Singulární rozklad

Petr Tichý

31. října 2013

Outline

Singulární rozklad matice

- Jeden z nejdůležitějších teoretických i praktických nástrojů maticových výpočtů.

Singulární rozklad matice

- Jeden z nejdůležitějších teoretických i praktických nástrojů maticových výpočtů.
- Umožňuje určit **hodnost** či **normu** matice, **ortogonální báze** $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$ atd.

Singulární rozklad matice

- Jeden z nejdůležitějších teoretických i praktických nástrojů maticových výpočtů.
- Umožňuje určit **hodnost** či **normu** matice, **ortogonální báze** $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$ atd.
- Za univerzálnost a sílu tohoto nástroje musíme platit vyššími výpočetními nároky.

Singulární rozklad matice

- Jeden z nejdůležitějších teoretických i praktických nástrojů maticových výpočtů.
- Umožňuje určit **hodnost** či **normu** matice, **ortogonální báze** $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$ atd.
- Za univerzálnost a sílu tohoto nástroje musíme platit vyššími výpočetními nároky.
- Motivace vedoucí k zobecnění na singulární rozklad: spektrální rozklad hermitovská a pozitivně semidefinitní A .

- Nechť A je hermitovská, pozitivně semidefinitní, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hodnosti r, $r \equiv \mathrm{rank}(A)$.
- A má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, uvažujme uspořádání

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0 \,, \quad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0 \,.$$

- Schurova věta pro normální matice: existuje rozklad tvaru

$$A = Q \Lambda Q^* \,, \quad Q^* Q = I \,, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \,.$$

- Sloupce unitární $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ jsou vlastní vektory A,

$$Aq_j = \lambda_j q_j \,, \qquad j = 1, \ldots, n \,.$$

- Sloupce unitární $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ jsou vlastní vektory A,

$$Aq_j = \lambda_j q_j \,, \qquad j = 1, \ldots, n \,.$$

- $q_1, \ldots, q_n$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ a **definují rozklad** $\mathbb{C}^n$ na ortogonální jednodimenzionální podprostory, jež jsou **invariantní** vzhledem k násobení maticí A, tj.

$$v \in \operatorname{span}\{q_j\} \implies Av \in \operatorname{span}\{q_j\} \,, \quad j = 1, \ldots, n \,.$$

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Rozklad do ortogonálních invariantních podprostorů

- Sloupce unitární $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ jsou vlastní vektory A,

$$Aq_j = \lambda_j q_j \,, \qquad j = 1, \ldots, n \,.$$

- $q_1, \ldots, q_n$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ a **definují rozklad** $\mathbb{C}^n$ na ortogonální jednodimenzionální podprostory, jež jsou **invariantní** vzhledem k násobení maticí A, tj.

$$v \in \operatorname{span}\{q_j\} \implies Av \in \operatorname{span}\{q_j\} \,, \quad j = 1, \ldots, n \,.$$

- Aplikace A,

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k q_k \quad \implies \quad Av = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k q_k \,.$$

- **Schématicky zobrazené působení** A na $\{q_1, \dots, q_n\}$:

$$
\begin{aligned}
A\, q_1 \quad &\longrightarrow \quad \lambda_1\, q_1\,, \\
A\, q_2 \quad &\longrightarrow \quad \lambda_2\, q_2\,, \\
&\;\;\vdots \\
A\, q_r \quad &\longrightarrow \quad \lambda_r\, q_r\,, \\
A\,\{q_{r+1}, \dots, q_n\} \quad &\longrightarrow \quad 0\,.
\end{aligned}
$$

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Spektrální rozklad a ortogonální báze $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$

- **Schématicky zobrazené působení** A na $\{q_1, \ldots, q_n\}$:

$$
\begin{array}{rcl}
A\,q_1 & \longrightarrow & \lambda_1\; q_1\,, \\
A\,q_2 & \longrightarrow & \lambda_2\; q_2\,, \\
 & \vdots & \\
A\,q_r & \longrightarrow & \lambda_r\; q_r\,, \\
A\,\{q_{r+1}, \ldots, q_n\} & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}
$$

- Vidíme báze $\mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$:

$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{q_1, \ldots, q_r\}\,, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{q_{r+1}, \ldots, q_n\}\,.$$

- **Dyadický rozvoj** matice A,

$$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, q_j \, q_j^* = \sum_{j=1}^{r} A_j \,, \quad A_j \equiv \lambda_j \, q_j \, q_j^* \,.$$

  Platí $\|A_j\| = \|A_j\|_F = \lambda_j$ a $\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \ldots \geq \|A_r\|$.

