde o konstanty), tedy musí existovat jedna vazba platná pro funkce df/dx . Tou vazbou je podle základní věty analýzy vztah, že integrál z derivace přes kružnici musí být nula.



Pokud někde na kruhové dráze poklesneme, musíme někde vystoupat.



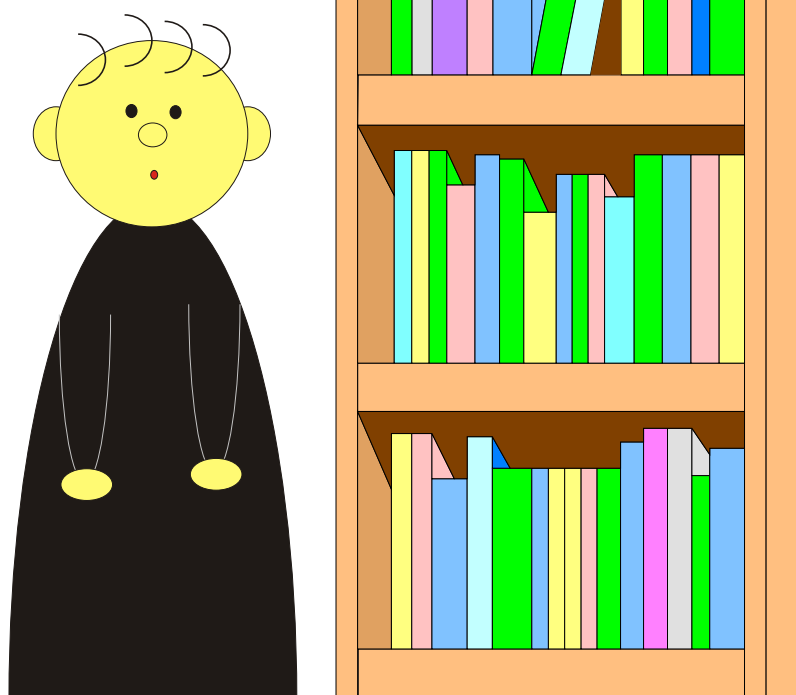
Obrázek 18.7.8: Nahoru a dolů.

Kapitola 19

Problémy pro mistry



ěmi nejtěžšími problémy získáváme veliké společenské uznání.

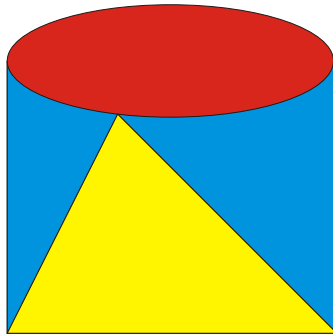


Obrázek 19.0.0: Mistr je takový malý človíček se svými knihami.

19.1 Digitální sluneční hodiny

19.1.1 Cestovní špunt

Sestrojte cestovní špunt, který by šel použít na uzavírání lahví s kruhovým, čtvercovým i trojúhelníkovým hrdlem.



Obrázek 19.1.1: Špunt.

19.1.2 Digitální sluneční hodiny

Existují digitální sluneční hodiny? Tedy objekt, který by vrhal stín ve tvaru číslicového vyjádření času?

Existuje množina v \mathbb{R}^3 , která má pro libovolný prostorový úhel průmět roven předepsanému průmětu (pro každý směr až na množinu míry nula).

(Falconer)

19.1.3 Tomograf

Měříme množství záření, které prochází tělesem různými směry. Chceme podle těchto údajů zjistit tvar tělesa.

Matematický problém jde formulovat takto: určete funkci $f(x, y)$ na čtverci, známe-li integrály podél všech přímk, které čtverec protínají.

Lokalizace cizího předmětu v těle například vede ke hledání charakteristické funkce množiny bodů daného tělesa.

Existuje předpis pro inverzní transformaci

(J.K.A.Radon 1917)

19.2 Gravitace

19.2.1 Satelitní problém

Uvažujeme vzájemné gravitační působení $N = 1 + n$ těles v rovině. Modelová situace odpovídá Zemi a n satelitům obíhajícím Zemi.

Budeme chtít navodit situaci, kdy satelity působí na Zemi zanedbatelnou silou, ale vůči sobě navzájem silou zajímavou. Hledáme rovnovážné rozmístění satelitů na oběžné dráze. Nabízí se symetrické rozmístění, ale nemusí být jediné.

Vzájemné působení N částic v rovině s hmotnostmi m_1, \dots, m_N v souřadnicovém systému umístěném v těžišti soustavy vyjádříme rovnicí

$$Mq'' = -V_q,$$

kde matice M má na diagonále prvky $m_1, m_1, \dots, m_N, m_N$ a nuly jinde, $q = (q_1, \dots, q_N)$ jsou vektory umístění, $q_i \in \mathbb{R}^2$ a V je gravitační potenciál

$$V(q_1, \dots, q_N) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

a

$$V_q = \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_N} \right).$$

Hledáme řešení q s těžištěm v počátku, žádné dva satelity se nesrazí, ...

Soustava se otáčí takovou úhlovou rychlostí, aby se rušily síly přitahující k těžišti. Tedy existuje kladná konstanta λ^2 tak, že

$$M^{-1}V_q = \lambda^2 q.$$

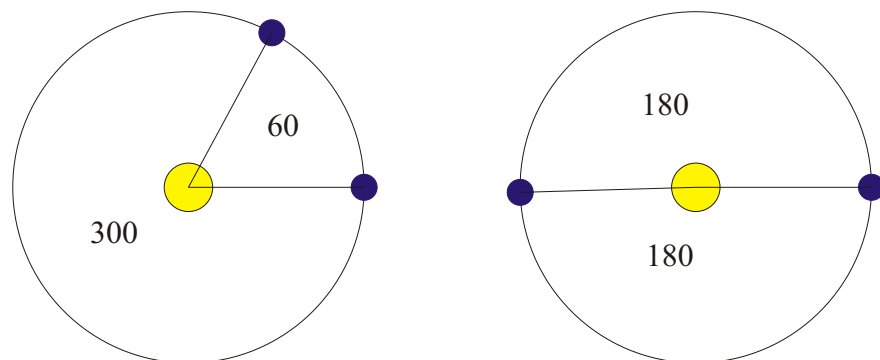
Tedy vektor zrychlení je úměrný vzdálenosti od těžiště a směřuje k těžišti. Zohledníme rotace a stejnolehlost.

Nakonec provedeme limitní přechod odpovídající zanedbatelné hmotnosti satelitů vzhledem k Zemi. Tedy zvolíme $m_0 = 1$, $m_i = \epsilon$, $i = 1, \dots, n$, označíme $q(\epsilon) = (q_0(\epsilon), \dots, q_N(\epsilon))$.

Vektor $q = (q_0, \dots, q_N)$ budeme nazývat **centrální konfigurace** pokud

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(\epsilon) = q$$

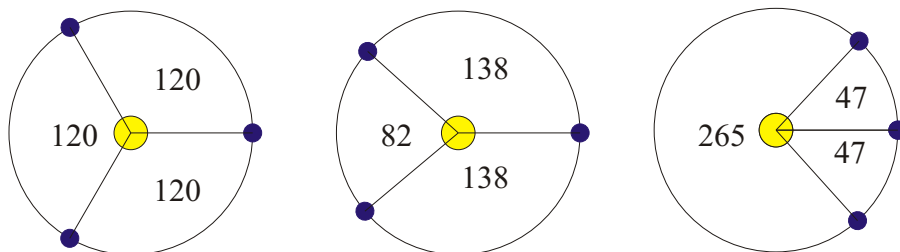
Centrální konfigurace pro rovinný problém se třemi stejnými planetami jsou právě 3.



Obrázek 19.2.1: Dvě centrální konfigurace pro dva satelity. Na levém obrázku není v realitě Zeměkoule v těžišti soustavy.

Pro $n \sim e^{73}$ začíná "regularita", t.j. existují pouze pravidelné centrální konfigurace.

(J.Casasayas, J.Llibre a A.Nunes 1994)



Obrázek 19.2.1: Tři centrální konfigurace.



Obrázek 19.2.1: Kam umístit na Saturn satelitní vysílání?

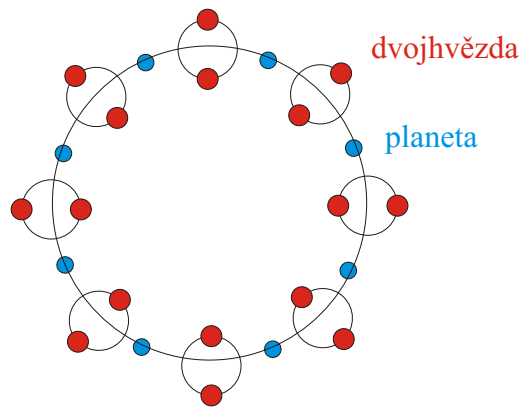
19.2.2 Velký únik

Existuje konečný systém těles, který za působení pouze vzájemné gravitace odletí do nekonečna v konečném čase.

(Gerver 1984, Z.Xia 1988)

Matematika je nejlevnější věda.
(G.Polyá ~ 1970)

Důkaz: Uvažujme n dvojhvězd rotujících kolem vrcholů pravidelného n -úhelníka, kolem nichž putuje n planet. Představujeme si dvojhvězdy i planety jako hmotné body. Každá dvojhvězda rotuje tak, že při průletu planety je planeta urychlena za cenu ztráty



Obrázek 19.2.2: Velký únik pryč. Planety rotují mezi dvojhvězdami a celek se nekonečně rozpíná.

energie vzájemné rotace dvojhvězdy. Tím se zmenší vzájemná vzdálenost obou "polorovin" dvojhvězdy. Navíc lze planety navigovat tak, aby se při každém průletu "mezi dvojhvězdou" zvětšil průměr základního n -úhelníka.

Při pečlivé volbě počátečních podmínek dostaneme systém, který "odletí" do nekonečna v konečném čase. ■

(J.Gerver a S.Brown 1989)



Zákony gravitace způsobí to, že se energie dvojhvězd přemění na únik. Potřebujeme "bodovost" dvojhvězd i planet. Navíc získáme rychlost větší než rychlost světla ...
HA! HA! HA!

19.2.3 Problém n těles

Chování n těles způsobené vzájemnou gravitací je problém nazývaný **problém n těles**.

(Newton)

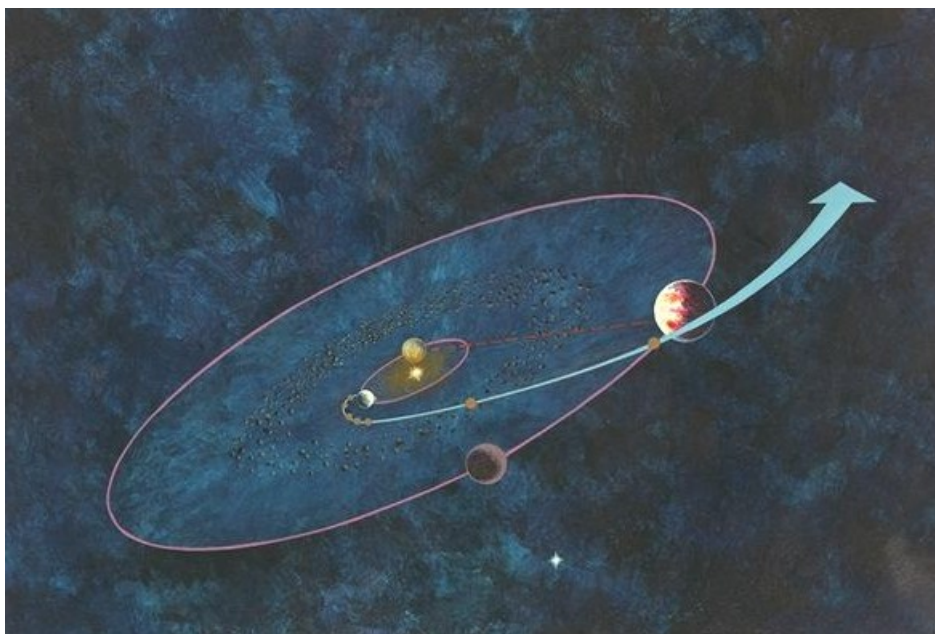
Pro $n = 2$ dostaneme v závislosti na podmínkách v soustavě umístěné na jednom tělese buď přímku, kružnici, elipsu, parabolu či hyperbolu.

(Kepler)

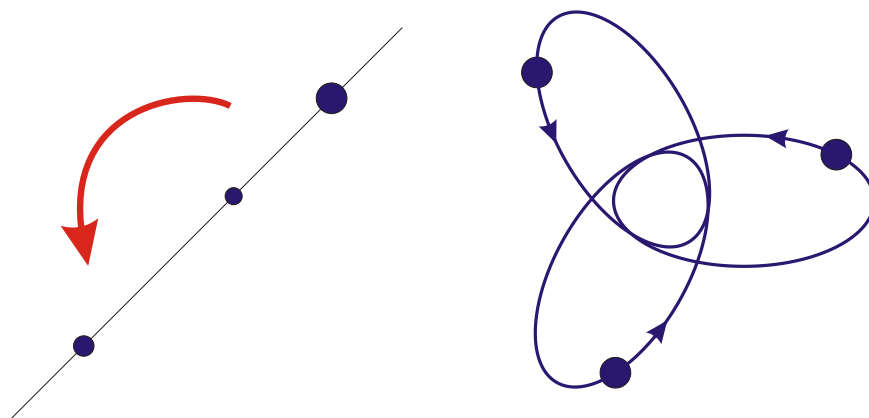
Pro $n = 3$ existují nečekaná řešení:

⇒ Planety v lineární pozici s rotující přímkou.