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Dyadický rozvoj, aproximace A maticí nižší hodnosti

- **Dyadický rozvoj** matice A,

$$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, q_j \, q_j^* = \sum_{j=1}^{r} A_j \,, \quad A_j \equiv \lambda_j \, q_j \, q_j^* \,.$$

Platí $\|A_j\| = \|A_j\|_F = \lambda_j$ a $\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \ldots \geq \|A_r\|$.

- **Aproximace A maticí $A^{(k)}$** hodnosti k,

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} A_j \,.$$

Hermitovské pozitivně semidefinitní matice

Dyadický rozvoj, aproximace A maticí nižší hodnosti

- **Dyadický rozvoj** matice A,

$$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, q_j \, q_j^* = \sum_{j=1}^{r} A_j \,, \quad A_j \equiv \lambda_j \, q_j \, q_j^* \,.$$

  Platí $\|A_j\| = \|A_j\|_F = \lambda_j$ a $\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \ldots \geq \|A_r\|$.

- **Aproximace A maticí $A^{(k)}$** hodnosti k,

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} A_j \,.$$

- **Chyba aproximace** měřená spektrální normou

$$\| \, A - A^{(k)} \, \| = \lambda_{k+1} \,.$$

Outline

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^*

- **Singulární rozklad** $\to$ **zobecnění** předchozího na obecné matice
$$A \in \mathbb{C}^{n\times m}, \qquad \mathrm{rank}(A) = r\,.$$
- K odvození použijeme spektrální rozklady A^*A a AA^*. (čtvercové hermitovské pozitivně semidefinitní).

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^* (cvičení)

Pro libovolnou komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A^*A) &= \mathcal{N}(A), \qquad \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*), \\ \mathcal{N}(AA^*) &= \mathcal{N}(A^*), \qquad \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A). \end{aligned}$$

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^*

- Připomeňme

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*) &= \mathbb{C}^m, \qquad \mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^*)\,, \\ \mathcal{N}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A) &= \mathbb{C}^n, \qquad \mathcal{N}(A^*) \perp \mathcal{R}(A)\,. \end{aligned}$$

Jádro a obor hodnot matic A^*A a AA^*

- Připomeňme

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*) &= \mathbb{C}^m, \qquad \mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^*)\,, \\ \mathcal{N}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A) &= \mathbb{C}^n, \qquad \mathcal{N}(A^*) \perp \mathcal{R}(A)\,. \end{aligned}$$

- Platí

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = r = \dim(\mathcal{R}(A^*))$$

  a proto

$$\dim(\mathcal{R}(AA^*)) = r = \dim(\mathcal{R}(A^*A))\,.$$

Spektrální rozklad A^*A

- **Vztah?** Spektrální rozklad $A^*A \leftrightarrow$ spektrální rozklad AA^*?

Spektrální rozklad A^*A

- **Vztah?** Spektrální rozklad $A^*A \leftrightarrow$ spektrální rozklad AA^*?
- **Předpoklad**: známe spektrální rozklad A^*A, odvodíme spektrální rozklad AA^*.

Spektrální rozklad A^*A

- **Vztah?** Spektrální rozklad $A^*A \leftrightarrow$ spektrální rozklad AA^*?
- **Předpoklad**: známe spektrální rozklad A^*A, odvodíme spektrální rozklad AA^*.
- Označme λ_j vlastní čísla a v_j příslušné ortonormální vlastní vektory A^*A,

$$A^*A\,v_j = \lambda_j\,v_j\,, \qquad \|v_j\| = 1, \qquad j = 1, \ldots, m\,.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme uspořádání

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0\,, \qquad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0\,.$$