(L.Euler 1767)



Obrázek 19.2.2: Při průletu se lze urychlit, dostat kinetickou energii.



Obrázek 19.2.3: Dráhy planet.

⇒ Planety ve vrcholu trojúhelníku obíhají kolem "fiktivního" slunce.

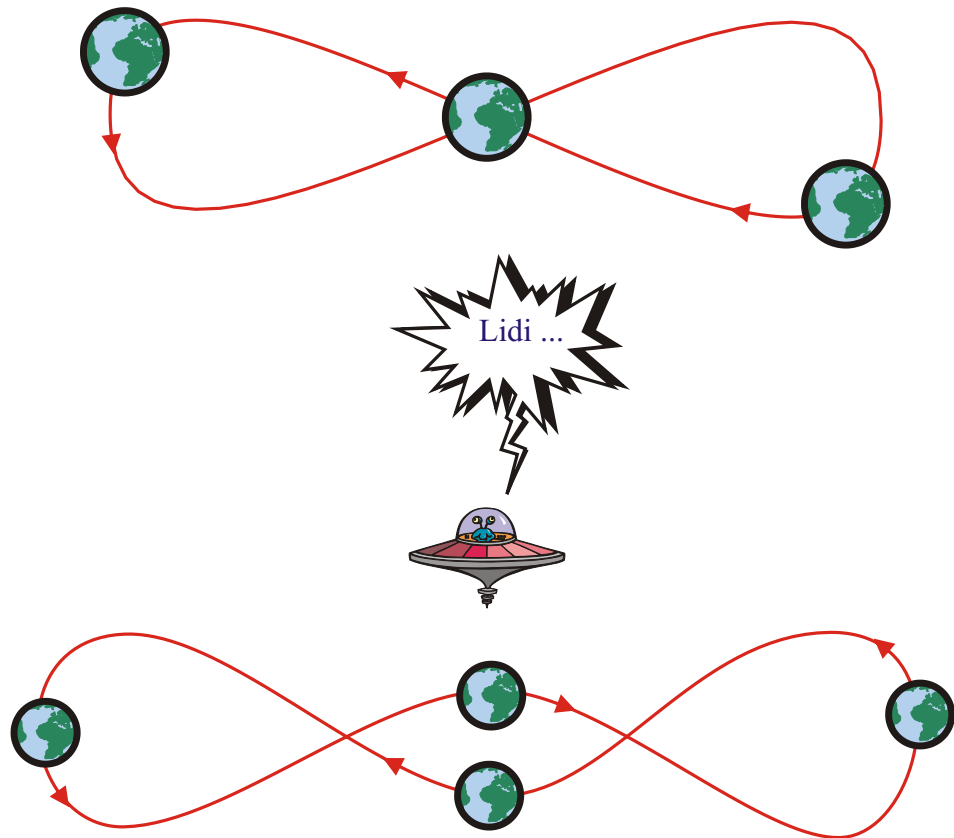
(J.L.Lagrange 1772)

⇒ Planety předvádějí let včely a opisují společnou křivku ve tvaru "8".

(A.Chenciner a R.Montgomery 1999)

Lidský duch je bezesporu velkolepý,
ale slabý a potřebuje opory: pozorování a experimentování.

(G.Choquet ~ 1990)



Obrázek 19.2.3: Choreografie výborně.

Příroda poskytla nespočet příležitostí pro pozorování pohybujících se předmětů.

Mechanika je ráj pro matematické vědy, protože jejími cestami se dostaneme k plodům matematiky.

(L.da Vinci ~ 1490)

Pokud probíhají planety tutéž dráhu (například tvar "8" v předchozím výčtu), říkáme tomu **jednoduchá choreografie**. Tvary takových křivek 2π -periodických křivek $x(t)$ můžeme zkoumat pomocí lokálních extrémů akce

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|x(t) - x(t + 2\pi h/n)|} dt .$$

Absolutní minimum akce nastává pro pravidelné rozmístění planet na kružnici. Existují však i jiná lokální minima odpovídající pěkným "klikaticím". Pokud přidáme k formulaci požadavek nějaké symetrie, dostaneme pěkné "umělecké kreace". Můžeme zkoumat i neinerciální případ, kdy se celá naše soustava n bodů otáčí s konstantní úhlovou rychlostí kolem nějakého slunce.

19.2.4 Relativistický pohyb

Pohyb hmotného bodu $x \in \mathbb{R}^3$ způsobený vlivem gravitačního potenciálu V je podle relativity (rychlost světla = 1) řízen rovnicí

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{1 - (x')^2}} \right) = -\nabla V(x, t) .$$

Od té doby, co matematici vtrhli do teorie relativity, už jí sám nerozumím
(A.Einstein ~ 1950)

19.2.5 Problém gravitace

Je pro n těles v prostoru navzájem působících gravitační silou pouze konečný počet relativních pozic?

(Wintner 1941)

19.3 Kvantová fyzika

19.3.1 Prostory řešení vlnové funkce

Prostor $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ je užitečný pro Schrödingerovu rovnici, pro její relativistické řešení je vhodný prostor $H^{1/2}(\Omega)$ s normou

$$|f|_{H^{1/2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\text{grad } f(x)|^2 dx \right)^{1/2} .$$

Ten poslední integrál se nazývá **kinetická energie**. Prostor H^1 je úplný, $C^\infty(\Omega)$ je hustý v $H^1(\Omega)$.

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak f patří do $H^1(\mathbb{R}^n)$ právě když funkce $k \mapsto |k|f^\wedge(k)$ je v prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$|f|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \int |f^\wedge(k)|^2 (1 + 4\pi^2|k|^2) dk .$$

Nechť $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak f patří do $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ právě když funkce $k \mapsto |k|^{1/2}f^\wedge(k)$ je v prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pak

$$|f|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^n)}^2 = \int |f^\wedge(k)|^2 (1 + 2\pi|k|) dk .$$

Jde o úplný součinný prostor

$$(f, g)_{H^{1/2}(\mathbb{R}^n)} = \int \overline{f^\wedge(k)} g^\wedge(k) (1 + 2\pi|k|) dk .$$

Třídídimenzionální kinetická energie má tvar

$$\sqrt{p^2 + m^2}$$

kde $p^2 = -\Delta$ a m je hmotnost částice.



Obrázek 19.2.5: Planetární systém.

19.3.2 Vlnová funkce atomu

Časově nezávislá Schrödingerova rovnice pro částici pod vlivem pole způsobeného silou $F(x) = -\nabla V(x)$ má tvar

$$H(x)\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) .$$

Pro operátor H platí $H = -\Delta$ v nerelativistickém a $H = \sqrt{-\Delta + m^2}$ v relativistickém případě.

Funkce $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá **potenciál**. Funkci $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ budeme normalizovat předpisem

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 = 1 .$$

Funkci ψ budeme říkat **vlnová funkce**. Funkce $p_\psi(x) = |\psi(x)|^2$ odpovídá pravděpodobnosti toho, že částici najdeme v x (odchylka od klidového stavu). Číslo E budeme říkat **vlastní číslo** a ψ budeme říkat **vlastní funkce**.

19.3.3 Variační úloha

Místo rovnice budeme řešit variační problém minimalizace funkcionálu celkové energie ε

$$\varepsilon(\psi) = T_\psi + V_\psi ,$$

kde

$$T_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x)|^2 dx$$

je **kinetická energie** a

$$V_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|\psi(x)|^2 dx$$

je **potenciální energie** za podmínky

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 = 1 .$$

Ukáže se, že (někdy) existuje minimalizující funkce ψ_0 , která vyhovuje vlnové rovnici s hodnotou $E = E_0$, kde

$$E_0 = \inf\{\varepsilon(\psi) : \int |\psi|^2 = 1\} .$$

Takové funkci ψ_0 se říká **základní stav** a číslu E_0 **energie základního stavu**.



BTW, nerelativistická kinetická energie je $(\psi, p^2\psi)$, relativistická kinetická energie je $(\psi, |p|\psi)$.
Uvidíme, co se s tím dá dělat.

19.3.4 Princip neurčitosti

Nechť V splňuje (NERELATIVITA)

$$L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) , n \geq 3$$

$$L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2) , n = 2$$

$$L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1) , n = 1$$

nebo nechť V splňuje (RELATIVITA)

$$L^n(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) , n \geq 2$$

$$L^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1) , n = 1 .$$

Zde uvažujeme $H^\#(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ v klasickém případě, $H^\#(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ v relativistickém případě.

Pak pro každou $\psi \in H^\#(\mathbb{R}^n)$ platí

$$T_\psi \leq C\varepsilon(\psi) + D|\psi|_2^2$$

pro vhodné konstanty C a D .

19.3.5 Existence řešení

Nechť pro každé $\lambda > 0$ platí

$$|\{x : |V(x)| > \lambda\}| < \infty .$$

Nechť platí

$$E_0 = \inf\{\varepsilon(\psi) : \int |\psi|^2 = 1\} < 0 .$$

Pak existuje funkce $\psi_0 \in H^\#(\mathbb{R}^n)$ taková, že $|\psi_0|_2 = 1$ a $\varepsilon(\psi_0) = E_0$.

Navíc každý minimizátor ψ_0 splňuje

$$H(x)\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

ve smyslu distribucí.

19.3.6 Excitovaný stav

Máme-li E_0 a ψ_0 jako základní stav, můžeme hledat první excitovaný stav a druhou vlastní funkci.

Budeme minimalizovat ε pro $\psi \in H^\#(\mathbb{R}^n)$ za podmínky kolmosti ψ_0 a ψ

$$(\psi, \psi_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)}\psi_0(x) dx = 0 .$$

Tím získáme první excitovaný stav a jemu příslušející energii.

Rozdíl energií mezi základním a excitovaným stavem odpovídá přesně vlnové délce emitovaného záření, což dává podpůrné argumenty pro kvantovou teorii.

19.3.7 Atom vodíku

Potenciál V atomu vodíku umístěného v počátku \mathbb{R}^3 je roven

$$V(x) = -\frac{1}{|x|} .$$

Řešení vlnové rovnice je

$$\psi_0(x) = \exp^{-\frac{|x|}{2}} , \quad E_0 = -\frac{1}{4} .$$

Jde o minimum

$$\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} |\psi|^2 dx .$$

19.4 Proudění kapaliny

19.4.1 Rovnice proudění kapaliny

Nechť je Ω oblast v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Hledáme n -tici funkcí

$$u_1(x), \dots, u_n(x)$$

definovaných na $\bar{\Omega}$ popisující složky rychlosti kapaliny a funkci $p(x)$ popisující tlak v kapalině tak, aby v Ω byly splněny podmínky

$$-v\Delta u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

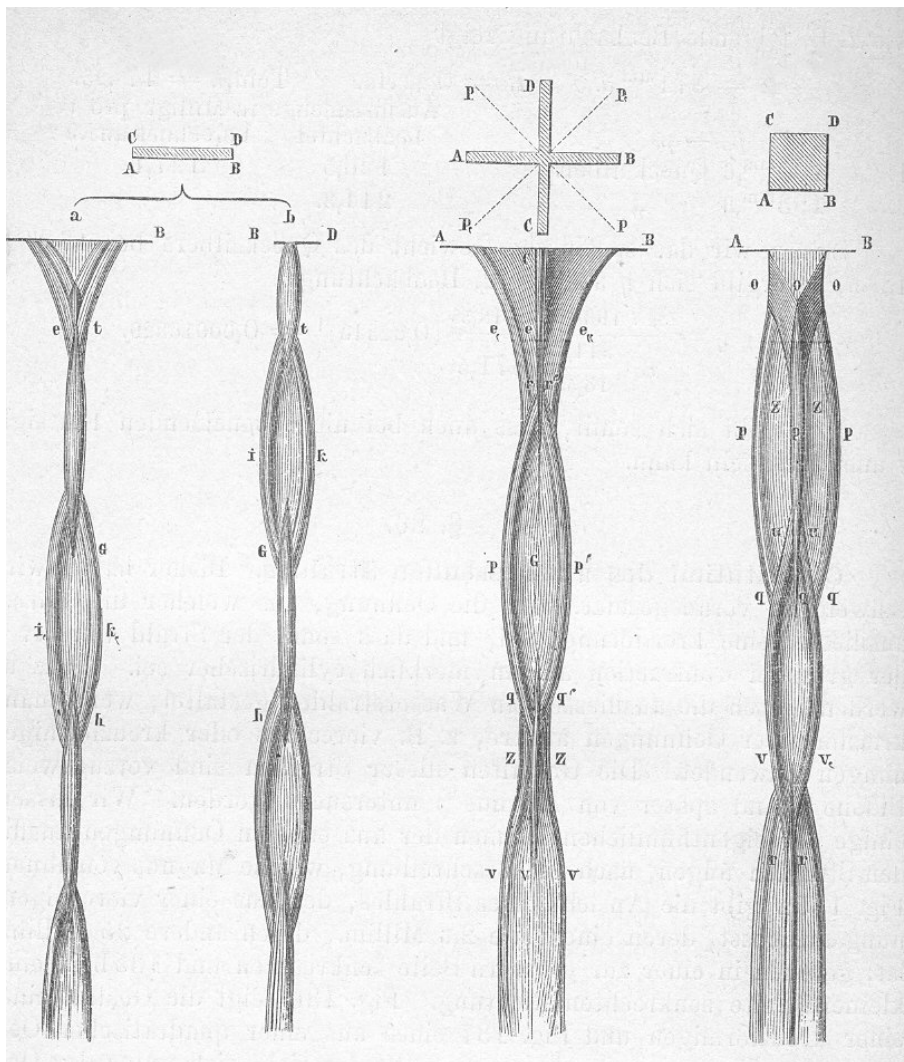
a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0$$

a

$$u_i(\partial\Omega) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Navier, Stokes)



Obrázek 19.4.1: Jak teče voda různými kohoutky ...

Když vynecháme podmínku nestlačitelnosti (kterápak to asi bude?), dostaneme rovnice pro proudění vzduchu.



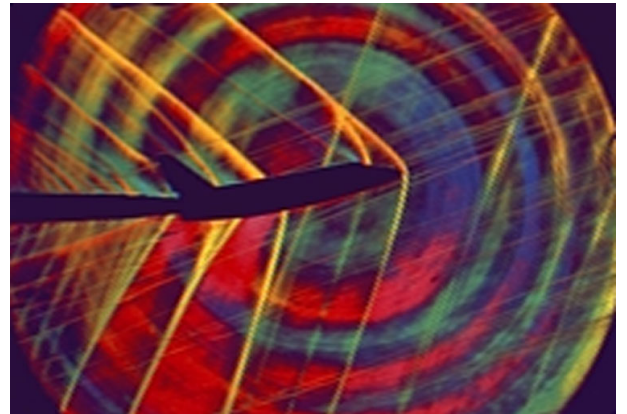
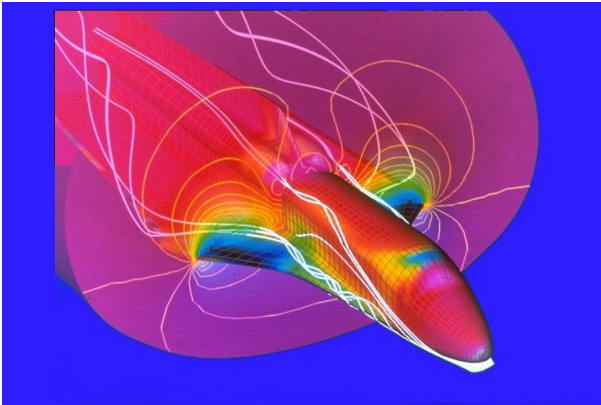
Když zkoumáme proudění vzduchu numericky, dostaneme se často do potíží.



Obrázek 19.4.1: Jak se hýbe nebe.



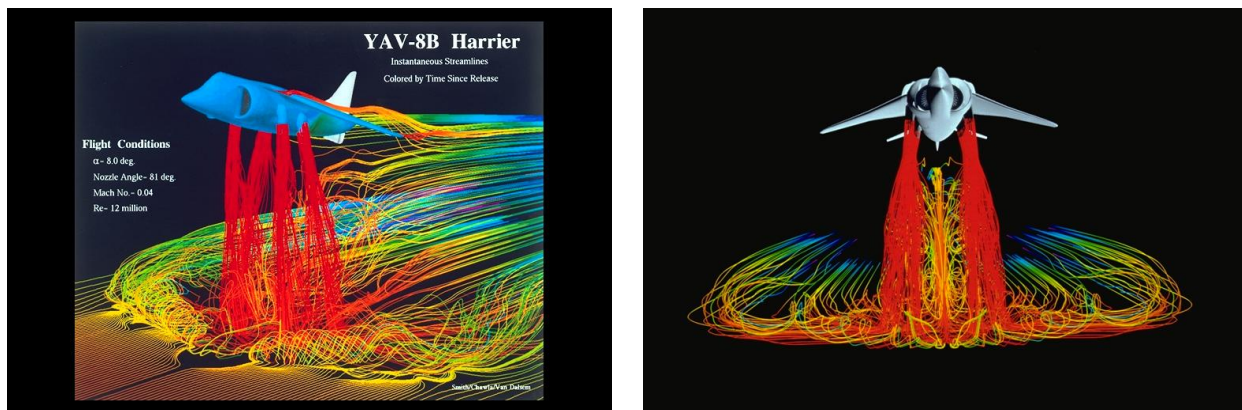
Nicméně se na takových výpočtech dá zbohatnout ...



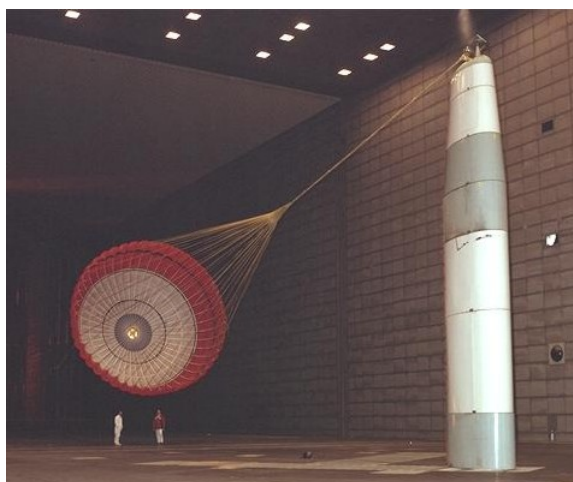
Obrázek 19.4.1: Pohyb vzduchu v blízkosti letadla.

”Výsledkem je tedy, že všechno je značně nejasné a neřešitelné, až na ten vyhazov,” řekl K.

(F.Kafka ~ 1925)



Obrázek 19.4.1: Bojová akce.



Obrázek 19.4.1: Někdy přesto raději místo počítání simulujeme ...

19.4.2 Soliton je samotná vlnka

Při pozorování vln v úzkém kanále je možné uvidět zvláštní vlnku, která se pohybuje rovnoměrným pohybem a je zcela sama. Není následována žádnou další a říká se jí **soliton**. Větší vlny se pohybují rychleji. Když dojde k "předjíždění", přežijí to obě dvě bez úhony. Matematický popis vede na nelineární diferenciální rovnici, která má kupodivu pěkné řešení. Toto řešení je opravdu podobné solitonu a jeho vývoj v čase se realizuje rovnoměrným pohybem.

(J.S.Russel ~ 1834)

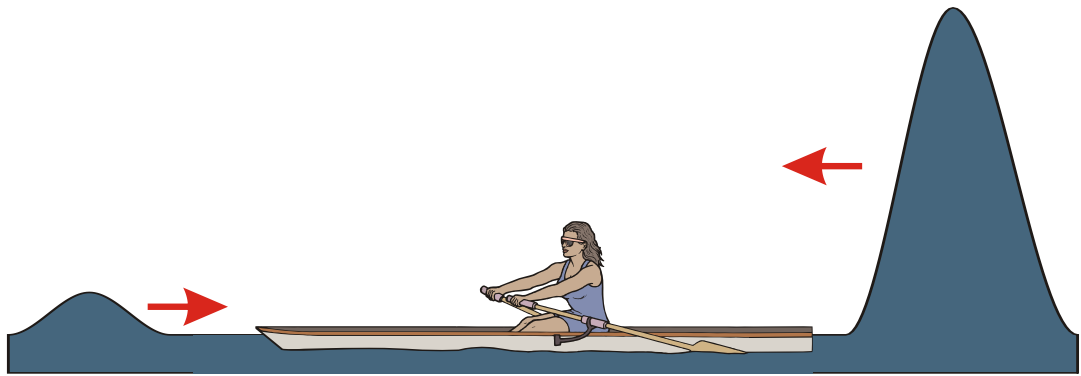
Jde o rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

kde $u = u(x, t)$ je výška vody (oproti rovnovážnému stavu) v čase t v místě x (jednorozměrný svět).



Bez posledního (nelineárního) členu by celé vlnění zmizelo do nicoty.



Obrázek 19.4.2: Velká a malá vlnka si prostě jen vymění pozice.

Řešením je funkce $u(x, t) = a \operatorname{sech}^2(b(x - vt))$, kde $b = (a/12)^{1/2}$ a $v = 3a$. Konstanta a určuje výšku vlny (vyšší vlnky jsou užší). Konstanta v odpovídá rychlosti vlnky (vyšší jsou rychlejší).



Obrázek 19.4.2: Pokud by byla vlna "nesolitonová", dopadlo by to takto.

19.5 Minimální plochy

19.5.1 Izoperimetrický problém

Najděte nejmenší plochu, která v kvádru odděluje daný objem.

Hypotéza: Řešením jsou části kulové plochy, válcové plochy nebo roviny.

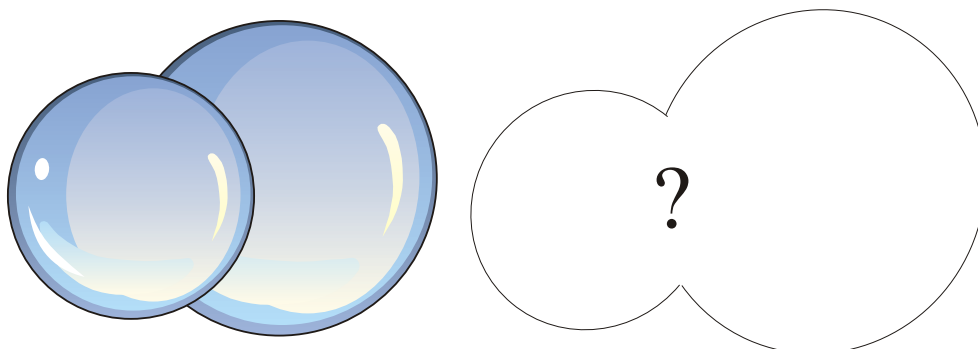


Úloha najít těleso daného objemu s nejmenším povrchem vede na kouli. Pokud přidáme okrajové podmínky, dostaneme například polokouli přilepenou k rovině.

19.5.2 Více-bublina

Najděte nejmenší plochu, která v prostoru odděluje n -zadaných objemů.

Hypotéza: Řešením jsou části kulové plochy.



Obrázek 19.5.2: Plochy omezující objem se snaží o minimalizaci.



Kdo "umí", řeší problém v \mathbb{R}^n .

19.5.3 Rotační plochy s konstantní křivostí

Rotační plochy s konstantní střední křivostí vzniknou rotací některé z následujících křivek: vlnka, vodorovná úsečka, klička, kružnice, řetězovka, svislá úsečka. Osa otáčení je osa x .

(Ch.Delaunay 1841)

19.6 Mix

19.6.1 O kořenech na přímce

Jsou všechny kořeny funkce

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ležící v pásu $0 \leq \Re(s) \leq 1$ soustředěny na přímce $\Re(s) = 1/2$?

(B.Riemann ~ 1850)

19.6.2 O sféře v časoprostoru

Je

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$$

jediná kompaktní trojdimenzionální varieta s vlastností, že každá kružnice lze spojitě deformovat to bodu?

(H.J.Poincaré 1904)

19.6.3 Dynamické ceny

Sestrojte dynamický model pro poptávku a nabídku jednotlivých komodit na trhu, zachytit je třeba jednotlivé subjekty a dokázat existenci rovnovážných stavů, stabilitu systému, ...

Nejllepší hmotný model kočky je jiná,
nejlépe však ta samá, kočka.

(A.Rosenblueth a N. Wiener 1945)

Klasická teorie jedné komodity říká, že v rovnovážném stavu se poptávka D rovná nabídce S . Pro více komodit $p = (p_1, \dots, p_n)$ uvažujeme funkci **poptávka** $D(p)$ (kolik by se prodalo kousků za cenu p), **nabídka** $S(p)$ (kolik by se nabízelo kousků za cenu p) a **převís poptávky** $Z(p) = D(p) - S(p)$. Platí

- (i) $Z(\lambda p) = Z(p)$, pro nezáporné p a kladné λ . Pokud se zlevní výroba, poklesne cena.
- (ii) $\sum_{i=1}^n p_i Z_i(p) = 0$. Celková hodnota je nula. Neukožená poptávka stojí výrobce zbytečných věcí koupit si svoje výrobky.
- (iii) Pokud je $p_i = 0$, je $Z_i(p) > 0$. Zboží zadarmo si koupí každý, nebo alespoň někdo.

Existuje rovnovážná cena p^* taková, že $Z(p^*) = 0$ (poptávka je rovná nabídce).