Spektrální rozklad A^*A

- **Vztah?** Spektrální rozklad $A^*A \leftrightarrow$ spektrální rozklad AA^*?
- **Předpoklad**: známe spektrální rozklad A^*A, odvodíme spektrální rozklad AA^*.
- Označme λ_j vlastní čísla a v_j příslušné ortonormální vlastní vektory A^*A,

$$A^*A\, v_j = \lambda_j\, v_j\,, \qquad \|v_j\| = 1, \qquad j = 1, \ldots, m\,.$$

  Bez újmy na obecnosti předpokládejme uspořádání

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0\,, \qquad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m = 0\,.$$

- Označíme-li $V \equiv [v_1, \ldots, v_m]$, platí

$$V^*A^*A\,V = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r})\,, \qquad V^*V = I_m\,.$$

Vztahy mezi vlastními čísly a vektory matic A^*A a AA^*

- Dle předchozího platí

$$\begin{aligned}\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_r\} &= \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)\,,\\ \mathrm{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_m\} &= \mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)\,.\end{aligned}$$

- Existuje vztah mezi vlastními vektory A^*A a AA^*?

Vztahy mezi vlastními čísly a vektory matic A^*A a AA^*

- Dle předchozího platí

$$\begin{aligned} \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_r\} &= \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)\,, \\ \mathrm{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_m\} &= \mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)\,. \end{aligned}$$

- Existuje vztah mezi vlastními vektory A^*A a AA^*?

O vlastních vektorech matic A^*A a AA^*

Uvažujme spektrální rozklad matice A^*A. Potom jsou vektory

$$u_j \equiv A v_j / \sqrt{\lambda_j}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

ortonormální vlastní vektory matice AA^* a platí

$$AA^* u_j = \lambda_j u_j, \qquad \|u_j\| = 1, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Spektrální rozklad matice AA^*

- Pro $j = 1, \ldots, r$ platí $\lambda_j \neq 0$,

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \, .$$

Spektrální rozklad matice AA^*

- Pro $j = 1, \ldots, r$ platí $\lambda_j \neq 0$,

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \, .$$

- $u_1, \ldots, u_r \rightarrow$ ortonormální báze $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$.

Spektrální rozklad matice AA^*

- Pro $j = 1, \dots, r$ platí $\lambda_j \neq 0$,

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \, .$$

- $u_1, \dots, u_r \to$ ortonormální báze $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$.
- Doplníme na ortonormální bázi celého prostoru pomocí $u_{r+1}, \dots, u_n \to$ báze $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$.

Spektrální rozklad matice AA^*

- Pro $j = 1, \ldots, r$ platí $\lambda_j \neq 0$,

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \,.$$

- $u_1, \ldots, u_r \to$ ortonormální báze $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$.
- Doplníme na ortonormální bázi celého prostoru pomocí $u_{r+1}, \ldots, u_n \to$ báze $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$.
- Platí

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_r\} &= \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)\,, \\ \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\} &= \mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)\,. \end{aligned}$$

Spektrální rozklad matice AA^*

- Pro $j = 1, \ldots, r$ platí $\lambda_j \neq 0$,

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \, .$$

- $u_1, \ldots, u_r \to$ ortonormální báze $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$.
- Doplníme na ortonormální bázi celého prostoru pomocí $u_{r+1}, \ldots, u_n \to$ báze $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$.
- Platí

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_r\} &= \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A) \, , \\ \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\} &= \mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*) \, . \end{aligned}$$

- Označíme-li $U \equiv [u_1, \ldots, u_n]$, pak

$$U^* AA^* \, U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r}) \, , \qquad U^* U = I_n \, .$$

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^*.

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^*.
- Nalezli jsme ortonormální báze $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$,

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_r\}, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}\,,$$
$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_r\}, \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathrm{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\}\,.$$

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^*.
- Nalezli jsme ortonormální báze $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$,

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_r\}, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_m\}\,,$$
$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_r\}, \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathrm{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}\,.$$

- Z konstrukce $\rightarrow$ nenulová vlastní čísla A^*A a AA^* se rovnají.

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^*.
- Nalezli jsme ortonormální báze $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$,

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_r\}, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_m\}\,,$$
$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_r\}, \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathrm{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}\,.$$

- Z konstrukce $\rightarrow$ nenulová vlastní čísla A^*A a AA^* se rovnají.