(Hopf)

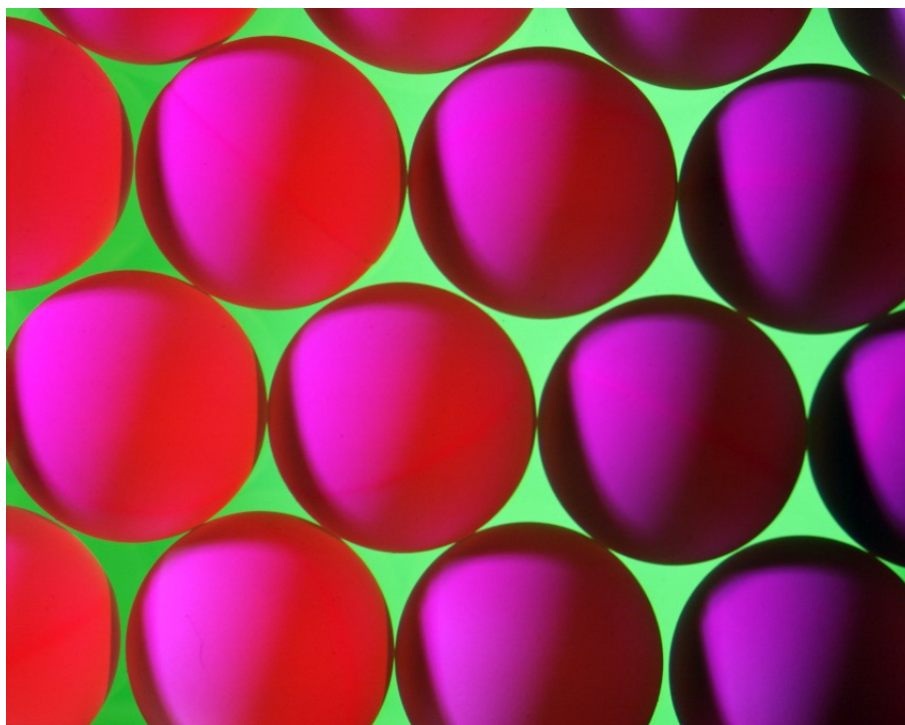
19.6.4 O pomerančích a dělových koulích

Kolik koulí do kanónu (pomerančů, jablek, ...) se vejde do lodi? Jaké nejvýhodnější uspořádání zvolit?

(J.Kepler ~ 1650)

Nejlépe to jde nejjednodušeji.

(Hales)



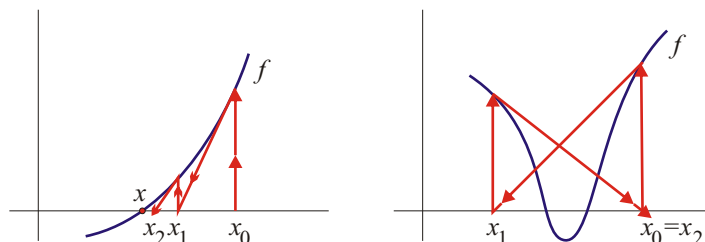
Obrázek 19.6.4: Jak si srovnat kuličky do krabičky.

19.6.5 O fraktálech

Budeme hledat řešení rovnice $f(x) = 0$ pomocí metody tečen. Zvolíme x_0 a další iterace budeme počítat vzorečkem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Zkoumání, kdy tato metoda vytvoří posloupnost konvergující k řešení rovnice $f(x) = 0$ je nesnadné, jak se lehce přesvědčíme z obrázku.



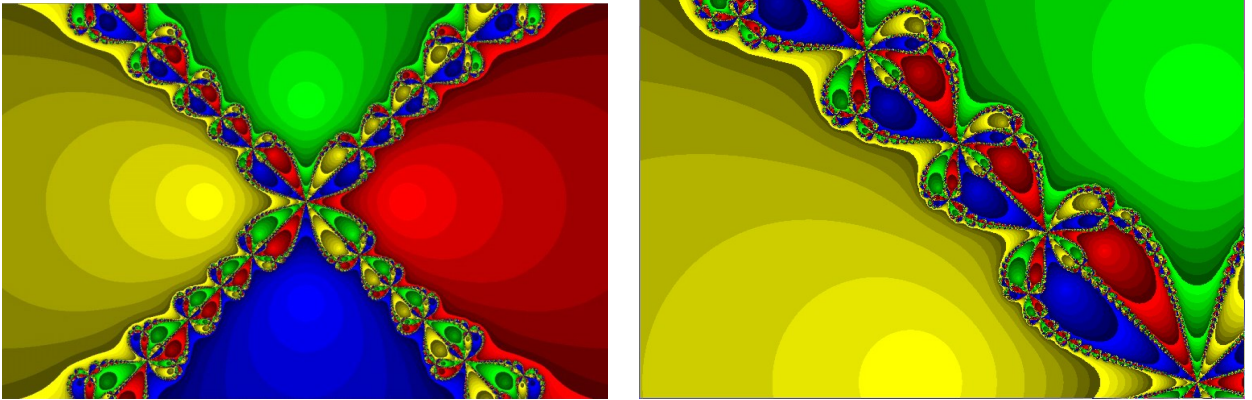
Obrázek 19.6.5: Posloupnost se může zacyklit.

Pokud tuto metodu použijeme v rovině na hledání více kořenů rovnice $z^4 = 1$, objeví se zvláštní jev. Pokud zvolíme startovací bod mezi dvěma řešeními, často sestavená posloupnost konverguje nečekaně k jinému řešení.



Když se dva perou, třetí a čtvrtý se smějou.

Struktura takovýchto sporných území je úžasná.



Obrázek 19.6.5: Zóny přitažlivosti jednotlivých kořenů tvoří kytičku.

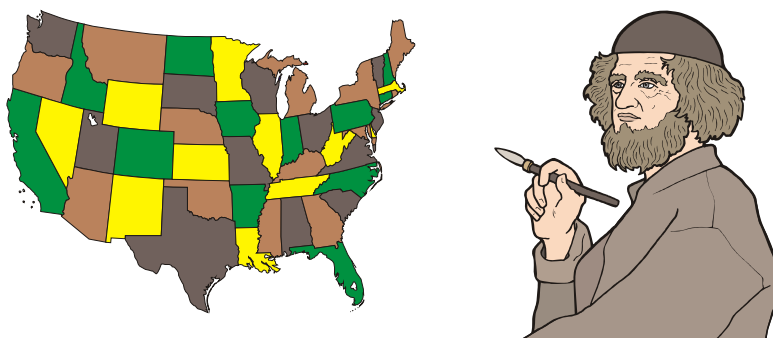
19.6.6 O barvení

Kolika barvami jde obarvit mapu? Při zřejmých omezeních stačí na rovinnou mapu 4 barvy.

(F.Guthrie 1852, A.Cayley 1879)



Obrázek 19.6.6: Jde to 4 barvami, je to jednoduché.



Obrázek 19.6.6: Jde to nanejvýš 4 barvami, i když to není jednoduché.

Řemeslník a čert závodili, kdo první postaví dům. Čert se do toho dal čertovskou silou. Řemeslník si napřed nabrousil nářadí a vyhrál.

(lidová moudrost)

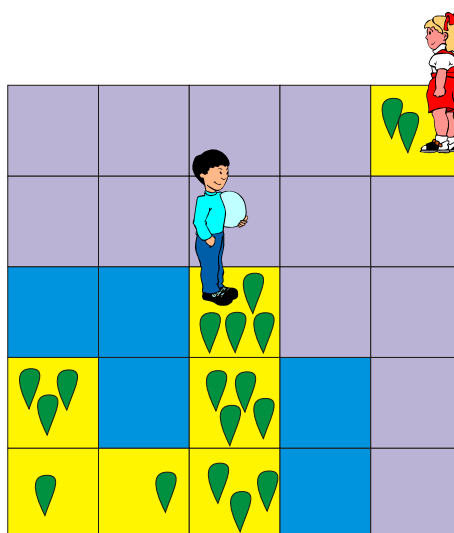


Obrázek 19.6.6: Na prostorových objektech je třeba být obezřetný ...

19.6.7 O suchém putování

Budeme se procházet v mlze po neznámém území složeném z vody a souše. Pro jednoduchost budeme mít území ve tvaru čtvercové sítě, kde každý čtverec je buď voda nebo souš. Na každém suchém čtverci vyrostlo tolik rostlinek, kolik ze sousedících osmi čtverců je

mokrých. Tyto rostlinky uvidíme až tehdy, když na čtverec vstoupíme (je mlha). Hledání souše je půvabná zábava, která často končí ve vodě.



Obrázek 19.6.7: Setkají se ještě někdy?

Základní otázka je otázka důvěry. Můžeme věřit, že rostlinky nelžou? Je daná vegetace "možná", nebo vede ke sporu a rostlinky rostou nedovoleným způsobem?

Zkusíme zvolit v neobjevené části kombinaci souš-voda a zkontrolujeme. To bude trvat lineárně podle počtu zvolených čtverců. Pokud budeme volit všechny kombinace, bude to záviset na 2^N , kde N je počet volených čtverců. Dovedeme najít alespoň polynomiální algoritmus?



Na kladné i záporné řešení čeká milionová odměna.

19.6.8 Co je vlastně placaté

Otázka, které objekty jsou rovinné, je velmi zajímavá. Pro grafy jde dokázat, že nutná a postačující podmínka rovinnosti je to, že nesmí obsahovat dva zvláštní grafy $K_{3,3}$ nebo K_5 .

(Kuratowski 1930)

Projektivní rovina obsahuje 103 takových zlobidel.

(H.Glover, P.Huneke a C.S.Wang 1979)

Pro každou plochu existuje konečně mnoho zlobidel.

(Robertson a Seymour 1984)



Obrázek 19.6.8: Dvě zlobidla K_5 a $K_{3,3}$, která se nevejdou do roviny.

19.6.9 O racionálních řešeních

Rovnice $x^n + y^n = 1$ může mít pro $n < 2$ pouze konečně mnoho racionálních řešení.

(L.Mordell, G.Faltings 1983, A.Willes 1993)

Snad nejlépe mohu popsat svoji zkušenost s děláním matematiky v pojmech cesty skrz temný neprozkoumaný zámek. Vstoupíte do první komnaty zámku a je naprostá tma. Pohybujete se a narazíte do nábytku, ale v podstatě se učíte, kde je každý kus nábytku. Nakonec, po zhruba šesti měsících najdete vypínač, rozsvítíte a najednou je vše osvětlené. Vidíte přesně, kde jste. Pak přejdete do další místnosti ...

(A.Willes ~ 1993)

19.6.10 Hypotéza o komplexním kruhu

Pokud je funkce $z \mapsto z + a_1z + \dots$ prosté zobrazení jednotkového kruhu do sebe, pak $a_n \leq n$.

(L. de Branges 1984)

Neruš mé kruhy.

(Archimédés ze Syrakús ~ -250)

19.6.11 Jemně holomorfní funkce

Existuje nejjemnější topologie v rovině, ve které jde definovat holomorfní funkce?
Jemná topologie v teorii potenciálu je jedním z dobrých kandidátů.

(B.Fuglede)

19.6.12 Variety

Pokud má každý bod topologického prostoru okolí homeomorfní s otevřenou koulí v \mathbb{R}^n , nazýváme jej n -varieta.

Jaké jsou kompaktní 3-variety ?

(H.J.Poincaré 1904)

19.6.13 Lokální topologické grupy

Topologická grupa je grupa, která je zároveň topologickým prostorem, přičemž jsou grupové operace (násobení a inverze) spojité. Pokud má každý bod okolí homeomorfní s otevřenou koulí v R^n a má lokální souřadnice, pak má i lokálně analytické souřadnice.

(J.v.Neumann 1933, Pontrjagin 1939, Chevalley 1941, Gleason a Yamabe 1952, Montgomery a Zippin 1953)

19.6.14 Kulečnickové trajektorie

Existují neperiodické trajektorie. Pravděpodobnost, že je zrovna koule pohybující se po neperiodické trajektorii v zadané množině, závisí pouze na velikosti (míře) zadané množiny.

(G.D.Birkhoff 1931)

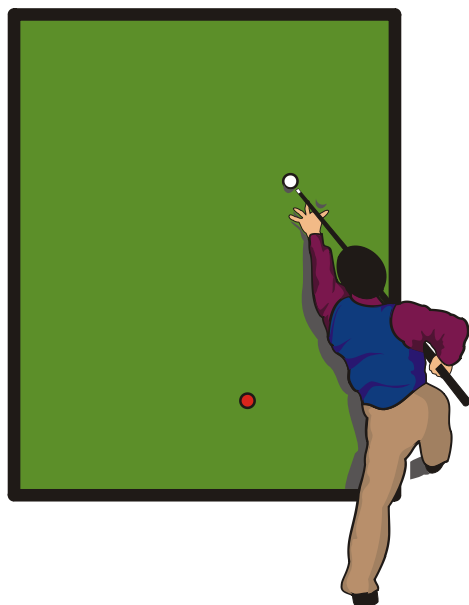
19.6.15 Paradox dvojčat

Dvojčata Andulka a Boženka se dohodli, že Boženka dojde pro zmrzlinu. Když se vrátila za 10 minut Boženka se zmrzlinou, postavili se před zrcadlo a Boženka vypadala mladší. Je to možné?

Ano. Boženka pro zmrzku vyrazila rychlostí $3/5$ rychlosti světla a vrátila se stejnou rychlostí. Časová dilatace podle teorie relativity je 80%. Andulce uplynulo 10 minut, zatímco Božence jen 8 minut. Vypadala mladší.

Čas udělal Bůh proto, aby se všechno nestalo naráz.

(anonym z Texasu (grafiti))



Obrázek 19.6.14: Není možné se netrefit. Při silné ráně po nezacyklené dráze se trefí každý.

Jak to viděla Boženka? Nejprve se rychlostí $3/5$ rychlosti světla vzdálila Andulka. Pak po 4 minutách se to stalo. Andulka mizela rychlostí $3/5$ rychlosti světla a já jí chtěla dohonit rychlostí $3/5$ rychlosti světla. Tak jsem musela nasadit rychlost $6/5$ rychlosti světla. To ale nešlo. Tak jsem ty rychlosti plus mínus $3/5$ rychlosti světla sečetla relativisticky. Tak jsem za Andulkou vyrazila rychlostí $15/17$ rychlosti světla. Za 4 minutky jsme se sešly.

Čas jde s různými lidmi různým krokem. Řeknu vám, komu čas kráčí, komu cválá, komu letí tryskem a komu ještě stojí.

(W.Shakespeare ~ 1590)

19.6.16 Transcendentní čísla

Pro α a β kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty (algebraické), je α^β transcendentní.

(A.O.Gelfond a T.Schneiderem 1934)

Za sto let ode dneška budou obě věty (o barvení map a klasifikaci jednoduchých grup) pouhá cvičení pro třetí ročník univerzity, s důkazy na několika stránkách pomocí vhodných pojmů, které v té době budou zcela zřejmé.

(P.Halmos)

Kapitola 20

Závěrečná kapitola



outo kapitolou se uzavírá naše putování po matematické analýze.



Bylo u jednotlivých věcí, které jsme viděli, vše jasné? T.j. proč to tak je a proč to tady je? IF TRUE $\implies +\infty$, IF FALSE $\implies -\infty$. ELSE CONTINUE.

"What else?" (poté, co si vyslechl vše, co vím)

(K.Omiljanowski \sim 2000)

20.1 Historie matematické analýzy

20.1.1 Historické matematické osobnosti

Z mnoha a mnoha vynikajících matematiků vybírám obecně známá jména matematiků, kteří reprezentují rozhodující přínos k rozvoji matematiky.

Thalés z Míléty (\sim -600) - první obecná tvrzení

Pýthagorás ze Samu (\sim -550) - propojení geometrie a čísel

Zénón a Eley (\sim -450) - paradox s nekonečně mnoha malými kroky

Aristotelés ze Stageiry (\sim -350) - logika

Eukleidés z Alexandrie (\sim -330) - propojení geometrie a čísel

Archimédés ze Syrakús \sim -250 (\sim -) - aplikace matematiky

L.Fibonacci (\sim 1212) - použití arabského číselného zápisu

J.Napier (\sim 1600) - funkce logaritmus

J.Keppler (\sim 1619) - pohyb planet

G.Galileo (\sim 1636) - dynamika

R.Descartes (~ 1630) - analytická geometrie
 P.Fermat (~ 1630) - pravděpodobnost
 B.Pascal (~ 1640) - první počítač stroj
 I.Newton (~ 1665) - derivace a integrál
 G.W.Leibnitz (~ 1665) - derivace a integrál
 A.L.Cauchy (~ 1820) - matematická analýza
 L.Euler (~ 1740) - velký univerzalista, teorie čísel
 C.F.Gauss (~ 1830) - korunní princ matematiky, základní věta algebry
 E.Galois (~ 1830) - moderní algebra
 G.Cantor (~ 1900) - různé typy nekonečna, teorie množin
 D.Hilbert (~ 1900) - axiomatika a formalismus
 K.Göedel (~ 1931) - pravdivá nedokazatelná tvrzení
 J.v.Neumann (~ 1940) - poslední univerzalista, teorie her, počítače

20.1.2 Cesta pokroku lidstva

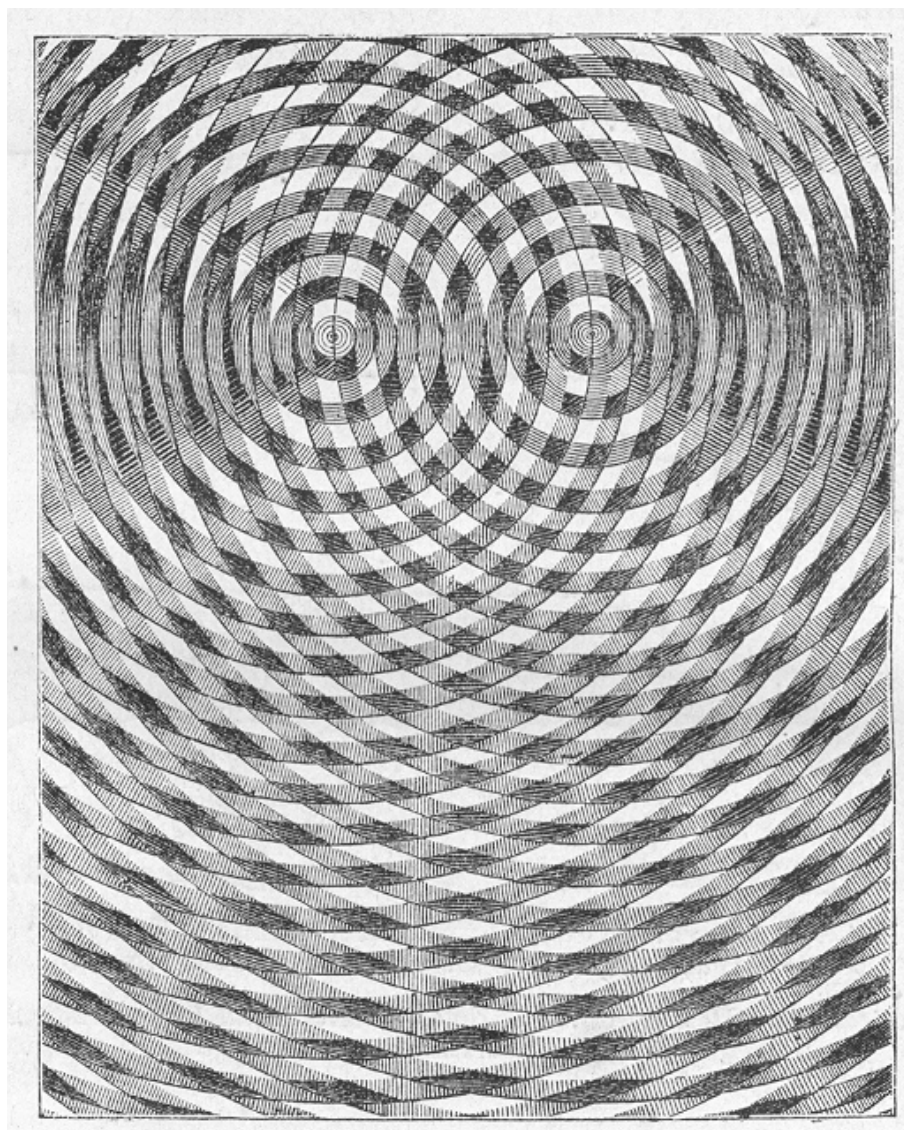
Obecnější pohled na pokrok lidstva přináší poučení pro budoucí rozvoj. Dosavadní vývoj lidského poznání stojí na těchto základních kamenech:

- (i) Pohyb těles.
- (ii) Existence různých atomů.
- (iii) Teplo je projevem pohybu atomu.
- (iv) Elektřina, magnetismus a optika jsou v podstatě pole.
- (v) Vývoj biologických druhů.
- (vi) Jednota času, prostoru, hmotnosti a energie - teorie relativity.
- (vii) Neurčitost polohy, energie, rychlosti a hybnosti - kvantová teorie.
- (viii) Molekulární biologie.
- (ix) Posloupnost vztahu součást-celek (a jejich rozměry a energie) otevřená na obou koncích.
- (x) Vesmír jako celek.

(Weisskopf)

Pokrok přinášejí ti, kdo se odvažují
 stále měnit vše, co není v pořádku.
 (B.Bolzano ~ 1850)

Je dobré se poučit a jít dál.



Obrázek 20.1.2: Co je to vlastně okolo nás?

Jsi hlupák, děláš, co už bylo vykonáno.
(Plutus)

Celý pokrok lidstva se odrážel v rozvoji matematického myšlení a matematiky jako součásti univerzálního jazyka vědecké komunikace.

20.2 Současnost matematiky a matematické analýzy

20.2.1 Novinky-pojmy

Poslední doba otevřela nová témata a nabídla řadu problémů k řešení. Vzhledem k překonávání hranic mezimatematickými obory jsou novými věcmi v matematice zasaženy všechny obory včetně matematické analýzy. Z nových pojmů jsou to

- ⇒ Zobecněné limity a posloupnosti
- ⇒ Distribuce
- ⇒ Metoda Monte Carlo - nahrazení problému simulovaným experimentem a zjišťování pravděpodobnosti
- ⇒ Kategorie - objekty a morfismy mezi nimi, funktory pracují nad nimi
- ⇒ K-teorie - formální součty hrušek a jablek
- ⇒ Rychlá frekvenční transformace - konečné součty místo numerické integrace
- ⇒ Nestandardní analýza - nekonečně malé veličiny
- ⇒ Katastrofy - kde má projekce plochy na jinou plochu inverzi
- ⇒ Chaos - nepředvídatelnost chování systému
- ⇒ Problém čtyř barev
- ⇒ O racionálních bodech křivek
- ⇒ Ergodická teorie - o kulečnickové trajektorii
- ⇒ Transcendentní čísla - je jich až moc
- ⇒ Hypotéza kontinua - není pravdivá ani nepravdivá
- ⇒ Topologické grupy - lokálně analytický prostor \mathbb{R}^n
- ⇒ Klasifikace jednoduchých grup - pokud mají pouze dvě normální podgrupy
- ⇒ Věta o indexu - analytický a topologický index
- ⇒ Frekvenční řady - konvergence skoro všude
- ⇒ Celočíslné rovnice - neexistuje algoritmus, který u polynomiální rovnice s celočíselnými koeficienty pozná, zda má celočíselné řešení
- ⇒ Aproximace kompaktních zobrazení - nestačí konečněrozměrné operátory
- ⇒ Variety - křivá verze prostoru, kde jde ještě derivovat
- ⇒ Hypotéza o komplexním kruhu

(Halmos)

Pro klid příštích generací jsou veškeré matematické výsledky neustále prověřovány a jsou odstraňovány případné nepřesnosti jednotlivých důkazů. Tak se matematika stává opravdu důvěryhodným zdrojem informací.



Nicméně, chybička se vždycky najde.

Jsou sestaveny formální systémy, které zachycují strojově zpracovatelnou verzi matematiky. Tak průběžně počítače ověřují platnost známých tvrzení, nacházejí slabá místa důkazů či důkazy nové. Tak, v závislosti na zadaných axiomech, se buduje svět pravdivých tvrzení.



Když ti to neprojde ručičkama a hlavíčkou, na nic ti to nebude ;-)

Matematika není sbírkou vět, ale souborem myšlenek.

(P.Halmos)

20.3 Budoucnost

Matematika nachází inspiraci a aplikace v přírodních vědách jako je fyzika, biologie, či chemie, společenských vědách i v dalších oblastech lidského snažení.

Mezi úspěšné aplikace patří například obchod, finance, bezpečnost, management, teorie rozhodování, modelování komplexních systémů, ekologie, epidemiologie, šíření nemoci mezi buňkami organismu, změna genetické výbavy, imunologie, genetika, neurologie, drogová terapie, genetické mutace viru HIV, hydrodynamika, studium povětří, klimatu, dynamické systémy, simulace letadel a aut, pravděpodobnostní řešení různých modelů a situací.



Matematika je bohatá nevěsta :-)

Problém je lidská inteligence a její plné využití. Umělá inteligence je zatím redukována na základní činnosti. Její plné rozvinutí umožní mimojiné sestavit algoritmus, který bude mít výstup, který ještě přesně neznáme (analýza grafických dat, hledání anomálií, signálu neznámých civilizací, ...).

Bude se muset hledat a hledat, přijít s novými nápady a postupy.

... přesnost má své místo v teorii čísel a algebře, plné důkazy musejí být v publikacích, není to však jediná (matematická) hra ve městě.

(G.F.Simmons 1972)

Jak budeme hledat a řešit nové problémy, jak ovlivníme vývoj světa, pokud to lze. Jak se stát aktivními články vesmíru. Jak si pohrát z budoucností ...

20.3.1 Základní přírodní principy

Z přírodních zákonů vychází zkoumání přírodních dějů. Jejich jednoduchá formulace (pokud je správně) potěší čtenáře:

- ⇒ Existuje maximální rychlost (speciální teorie relativity).
- ⇒ Existuje minimální akce (kvantová teorie).
- ⇒ Existuje maximální síla (obecná teorie relativity).
- ⇒ Existuje nejmenší entropie (termodynamika).