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^*.
- Nalezli jsme ortonormální báze $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$,

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_r\}, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_m\},$$
$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_r\}, \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathrm{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}.$$

- Z konstrukce $\rightarrow$ nenulová vlastní čísla A^*A a AA^* se rovnají.

Singulární čísla

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Odmocniny nenulových vlastních čísel matice A^*A nazveme **singulárními čísly** matice A,

$$\sigma_j \;\equiv\; \sqrt{\lambda_j}\,, \qquad j = 1, \ldots, r\,, \qquad r = \mathrm{rank}(A)\,.$$

Spektrální rozklady matic AA^* a A^*A

- Spektrální rozklad $A^*A \Rightarrow$ spektrální rozklad AA^*.
- Nalezli jsme ortonormální báze $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$,

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_r\}, \qquad \mathcal{N}(A) = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}\,,$$
$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_r\}, \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathrm{span}\{u_{r+1}, \dots, u_n\}\,.$$

- Z konstrukce $\rightarrow$ nenulová vlastní čísla A^*A a AA^* se rovnají.

Singulární čísla

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Odmocniny nenulových vlastních čísel matice A^*A nazveme **singulárními čísly** matice A,

$$\sigma_j \;\equiv\; \sqrt{\lambda_j}\,, \qquad j = 1, \dots, r\,, \qquad r = \mathrm{rank}(A)\,.$$

- λ_j by uspořádána sestupně, proto $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0\,.$

Singulární rozklad

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \quad \Rightarrow \quad Av_j = \sigma_j u_j \,, \qquad j = 1, \ldots, r \,.$$

- Zobrazení $\mathbb{C}^m = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ maticí A:

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & \longrightarrow & \sigma_1 \; u_1 \,, \\ Av_2 & \longrightarrow & \sigma_2 \; u_2 \,, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Av_r & \longrightarrow & \sigma_r \; u_r \,, \\ A\{v_{r+1}, \ldots, v_m\} & \longrightarrow & 0 \,. \end{array}$$

Singulární rozklad

$$Av_j = \sqrt{\lambda_j} u_j \quad \Rightarrow \quad Av_j = \sigma_j u_j \,, \qquad j = 1, \ldots, r \,.$$

- Zobrazení $\mathbb{C}^m = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ maticí A:

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & \longrightarrow & \sigma_1 \, u_1 \,, \\ Av_2 & \longrightarrow & \sigma_2 \, u_2 \,, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Av_r & \longrightarrow & \sigma_r \, u_r \,, \\ A\{v_{r+1}, \ldots, v_m\} & \longrightarrow & 0 \,. \end{array}$$

- Maticově

$$AV = U\Sigma \,, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r} \,.$$

Singulární rozklad - matice A^*

- Ekvivalentně,

$$A = U\Sigma V^*, \qquad A^* = V\Sigma^T U^*$$

a analogicky

$$\begin{array}{rcl} A^* u_1 & \longrightarrow & \sigma_1 \; v_1 \,, \\ A^* u_2 & \longrightarrow & \sigma_2 \; v_2 \,, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^* u_r & \longrightarrow & \sigma_r \; v_r \,, \\ A^*\{u_{r+1}, \ldots, u_n\} & \longrightarrow & 0 \,. \end{array}$$

Singulární rozklad - matice A^*

- Ekvivalentně,

$$A = U\Sigma V^*, \qquad A^* = V\Sigma^T U^*$$

a analogicky

$$\begin{array}{rcl} A^*u_1 & \longrightarrow & \sigma_1 \; v_1 \, , \\ A^*u_2 & \longrightarrow & \sigma_2 \; v_2 \, , \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^*u_r & \longrightarrow & \sigma_r \; v_r \, , \\ A^*\{u_{r+1}, \dots, u_n\} & \longrightarrow & 0 \, . \end{array}$$

- $A \to$ vzájemně jednoznačné přiřazení dvojic jednorozměrných podprostorů $\mathrm{span}\{u_j\}$ a $\mathrm{span}\{v_j\}$, $j = 1, \dots, r$.