Z toho se odvodí, že existuje nejmenší časový interval, největší výkon, největší velikost systému, nejmenší vzdálenost, nejmenší objem, největší křivost, největší hustota, největší hmotnost, největší energie, největší moment, nejmenší elektrický náboj, nejmenší odpor, největší elektrický proud, . . .

20.3.2 Gravitace a hmota

Jsou známy čtyři síly:

- ⇒ gravitace (graviton?),
- ⇒ elektromagnetismus (foton),
- ⇒ silná síla držící částice v jádru (gluon),
- ⇒ slabá síla způsobuje rozpad atomového jádra některých radioaktivních prvků (W^- , W^+ , Z^0).

Jaká je jejich podstata? Co je podstatou gravitace? Co je za tím vším? Lze se domnívat, že se lidstvo ještě nedostalo k základům přírodních zákonů. Tak si lze budovat vlastní teorie fungování světa. Hmotu (například částici jako elektron) si můžeme představit jako kuličku nebo jako vlnění. Může to být věc, která se chvilkami objevuje v našem světě a chvilkami mizí do nám nedostupných světů.

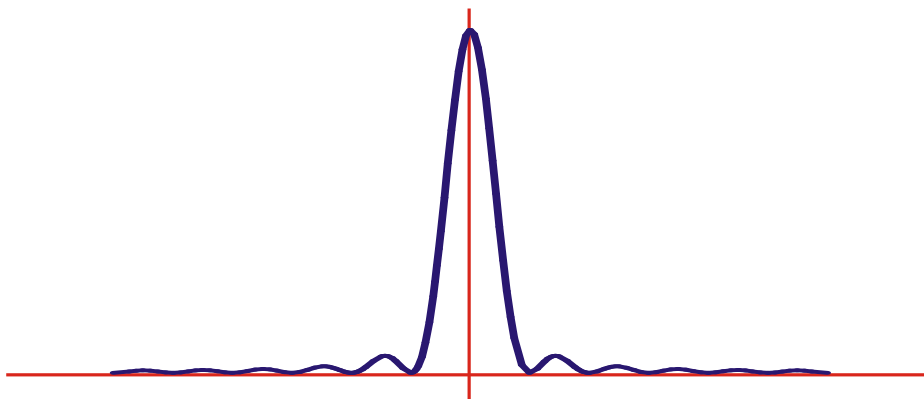
Hmota (například částice) může mít také charakter funkce. Tato funkce se dá našimi smysly lokalizovat, odpovídá zhruba charakteristické funkci nějakého intervalu. Je však možné, že každá taková funkce má graf podobný nekonečnému kopečku. Tak by se částice pohybovala společně i se svým kopečkem, který by reagoval s ostatními kopečky. Tím by se vysvětlilo, proč my víme o Zeměkouli a Zeměkoule o nás. Vzájemný pohyb a reagování těchto kopečků vytváří náš svět.

Membrány jsou jednou z fyzikálních teorií, kdy všechny částice jsou vlastně membrány (obecně d -brány pro vhodná d). Tyto membrány kmitají. My z těchto membrán vidíme pouze něco. To ostatní se odehrává v jiných dimenzích a světech.



Vzhledem k tomu, že membrány a světy, ve kterých žijí, nejsou vidět celé, teorie se nemůže mýlit.

Membrány jsou velmi slibné, protože nic nepokazí.

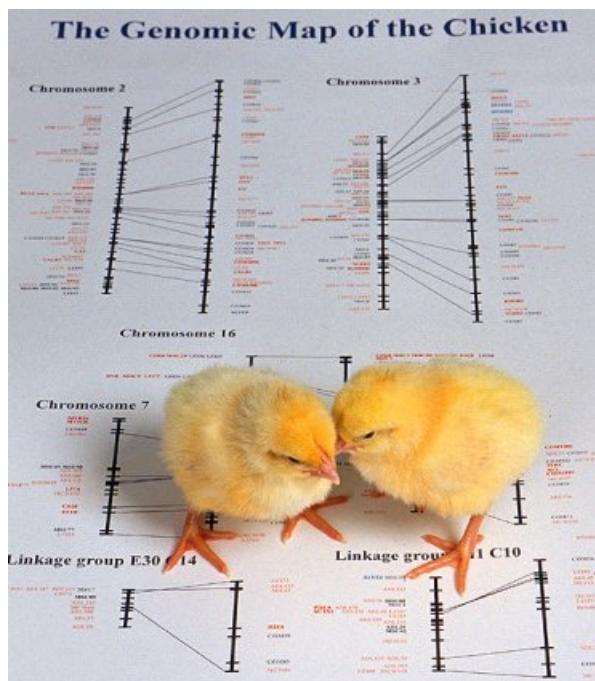


Obrázek 20.3.2: Částice a její kopeček.

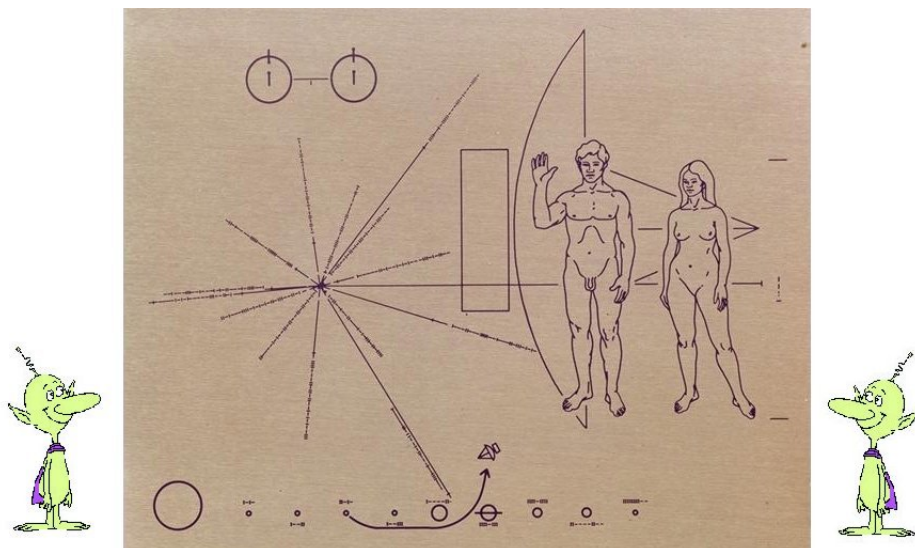


A pokud bude mít rovnice popisující černou díru kladné i záporné řešení, dokáže z ní zkušený loupežník utéci.

20.3.3 Jak je co zakódováno



Obrázek 20.3.3: Poselství kuřatům.



Obrázek 20.3.3: Poselství do vesmíru.

Ze všech zvířat archy Noemovy
 a ze všeho, co můžem popsat slovy,
 jen balvany a lidé mají odvahu
 urvat se od skály
 a padat dolů po svahu
 a na světě, který se furt mění,
 překonat, co překonáno není.

(P.Dobeš)

Hledání skutečných zákonů světa je úloha nejvyšší důležitosti.

Jaká je cesta, takový je cíl.

(Mahátmá Gándhí)

Příloha A

Slovník pojmů

A.1 Základní nezvyklá spojení

- Abelovo kritérium = druhé součinné kritérium, viz str. 104
- algebraická Hahn-Banachova věta = algebraická rozšiřovací věta, viz str. 173
- algebraická rozšiřovací věta = algebraická Hahn-Banachova věta, viz str. 173
- axiomatická aritmetika = Peanova aritmetika, viz str. 16
- Baireův prostor = hutný prostor, viz str. 169
- Banachova algebra = úplná normovaná algebra, viz str. 219
- Banachův prostor = úplný normovaný prostor, viz str. 180
- Bieberbachova hypotéza = hypotéza o komplexním kruhu, viz str. 378
- Bolzano - Cauchyova podmínka = podmínka ustálenosti, viz str. 43
- Borelovská množina = topologická množina, viz str. 94
- cauchyovská posloupnost = ustálená posloupnost, viz str. 43
- cauchyovská = ustálená, viz str. 171
- Cauchy-Riemannovy podmínky = holomorfní podmínky, viz str. 142
- Dirichletova funkce = charakteristická funkce množiny racionálních čísel, viz str. 94
- Dirichletova funkce = rovné racionální síto, viz str. 63
- Dirichletovo kritérium = první součinné kritérium, viz str. 104
- druhé součinné kritérium = Abelovo kritérium, viz str. 104
- Fredholmův operátor = operátor konečného typu, viz str. 228
- funkční matice = Jacobiho matice, viz str. 115
- Gelfandova transformace = spektrální transformace, viz str. 220
- geometrická Hahn-Banachova věta = geometrická rozšiřovací věta, viz str. 182
- geometrická rozšiřovací věta = geometrická Hahn-Banachova věta, viz str. 182
- Hahn-Banachova věta = spojitá rozšiřovací věta, viz str. 182
- Hausdorffův prostor = oddělený prostor, viz str. 164
- hermiteovský = samoadjungovaný, viz str. 219
- Hilbertův prostor = úplný součinný prostor, viz str. 188
- holomorfní podmínky = Cauchy-Riemannovy podmínky, viz str. 142
- hutný prostor = Baireův prostor, viz str. 169
- hypotéza o komplexním kruhu = Bieberbachova hypotéza, viz str. 378
- charakteristická funkce množiny racionálních čísel = Dirichletova funkce, viz str. 94
- Choquetův simplex = zobecněný simplex, viz str. 179
- integrace per partes = integrace po částech, viz str. 102
- integrace po částech = integrace per partes, viz str. 102
- Jacobiho matice = funkční matice, viz str. 115
- Kleinova láhev = kouzelná láhev, viz str. 196

- kouzelná láhev = Kleinova láhev, viz str. 196
- křivé racionální síto = Riemannova funkce, viz str. 63
- Lagrangeovy multiplikátory = vázané multiplikátory, viz str. 120
- Laurentova řada = zobecněná mocninná řada, viz str. 150
- Lebesgueovská míra = poctivá míra, viz str. 96
- Lebesgueovsky integrovatelná funkce = poctivě integrovatelná funkce, viz str. 98
- Lebesgueovsky měřitelná množina = poctivě měřitelná množina, viz str. 94
- Lebesgueův integrál = poctivý integrál, viz str. 97
- lipschitzovská funkce = sublineární funkce, viz str. 108
- Móbiova páska = překřížený pásek, viz str. 195
- nepoctivá míra = Stieltjesova míra, viz str. 96
- Newtonův integrál = primitivní integrál, viz str. 101
- oddělený prostor = Hausdorffův prostor, viz str. 164
- operátor konečného typu = Fredholmův operátor, viz str. 228
- Peanova aritmetika = axiomatická aritmetika, viz str. 16
- platí základní věta analýzy = vlastnost RNP, viz str. 218
- poctivá míra = Lebesgueovská míra, viz str. 96
- poctivě integrovatelná funkce = Lebesgueovsky integrovatelná funkce, viz str. 98
- poctivě měřitelná množina = Lebesgueovsky měřitelná množina, viz str. 94
- poctivý integrál = Lebesgueův integrál, viz str. 97
- podmínka ustálenosti = Bolzano - Cauchyova podmínka, viz str. 43
- primitivní integrál = Newtonův integrál, viz str. 101
- první součinné kritérium = Dirichletovo kritérium, viz str. 104
- překřížený pásek = Móbiova páska, viz str. 195
- Radonova míra = topologická míra, viz str. 190
- Riemannova funkce = křivé racionální síto, viz str. 63
- rovné racionální síto = Dirichletova funkce, viz str. 63
- samoadjungovaný = hermiteovský, viz str. 219
- spektrální transformace = Gelfandova transformace, viz str. 220
- spojitá kompaktifikace = Stone-Čechova kompaktifikace, viz str. 166
- spojitá rozšiřovací věta = Hahn-Banachova věta, viz str. 182
- Stieltjesova míra = nepoctivá míra, viz str. 96
- Stone-Čechova kompaktifikace = spojitá kompaktifikace, viz str. 166
- sublineární funkce = lipschitzovská funkce, viz str. 108
- TEMNO + AC = ZFC, viz str. 22
- TEMNO = ZF, viz str. 19
- topologická míra = Radonova míra, viz str. 190
- topologická množina = Borelovská množina, viz str. 94
- úplná normovaná algebra = Banachova algebra, viz str. 219
- úplný normovaný prostor = Banachův prostor, viz str. 180
- úplný součinný prostor = Hilbertův prostor, viz str. 188
- ustálená posloupnost = cauchyovská posloupnost, viz str. 43
- ustálená = cauchyovská, viz str. 171
- vázané multiplikátory = Lagrangeovy multiplikátory, viz str. 120
- vlastnost RNP = platí základní věta analýzy, viz str. 218
- ZF = TEMNO, viz str. 19
- ZFC = TEMNO + AC, viz str. 22
- zobecněná mocninná řada = Laurentova řada, viz str. 150
- zobecněný simplex = Choquetův simplex, viz str. 179

Příloha B

Přehled o literatuře

B.1 Doporučená literatura ke studiu

Matematická analýza je tradiční disciplína přednášená na univerzitách studentům mnoha různých oborů. Existuje dlouhá řada vynikajících učebnic a skript. Jsou sepsány s ohledem na studenty jednotlivých oborů a nelze jednu z nich doporučit jako univerzální studijní text pro všechny.



Mám však svoje oblíbence, které neprozradím.

B.2 Použité zdroje

Základní partie o výrocích a množinách jsou podle internetových zdrojů, zvláště podle skript G.Gierze. Další základní partie matematické analýzy byly zpracovány podle paměti. Pokročilejší partie jsou inspirovány knihou L.Zajíčka. Teorii míry a integrování jsem opisoval ze skript J.Lukeše a J.Malého. Funkcionální analýzu jsem čerpal zejména ze skript J.Lukeše a knihy A.N.Kolmogorova a S.V.Fomina. Diferenciální rovnice a aplikace jsou převážně podle knih G.F.Simmonse a R.Redheffera.



Kdo je labužník, čte to, co já.

Při zpracování jsem používal obrázky dodávané s programem CorelDRAW, verze 8.0, firmy Corel ®. Při výkladu o suchém putování byla použita idea hry Hledání min, firmy Microsoft ®. Při vytváření grafů byl použit program MAPLE, firmy Maplesoft ®.

Fotografie jsou převážně z volně šiřitelných internetových zdrojů.



Všem autorům, jejichž díla jsem použil při přípravě tohoto Průvodce vyslovuji poděkování.

Pokud jsem na některé zdroje zapomněl a některého autora neuvedl, omlouvám se.



SORRY.

- Písmeno T je od malíře Georga Wellnera. [Wellner] str. . Zde použito na str. (i).
- Obrázek algebry je z [NOA] str. . Zde použito na str. 4.
- Obrázek algebry je z [NOA] str. . Zde použito na str. 5.
- Citáty jsou většinou z [Woodard] str. . Zde použito na str. 9.
- O pravdě podle [Bolander] str. . Zde použito na str. 11.
- Teorie množin je podle [Gierz] str. . Zde použito na str. 12.
- Obrázek koní je z [Hosler] str. . Zde použito na str. 12.
- O stromu podle [Balcar] str. . Zde použito na str. 16.
- Axiomy jsou podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 34.
- Severní pól je z [NOA] str. . Zde použito na str. 39.
- Obrázek měřidla je z [DHD] str. . Zde použito na str. 121.
- Obrázek tornáda je z [NASA-LINDA] str. . Zde použito na str. 128.
- Obrázek tornáda je z [NOA] str. . Zde použito na str. 128.
- Obrázky z pólu jsou z [NOA] str. . Zde použito na str. 145.
- Obrázek Davida je z [pics4learning] str. . Zde použito na str. 151.
- Dimenze je podle [Pogoda] str. . Zde použito na str. 169.
- Andersonovo tvrzení je z [?] str. . Zde použito na str. 190.
- Pórovitost je podle [Zajíček] str. . Zde použito na str. 193.
- Prostory integrovatelných distribucí je podle [Fučík] str. 82. Zde použito na str. 208.
- Obrázek stopy je z [Photo Library] str. . Zde použito na str. 209.
- O distribucích je podle [Lieb] str. 167. Zde použito na str. 210.
- O distribucích je podle [Lieb] str. 159. Zde použito na str. 213.
- O distribucích je podle [Štěpánek] str. str. 55. Zde použito na str. 213.
- Obrázek pevného bodu je z [Ruhmann] str. . Zde použito na str. 222.
- Exponenciální transformace [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 231.
- O trávení je podle [Redheffer 1992] str. 375. Zde použito na str. 232.
- O konvoluci je podle [Redheffer 1992] str. 387. Zde použito na str. 232.
- Použití konvoluce na rovnice je v [Redheffer 1992] str. str. 393. Zde použito na str. 233.
- Frekvenční řady a transformace je podle [Zajíček] str. 187. Zde použito na str. 233.
- Obrázek Doveru je z [NOA] str. . Zde použito na str. 234.
- Obrázek Niagary je z [pics4learning] str. . Zde použito na str. 234.
- O frekvenční transformaci je podle [Lieb] str. 126. Zde použito na str. 240.
- Frekvenční transformace distribucí je podle [Štěpánek] str. str. 55. Zde použito na str. 240.
- O distribucích je podle [Štěpánek] str. str. 55. Zde použito na str. 241.
- O distribucích je podle [Lieb] str. 167. Zde použito na str. 242.
- O distribucích je podle [Lieb] str. 144. Zde použito na str. 243.
- Kvalitativní vlastnosti jsou podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 246.
- Obrázek vloček je z [NOA] str. . Zde použito na str. 247.
- Linearita je podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 248.

- O substituci je podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 248.
- O metodách je podle [Simmons] str. 418. Zde použito na str. 249.
- O variační úloze je podle [Lieb] str. 267. Zde použito na str. 250.
- Metoda konečných prvků je z [Fučík] str. 222. Zde použito na str. 250.
- Obrázek letadla je z [NASA] str. . Zde použito na str. 251.
- O fosíliích je zde podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 257.
- Údaje o výpočtech roků jsou podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 257.
- Obrázek Stonehenge je z [DHD] str. . Zde použito na str. 257.
- Obrázek [NASA-JOHNSON] str. . Zde použito na str. 257.
- Jednoznačnost [Redheffer 1992] str. 198. Zde použito na str. 258.
- O distributivním řešení je podle [Štěpánek] str. . Zde použito na str. 259.
- O kánoi podle [Redheffer 1992] str. 15. Zde použito na str. 259.
- Obrázek loď je z [NASA] str. . Zde použito na str. 259.
- Obrázek Kréty je z [NASA] str. . Zde použito na str. 259.
- Populační exploze podle [Redheffer 1992] str. str. 84. Zde použito na str. 261.
- Jak neprohrát válku podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 262.
- Obrázek lodí je z [NASA] str. . Zde použito na str. 262.
- Boj s neštovicemi je podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 263.
- Soustava je podle [Simmons] str. 265. Zde použito na str. 264.
- Kritéria podle [Redheffer 1992] str. 177. Zde použito na str. 265.
- Diferenciální operátor podle [Redheffer 1992] str. 142. Zde použito na str. 266.
- Soupeřivé populace podle [Redheffer 1992] str. str. 347, 349. Zde použito na str. 266.
- Orázek žraloka je z [NOA] str. . Zde použito na str. 266.
- Soustava podle [Simmons] str. 265. Zde použito na str. 267.
- Soupeřivé populace podle [Redheffer 1992] str. str. 347 349. Zde použito na str. 268.
- O trajektoriích [Simmons] str. 341. Zde použito na str. 268.
- O van der Polově rovnici je podle [Redheffer 1992] str. 343. Zde použito na str. 269.
- Matice podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 270.
- O cestě podle [Simmons] str. 360. Zde použito na str. 271.
- Variační počet podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 271.
- Problém minimální plochy podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 273.
- Problém minimální plochy podle [Fučík] str. 211. Zde použito na str. 274.
- Ulita je podle [Redheffer 1992] str. str. 58. Zde použito na str. 274.
- O ortogonálních trajktořiích je podle [Redheffer 1992] str. str. 62. Zde použito na str. 275.
- Řetězovka je podle [Simmons] str. 54. Zde použito na str. 276.
- Problém lana je podle [Elsgolc] str. 119. Zde použito na str. 277.
- Tah je podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 278.
- Obrázek lodí je z [Hosler] str. . Zde použito na str. 279.
- Stíhací křivka je v [Grozdev] str. . Zde použito na str. 279.
- Jistý "homerun" podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 281.
- Obrázek hřiště je z [pics4learning] str. . Zde použito na str. 281.
- Vodní hodiny podle [Redheffer 1992] str. str. 93. Zde použito na str. 283.
- Pohyby planet podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 284.
- O tunelování je podle [Gladney] str. . Zde použito na str. 285.
- Obrázek zeměkoule je z [NASA-NASA] str. . Zde použito na str. 285.
- Obrázek tunelu je od malíře Georga Wellnera. [Wellner] str. . Zde použito na str. 287.
- [NASA-NASA] str. . Zde použito na str. 287.
- O pružině je z [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 288.
- Jednoznačnost je podle [Redheffer 1992] str. 198. Zde použito na str. 288.

- Obrázek magnetu je z [Lockyer] str. . Zde použito na str. 290.
- Srovnání řešení je z [Simmons] str. 122. Zde použito na str. 291.
- Řešení pomocí řad je z [Simmons] str. 155. Zde použito na str. 291.
- Netlumené nucené kmity podle [Redheffer 1992] str. str 128. Zde použito na str. 292.
- Netlumené nucené kmity podle [Redheffer 1992] str. str 128. Zde použito na str. 294.
- Tlumení podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 294.
- Stabilita podle Ljapunova v [Simmons] str. . Zde použito na str. 294.
- Obrázek kuželek je z [Hosler] str. . Zde použito na str. 294.
- Dvojpružina je z [Redheffer 1992] str. 162. Zde použito na str. 296.
- Obrázek koní je z [USDA] str. . Zde použito na str. 296.
- O kyvadle je z [Redheffer 1992] str. 336. Zde použito na str. 296.
- O distribucích je z [Štěpánek] str. 55. Zde použito na str. 297.
- Kmitání je z [Štěpánek] str. . Zde použito na str. 298.
- Snadné řešení vlnové rovnice je podle [Simmons] str. 131. Zde použito na str. 299.
- O distribucích je z [Štěpánek] str. . Zde použito na str. 299.
- Obrázek kapky je z [DHD] str. . Zde použito na str. 300.
- O distribucích je z [Štěpánek] str. . Zde použito na str. 300.
- Rovnice tepelné rovnováhy je z [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 301.
- Problém minimalizace je z [Elsgolc] str. 41. Zde použito na str. 302.
- Fundamentální řešení je z [Štěpánek] str. . Zde použito na str. 302.
- O bábovce podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 302.
- Rovnice vedení tepla [Redheffer 1992] str. 307. Zde použito na str. 303.
- Obrázek zahřívání je z [Wullner 1875] str. . Zde použito na str. 303.
- Obrázky kabin jsou z [NASA] str. . Zde použito na str. 304.
- O distribucích je z [Štěpánek] str. . Zde použito na str. 304.
- Obrázky tepelných stavů jsou z [NOA] str. . Zde použito na str. 305.
- Obrázek teplot je z [NASA] str. . Zde použito na str. 305.
- Brachystochrona podle [Simmons] str. . Zde použito na str. 305.
- Tautochrona podle [Simmons] str. 141. Zde použito na str. 309.
- Princip úměrnosti podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 310.
- Raketa podle [Simmons] str. 63. Zde použito na str. 310.
- Kvantová mechanika podle [Simmons] str. 194. Zde použito na str. 311.
- Nejmenší akce podle [Simmons] str. 380. Zde použito na str. 313.
- A Simple Proof That $E = mc^2$ [] str. . Zde použito na str. 314.
- Obrázek koule je z [Wullner] str. . Zde použito na str. 316.
- Ireducibilita podle [Wilkins] str. 13. Zde použito na str. 317.
- Rozšíření podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 318.
- Konstrukce podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 318.
- Rozšíření podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 318.
- Úhel podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 318.
- Krychle podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 319.
- Grupa podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 319.
- Rovnice podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 319.
- O řešení podle [Audin] str. . Zde použito na str. 320.
- O grupách podle [Ibragimov] str. . Zde použito na str. 320.
- o pi [Niven] str. . Zde použito na str. 322.
- Honors Project 16 [] str. . Zde použito na str. 323.
- Umocnil se podle [Talman] str. . Zde použito na str. 323.
- O kouli podle [Lasserre] str. . Zde použito na str. 323.
- Rotující hřídel podle [Redheffer 1992] str. . Zde použito na str. 324.