Singulární rozklad - celkové schema

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A & & A^* & \\
v_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & u_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & v_1\,, \\
v_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & u_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & v_2\,, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_r & \xrightarrow{\sigma_r} & u_r & \xrightarrow{\sigma_r} & v_r\,, \\
\left.\begin{array}{l} v_{r+1} \\ \vdots \\ v_m \end{array}\right\} & \rightarrow 0\,, & \left.\begin{array}{l} u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{array}\right\} & \rightarrow 0\,. &
\end{array}
$$

Geometrická verze singulárního rozkladu

Pro každou matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r existuje ortonormální báze $\{v_1, \dots, v_m\}$ prostoru $\mathbb{C}^m$, ortonormální báze $\{u_1, \dots, u_n\}$ prostoru $\mathbb{C}^n$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ tak, že platí

$$Av_j = \begin{cases} \sigma_j u_j, & j = 1, \dots, r, \\ 0, & j = r+1, \dots, m, \end{cases}$$

$$A^* u_j = \begin{cases} \sigma_j v_j, & j = 1, \dots, r, \\ 0, & j = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

Čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic A^*A a AA^* příslušných vlastním vektorům $\{v_1, \dots, v_r\}$ resp. $\{u_1, \dots, u_r\}$.

Věta o singulárním rozkladu obecné matice

Maticová verze singulárního rozkladu

$\forall\ A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ hodnosti r existují unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ tak, že platí

$$A = U\,\Sigma\,V^*\,, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}\,,$$

kde $\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

- v_j, $j = 1, \ldots, m \to$ **pravé singulární vektory**,
  u_j, $j = 1, \ldots, n \to$ **levé singulární vektory**.

Věta o singulárním rozkladu obecné matice

Maticová verze

Maticová verze singulárního rozkladu

$\forall\ A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ hodnosti r existují unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ tak, že platí

$$A = U\,\Sigma\,V^*\,, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}\,,$$

kde $\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

- v_j, $j = 1, \ldots, m \rightarrow$ **pravé singulární vektory**,
  u_j, $j = 1, \ldots, n \rightarrow$ **levé singulární vektory**.
- SVD $\rightarrow$ *singular value decomposition*.

Věta o singulárním rozkladu obecné matice

Maticová verze

Maticová verze singulárního rozkladu

$\forall\ A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ hodnosti r existují unitární matice $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ tak, že platí

$$A = U\,\Sigma\,V^*\,, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}\,,$$

kde $\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

- $v_j,\ j = 1, \ldots, m \to$ **pravé singulární vektory**,
  $u_j,\ j = 1, \ldots, n \to$ **levé singulární vektory**.
- SVD $\to$ *singular value decomposition*.
- A **reálná** $\to$ existuje **reálný** SVD (A^*A i AA^* jsou reálné symetrické s reálnými ortonormálními vlastními vektory).

Zápisy singulárního rozkladu

Plný a ekonomický zápis

- Rozklad $A = U\Sigma V^*$ s čtvercovými $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ je vhodný především pro teoretické účely (**plný** tvar).

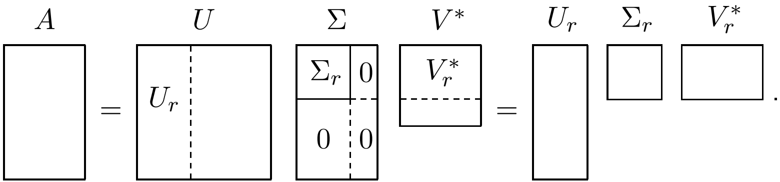
Zápisy singulárního rozkladu

Plný a ekonomický zápis

- Rozklad $A = U\Sigma V^*$ s čtvercovými $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ je vhodný především pro teoretické účely (**plný** tvar).
- Praktické účely $\rightarrow$ **ekonomický** tvar singulárního rozkladu. Označíme-li $U_r \equiv [u_1, \ldots, u_r]$, $V_r \equiv [v_1, \ldots, v_r]$, platí

$$A = U_r\,\Sigma_r\,V_r^*\,,$$

schematicky



(odstraníme násobení nulovými bloky)

Zápisy singulárního rozkladu

Zápis pomocí dyadického rozvoje

- Ekonomický tvar SVD lze zapsat pomocí **dyadického rozvoje**

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \, u_j \, v_j^* = \sum_{j=1}^{r} \, A_j \, , \quad A_j \equiv \sigma_j \, u_j \, v_j^* \, .$$

- Ekonomický tvar SVD lze zapsat pomocí **dyadického rozvoje**

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \, u_j \, v_j^* = \sum_{j=1}^{r} \, A_j \, , \quad A_j \equiv \sigma_j \, u_j \, v_j^* \, .$$

- j-tý vnější součin $A_j = \sigma_j u_j v_j^*$ je matice hodnosti jedna, platí

$$\|A_j\| = \|A_j\|_F = \sigma_j \, , \qquad \text{(cvičení)}$$

a proto

$$\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \ldots \geq \|A_r\| > 0 \, .$$

- Ekonomický tvar SVD lze zapsat pomocí **dyadického rozvoje**

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \, u_j \, v_j^* = \sum_{j=1}^{r} A_j \, , \quad A_j \equiv \sigma_j \, u_j \, v_j^* \, .$$

- j-tý vnější součin $A_j = \sigma_j u_j v_j^*$ je matice hodnosti jedna, platí

$$\|A_j\| = \|A_j\|_F = \sigma_j \, , \qquad \text{(cvičení)}$$

  a proto

$$\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \ldots \geq \|A_r\| > 0 \, .$$

- Matici A hodnosti r jsme vyjádřili jako součet r matic hodnosti jedna s nerostoucí normou.

Singulární rozklad normální matice

Vztah k spektrálnímu rozkladu

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normální, pro jednoduchost regulární, Schur $\rightarrow$

$$A = Q\Lambda Q^*\,, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

λ_j obecně komplexní, předpokládejme $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

Singulární rozklad normální matice

Vztah k spektrálnímu rozkladu

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normální, pro jednoduchost regulární, Schur $\to$

$$A = Q\Lambda Q^*\,, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

λ_j obecně komplexní, předpokládejme $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

-
$$D \equiv \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \ldots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right), \qquad DD^* = D^*D = I\,.$$

$$D^*\Lambda = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) \; = \Lambda D^*\,.$$

Singulární rozklad normální matice

Vztah k spektrálnímu rozkladu

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normální, pro jednoduchost regulární, Schur $\to$

$$A = Q\Lambda Q^*\,, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,,$$

λ_j obecně komplexní, předpokládejme $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

-

$$D \equiv \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \dots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right), \qquad DD^* = D^*D = I\,.$$

$$D^*\Lambda = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \; = \Lambda D^*\,.$$

- Získání singulárního rozkladu A

$$A = (QD)\,(D^*\Lambda)\,Q^* \equiv U\Sigma V^*\,,$$

kde $U \equiv QD$ a $V \equiv Q$ jsou unitární, $\Sigma \equiv D^*\Lambda$ je reálná diagonální matice s kladnými prvky na diagonále.

Singulární rozklad normální matice

Vztah k spektrálnímu rozkladu

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normální, pro jednoduchost regulární, Schur $\to$

  $$A = Q\Lambda Q^*\,, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,,$$

  λ_j obecně komplexní, předpokládejme $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

- $$D \equiv \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \dots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right), \qquad DD^* = D^*D = I\,.$$

  $$D^*\Lambda = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \;= \Lambda D^*\,.$$

- Získání singulárního rozkladu A

  $$A = (QD)\,(D^*\Lambda)\,Q^* \equiv U\Sigma V^*\,,$$

  kde $U \equiv QD$ a $V \equiv Q$ jsou unitární, $\Sigma \equiv D^*\Lambda$ je reálná diagonální matice s kladnými prvky na diagonále.

- Singulární čísla A jsou **absolutní hodnoty** vlastních čísel A.

Outline

Výpočet singulárního rozkladu

a spektrální rozklad matic AA^* a A^*A

- Jeli A obdélníková a **jeden z rozměrů je malý** (uvažujme např. situaci $n \gg m$), může být výhodné použít k výpočtu spektrální rozklad $A^*A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ $\rightarrow$ spočteme v_j a σ_j.