- Elektrický obvod jako kalkulačka [Redheffer 1992] str. str. 57. Zde použito na str. 324.
- O soustavě podle [Redheffer 1992] str. 341. Zde použito na str. 325.
- O snímání podle [Bruss] str. . Zde použito na str. 325.
- O skořápkách podle [Gillman] str. . Zde použito na str. 325.
- O otáčení podle [Hamilton] str. . Zde použito na str. 325.
- O periodických jevech podle [Arnold] str. . Zde použito na str. 329.
- O bifurkacích podle [Arnold] str. . Zde použito na str. 330.
- O prutu podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 331.
- Obrázek svěráku je z [Wullner] str. . Zde použito na str. 331.
- O membráně podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 331.
- O průhybu podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 332.
- O slabém řešení [Fučík] str. . Zde použito na str. 339.
- O lesu je podle Les Methodes [?] str. . Zde použito na str. 339.
- Prostory integrovatelných distribucí podle [Fučík] str. 82. Zde použito na str. 339.
- Obrázky vln jsou z [Photo Library] str. . Zde použito na str. 339.
- Slabé řešení podle [Fučík] str. 218. Zde použito na str. 339.
- O operátoru [Fučík] str. 230. Zde použito na str. 340.
- Simplexy podle [Homolog] str. . Zde použito na str. 341.
- Diferenciální formy \square str. . Zde použito na str. 342.
- Prvočíselná věta [Zagier] str. . Zde použito na str. 343.
- O úniku podle [?] str. . Zde použito na str. 345.
- O superkapiláře podle [Finn] str. . Zde použito na str. 345.
- O prosakování podle [Fučík] str. 30. Zde použito na str. 346.
- O kouli podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 347.
- O pochrchu podle [Wilkins] str. . Zde použito na str. 347.
- O indexu podle [Rognes] str. . Zde použito na str. 348.
- O průmětu podle [Digital] str. . Zde použito na str. 352.
- O tomografu podle [PFMA1984] str. 202. Zde použito na str. 352.
- O satelitech podle [Cors] str. . Zde použito na str. 352.
- Obrázek Saturnu je z [NASA] str. . Zde použito na str. 353.
- O úniku podle [?] str. . Zde použito na str. 353.
- Obrázek vesmíru je z [NASA] str. . Zde použito na str. 355.
- Problém těles podle [Diacu] str. . Zde použito na str. 355.
- O choreografiích podle [?] str. . Zde použito na str. 356.
- Relativita podle [Gascon] str. . Zde použito na str. 357.
- O gravitaci podle [Smale] str. . Zde použito na str. 358.
- Staré obrázky jsou z [NOA] str. . Zde použito na str. 358.
- O kvantovce podle [Lieb] str. 171. Zde použito na str. 358.
- O prostorech podle [Lieb] str. 179. Zde použito na str. 359.
- O energii podle [Lieb] str. 182. Zde použito na str. 359.
- O atomu podle [Lieb] str. 269 -283. Zde použito na str. 359.
- O kapalině podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 361.
- Obrázek vody je z [Wullner] str. . Zde použito na str. 362.
- Obrázek mraků je z [NOA] str. . Zde použito na str. 363.
- Obrázek cyklonu je z [NASA] str. . Zde použito na str. 363.
- Obrázky proudění jsou z [NASA] str. . Zde použito na str. 363.
- O solitonu podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 363.
- O plochách podle [Fučík] str. . Zde použito na str. 365.
- Izoperinetrický problém podle [?] str. . Zde použito na str. 365.
- O hypotéze podle [Smale] str. . Zde použito na str. 366.

- O časoprostoru [Smale] str. . Zde použito na str. 366.
- O dynamických cenách [Smale] str. . Zde použito na str. 367.
- O koulích podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 367.
- Obrázek kuliček je z [DHD] str. . Zde použito na str. 367.
- Obrázky fraktálu připraveny pomocí programu z [www.geocities.com] str. www.geocities.com/CapeCanaveral/ Hangar/7959/newtonapplet.html. Zde použito na str. 369.
- Obrázek míčků je z [Photo Library] str. . Zde použito na str. 370.
- O putování podle [Steward] str. . Zde použito na str. 370.
- O rovinnosti podle [Nešetřil] str. . Zde použito na str. 371.
- O racionálních řešeních [Halmos] str. . Zde použito na str. 371.
- O hypotéze podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 372.
- O varietách podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 373.
- O grupách podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 373.
- O kulečnicku podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 373.
- O dvojčatech podle [Curiosa] str. . Zde použito na str. 373.
- O číslech podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 374.
- O osobnostech podle [Bailey] str. . Zde použito na str. 375.
- O kamenech podle [Weisskopf] str. . Zde použito na str. 376.
- Obrázek interference je z [Lockyer] str. . Zde použito na str. 376.
- O pojmech podle [Halmos] str. . Zde použito na str. 377.
- O aplikacích podle [Griffiths] str. . Zde použito na str. 379.
- O principech podle [Schiller] str. . Zde použito na str. 379.
- Obrázek genů je z [USDA] str. . Zde použito na str. 381.
- Obrázek poselství je z [NASA] str. . Zde použito na str. 381.

Literatura

- [Appelbaum] David Appelbaum, *Dirac Operators - From Differential Calculus to the Index Theory*, March 27, 2000.
- [Arnold] Vladimir Arnold, *Dynamical systems*, Development of Mathematics 1950-2000, Birkhauser, Basel-Boston-Berlin 2000.
- [Atiyah] M.F. Atiyah, *Co je geometrie*, PFMA 4-29-1984, s. 213.
- [Audin] M. Audin, Integrability of Hamiltonian Systems, EMS December 2003, p. 9-12.
- [Bailey] Evelyn C. Bailey, *A Brief History of Mathematics*.
- [Balcar] Balcar, Teorie množin.
- [Barotello] V. Barotello, S. Terracini, *Action minimizing orbits in the n-body problem with simple choreography constraint*.
- [Bolander] Bolander, A primer to Contemporary Self-Reference.
- [Bruss] F.T. Bruss, *Playing trick on uncertainty*.
- [cituj.cz] cituj.cz.
- [Cors] J.M. Cors, J. Llibre, M. Ollé, *On central configuration of the coorbital satellite problem*.
- [Curiosa] Deneb Curiosa, *Twin Paradox*, Copyright 1996 Deneb Curiosa, <http://mentock.home.mindspring.com/twins.htm>.
- [DHD] DHD Multimedia Gallery, Gallery at <http://gallery.hd.org/>.
- [Diacu] F. Diacu, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Fitzroy Dearbon, 2002.
- [Digital] Digital Sundial.
- [Elsgolc] L.E. Elsgolc, *Variační počet*, SNTL, Praha 1965.
- [Euler] Euler, PMFA 1-25-1980, s. 43.
- [Finn] R. Finn, *Eight Remarkable Properties of Capillary Surfaces*, The Mathematical Intelligencer, 24,3 (2002), p. 21-33.
- [Fučík] S. Fučík, A. Kufner, *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978.
- [Gascon] F.G. Gascon, D.Peralta-Salas, *Escape to infinity under the action of a potential and a constant electromagnetic field*, J. Phys. A: Meth. Gen. 36(2003), 6441-6445.

- [Geometry] <http://www.geom.uiuc.edu/zoo/tootype/pplane/boy/eqns.html>, Copyright © 1995 by The Geometry Center.
- [Gierz] G.Gierz, *Lecture notes*, <http://ggierz.ucr.edu>, MATH 132 Spring 03.
- [Gillman] L.Gillman, *The car and the Goats*, American Mathematical Monthly, January 1992, pp. 3-7.
- [Gladney] Gladney, *Physics Lecture 22 - Chaos and Nonlinear Oscillations*, dept.physics.upenn.edu/courses/gladney/phys150/lectures/lecture_dec_10_1999.htm.
- [Griffiths] P.A. Griffiths, *Mathematics at the turn of the Millenium*, Monthly 107, January 2000.
- [Grozdev] S. Grozdev, I. Derzhanski, E. Sendova, *For Those Who Think Mathematics Dreary*, Dnevnik 1.238 (27 December 2001), p. 8.
- [Halmos] P.R. Halmos, *Jádro matematiky*, PMFA 5-27-1982.
- [Halmos] P.R. Halmos, *Zpomalil se rozvoj matematiky?*, PMFA 36(1991), c. 5.
- [Hamilton] W.R. Hamilton, PMFA 5-35-1990, str. 278.
- [Historická čítanka] Historická čítanka z českých dějin a literatury, Fragment, Havlíčkův Brod 1999.
- [Homolog] Homolog, Chapter 4, Topology I, p. 61-73.
- [Hosler] A. Hosler, E. Waik, *Naturlehre für der unteren Klassen der Mittelschulen*, Wien 1900.
- [Chen] So-Chin Chen, *Complex analysis in one and several variables*, Taiwanese Journal of Mathematics 4(4), 2000, 531-568.
- [Choquet] G. Choquet, *G. Choquet: vzpomínky a názory*, s. 29 - 43.
- [Ibragimov] N.H.Ibragimov, POKROKY 39,4(1994).
- [Jílek] F. Jílek, *Ceština je jazyk vtipný*, Mladá fronta, Praha 1968.
- [Kafka] F. Kafka, *Zámek*, Odeon 1989.
- [Kolmogorov] A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin, *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, STNL, Praha 1975.
- [Kutáková] E. Kutáková, V. Marek, J. Zachová, *Moudrost věků*, Svoboda, Praha 1988.
- [Lasserre] J.B. Lasserre, *A Quick Proof for the Volume of n-Balls*.
- [Lieb] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis, second edition*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, AMS Providence, Rhode Island 2001.
- [Lichtenberg] G.Ch. Lichtenberg, *Myšlenky, postrehy, nápady*, Odeon, Praha 1984.
- [Lockyer] J.N. Lockyer, *Studien zur Spectralanalyse*, Leipzig 1879.
- [Lukeš] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha 1998.

- [Lukeš] J. Lukeš, J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, Praha 2002.
- [Markus] Markus, EMS December 2003, p.15-17.
- [Nagata] Jun-iti NAGATA, z knihy.
- [Narici] Lawrence Narici, *Partners: Functional Analysis and Topology, Revised*, Topology Atlas Document zaaa-49.
- [NASA] NASA, <http://gimp-savvy.com/>.
- [NASA-JOHNSON] Earth Sciences and Image Analysis Laboratory, NASA Johnson Space Center, <http://eol.jsc.nasa.gov>.
- [NASA-LINDA] NASA-LINDA, <http://vrml.gsfc.nasa.gov/linda>.
- [NASA-NASA] NASA.
- [Nešetřil] J. Nešetřil, *Historická perspektiva konečné matematiky*, PMFA 1-31-1986, str. 35.
- [Netuka] I. Netuka, *Teorie potenciálu*.
- [Niven] I. Niven, *A Simple Proof that π is Irrational*, Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), p. 509.
- [NOA] US National Oceanic and Atmospheric Administration.
- [Okun] , L.B. Okun, *O pojmu hmotnost*, PMFA 5-35-1990.
- [Palais] B. Palais, *π Is Wrong*.
- [Perelson] A.S. Perelson, P.W. Nelson, *Mathematical Analysis of HIV-1 Dynamics in Vivo*, SIAM Review 41,1 (1999), 3-44.
- [Photo Library] Photo Library, <http://www.ecarboot.net/photolibrary/download.asp>, Photo Library Copyright Free.
- [pics4learning] pics4learning, <http://www.pics4learning.com>.
- [PMFA] PMFA, PMFA 2-25-1980, s.121; PMFA 5-35-1990, str. 280.
- [PFMA1984] PFMA, PFMA 4-29-1984, s. 202.
- [Pogoda] Z.Pogoda, L.M.Sokolowski, *Does Mathematics Distinguish Certain Dimensions of Spaces?*, Notices ... November.
- [Redheffer 1992] R. Redheffer, *Introduction to differential equations*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [Ritoré] M. Ritoré, A. Ros, *Some Updates on Isoperimetric Problems*, The Mathematical Intelligencer 24,3 (2002).
- [Rognes] John Rognes, *On the Atiah-Stinger theorem*, University of Oslo, March 2004.
- [Ruhlmann] M.Ruhlmann, *Vortrage uber Geschichte der Technische Mechanik*, Leipzig 1885.

- [Schiller] www.motionmountain.net, *36. Maximum force and minimum distance: physics in limit statements*.
- [Simmons] G. F. Simmons, *Differential Equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill Book Company 1972.
- [Slovník] K. Hais, B.Hodek, *Velký anglicko český slovník*, Academia, Praha 1984.
- [Smale] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century*, August 7, 1998.
- [Steward] Ian Steward, www.claymath.org/Popular-Lectures/Minesweeper.
- [Štěpánek] J. Štěpánek, *Matematika pro přírodovědce, Distribuce a diferenciální rovnice*, Karolinum, Praha 2001.
- [Talman] L.A. Talman, *On $x^{x^{x^{\dots}}}$* , Metropolitan State College of Denver.
- [USDA] US Department of Agriculture, <http://gimp-savvy.com/cgi-bin/>.
- [Wellner] G.Wellner, *Knihy kreseb III*.
- [Weisskopf] V.F. Weisskopf, *Hranice a meze vedy*, PMFA 1 36 1991 str. 1.
- [Wilkins] D.R. Wilkins, *Course 311: Hilary Term 2002, Part III: Introduction to Galois Theory*.
- [Wilkins] D.R. Wilkins, *Part IV: The Topological Classification of Closed Surfaces*, Course 421: Academic Year 1998-9.
- [Woodard] M.R. Woodard, *Quotes from the Mathematical Quotations Server*, Furman University.
- [Wullner 1875] A. Wullner, *Lehre von der Warme*, Leipzig 1875.
- [Wullner] A. Wullner, *Lehrbuch der Experimentalphysic*, Leipzig 1874.
- [www.geocities.com] www.geocities.com, www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/7959/newtonapplet.html
- [Zagier] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*, AMM **october**, (1997), x-y.
- [Zajíček] L. Zajíček, *Porosity and σ -porosity*, Real Analysis Exchange 13, 314-348.
- [Zajíček] L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, MATFY-ZPRESS, Praha 2003.