Výpočet singulárního rozkladu

a spektrální rozklad matic AA^* a A^*A

- Jeli A obdélníková a **jeden z rozměrů je malý** (uvažujme např. situaci $n \gg m$), může být výhodné použít k výpočtu spektrální rozklad $A^*A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ $\rightarrow$ spočteme v_j a σ_j.
- Levé singulární vektory u_j (n-prvkové vektory) dopočteme snadno užitím vztahů

$$u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Výpočet singulárního rozkladu
a spektrální rozklad matic AA^* a A^*A

- Jeli A obdélníková a **jeden z rozměrů je malý** (uvažujme např. situaci $n \gg m$), může být výhodné použít k výpočtu spektrální rozklad $A^*A \in \mathbb{C}^{m \times m} \to$ spočteme v_j a σ_j.
- Levé singulární vektory u_j (n-prvkové vektory) dopočteme snadno užitím vztahů

$$u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}, \qquad j = 1, \ldots, r\,.$$

- $n \ll m$ a n je malé $\to$ analogicky.

Výpočet singulárního rozkladu

a spektrální rozklad matic AA^* a A^*A

- Jeli A obdélníková a **jeden z rozměrů je malý** (uvažujme např. situaci $n \gg m$), může být výhodné použít k výpočtu spektrální rozklad $A^*A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ $\rightarrow$ spočteme v_j a σ_j.
- Levé singulární vektory u_j (n-prvkové vektory) dopočteme snadno užitím vztahů

$$u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}\,, \qquad j = 1, \ldots, r\,.$$

- $n \ll m$ a n je malé $\rightarrow$ analogicky.
- Podstatná **nevýhoda**:

$$\kappa(A^*A) = \kappa(AA^*) = \kappa(A)^2\,.$$

Je-li matice A špatně podmíněna, mohou být malá singulární čísla počítaná tímto způsobem určena velmi nepřesně.

1. transformace A na bidiagonální tvar,

$$B = WAQ, \qquad W^*W = I, \quad Q^*Q = I.$$

Unitární transformace $\rightarrow$ **numerická stabilita**.

Výpočet singulárního rozkladu

Standardní způsob

1. transformace A na bidiagonální tvar,

$$B = WAQ, \qquad W^*W = I, \quad Q^*Q = I.$$

   Unitární transformace $\rightarrow$ **numerická stabilita**.

2. singulární rozklad bidiagonální matice (iteračně pomocí implicitního QR algoritmu). Singulární čísla bidiagonální matice **je možné spočíst velmi přesně**, s relativní přesností na úrovni strojové přesnosti.

Výpočetní náročnost výpočtu SVD

Odhad počtu operací, pro jednoduchost čtvercové matice řádu n.

- Jde o iterační proces $\rightarrow$ nemůžeme *a priori* určit přesný počet operací. Předpoklad: iterační proces konverguje velmi rychle – můžeme odhadnout zdola počet operací.

Výpočetní náročnost výpočtu SVD

Odhad počtu operací, pro jednoduchost čtvercové matice řádu n.

- Jde o iterační proces $\rightarrow$ nemůžeme *a priori* určit přesný počet operací. Předpoklad: iterační proces konverguje velmi rychle – můžeme odhadnout zdola počet operací.
- Převod na bidiagonální matici $\rightarrow$ 2-krát více operací než QR.

Výpočetní náročnost výpočtu SVD

Odhad počtu operací, pro jednoduchost čtvercové matice řádu n.

- Jde o iterační proces $\rightarrow$ nemůžeme *a priori* určit přesný počet operací. Předpoklad: iterační proces konverguje velmi rychle – můžeme odhadnout zdola počet operací.
- Převod na bidiagonální matici $\rightarrow$ 2-krát více operací než QR.
- Chceme-li spočíst pouze singulární čísla, nejméně

$$\frac{8}{3}n^3 \quad \text{operací.}$$

Výpočetní náročnost výpočtu SVD

Odhad počtu operací, pro jednoduchost čtvercové matice řádu n.

- Jde o iterační proces $\rightarrow$ nemůžeme *a priori* určit přesný počet operací. Předpoklad: iterační proces konverguje velmi rychle – můžeme odhadnout zdola počet operací.
- Převod na bidiagonální matici $\rightarrow$ 2-krát více operací než QR.
- Chceme-li spočíst pouze singulární čísla, nejméně
$$\frac{8}{3} n^3 \quad \text{operací.}$$
- Chceme-li znát explicitně i U a V, je nutné vynásobit jednotlivé Householderovy reflexe, potřebujeme nejméně
$$\frac{16}{3} n^3 \quad \text{operací.}$$

Výpočetní náročnost výpočtu SVD

Odhad počtu operací, pro jednoduchost čtvercové matice řádu n.

- Jde o iterační proces $\rightarrow$ nemůžeme *a priori* určit přesný počet operací. Předpoklad: iterační proces konverguje velmi rychle – můžeme odhadnout zdola počet operací.
- Převod na bidiagonální matici $\rightarrow$ 2-krát více operací než QR.
- Chceme-li spočíst pouze singulární čísla, nejméně

$$\frac{8}{3}n^3 \quad \text{operací.}$$

- Chceme-li znát explicitně i U a V, je nutné vynásobit jednotlivé Householderovy reflexe, potřebujeme nejméně

$$\frac{16}{3}n^3 \quad \text{operací.}$$

- V většině aplikací je zbytečné provádět explicitní výpočet U a V (stačí je ukládat v implicitním tvaru - ukládají se jen příslušné vektory jež definují Householderovy reflexe).

Outline

Použití singulárního rozkladu

- Ukážeme, jak pomocí SVD určit **hodnost** (rank), **normu** či **podmíněnost** matice, **pseudoinverzi** matice a nalezneme **nejlepší aproximaci** matice pomocí matice nižší hodnosti.

Použití singulárního rozkladu

- Ukážeme, jak pomocí SVD určit **hodnost** (rank), **normu** či **podmíněnost** matice, **pseudoinverzi** matice a nalezneme **nejlepší aproximaci** matice pomocí matice nižší hodnosti.
- Pseudoinverze (Moore-Penroseova zobecněná inverze), je zobecněním inverze čtvercové regulární matice.

Použití singulárního rozkladu

- Ukážeme, jak pomocí SVD určit **hodnost** (rank), **normu** či **podmíněnost** matice, **pseudoinverzi** matice a nalezneme **nejlepší aproximaci** matice pomocí matice nižší hodnosti.
- Pseudoinverze (Moore-Penroseova zobecněná inverze), je zobecněním inverze čtvercové regulární matice.

Definice: Moore-Penroseova pseudoinverze

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a nechť $A = U\Sigma V^* = U_r \Sigma_r V_r^*$ je její singulární rozklad. Matici

$$A^\dagger \equiv V\Sigma^\dagger U^* = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^*, \qquad \Sigma^\dagger \equiv \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

nazveme *Moore-Penroseovou zobecněnou inverzí* matice A (zkráceně pseudoinverze).

Pseudoinverze matice

Ekvivalentní definice, projektory

- $A^\dagger$ splňuje rovnosti (cvičení)

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger\,, \\
A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A\,.
\end{aligned}
$$

Pseudoinverze matice

Ekvivalentní definice, projektory

- $A^\dagger$ splňuje rovnosti (cvičení)

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger A &= A, & \qquad (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger\,,\\
A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & \qquad (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A\,.
\end{aligned}
$$

- $A^\dagger$ je těmito podmínkami určena jednoznačně.

Pseudoinverze matice

Ekvivalentní definice, projektory

- $A^\dagger$ splňuje rovnosti (cvičení)

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger\,, \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A\,. \end{aligned}$$

- $A^\dagger$ je těmito podmínkami určena jednoznačně.
- Máme **dvě ekvivalentní definice** pseudoinverze matice A.

Pseudoinverze matice

Ekvivalentní definice, projektory

- $A^\dagger$ splňuje rovnosti (cvičení)

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger\,,\\
A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A\,.
\end{aligned}
$$

- $A^\dagger$ je těmito podmínkami určena jednoznačně.
- Máme **dvě ekvivalentní definice** pseudoinverze matice A.
- Z definice pseudoinverze plyne

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger &= U_r\Sigma_r V_r^* V_r \Sigma_r^{-1} U_r^* = U_r U_r^*,\\
A^\dagger A &= V_r \Sigma_r^{-1} U_r^* U_r \Sigma_r V_r^* = V_r V_r^*.
\end{aligned}
$$

Pseudoinverze matice

Ekvivalentní definice, projektory

- $A^\dagger$ splňuje rovnosti (cvičení)

$$\begin{aligned} AA^\dagger A = A, \qquad & (AA^\dagger)^* = AA^\dagger\,, \\ A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \qquad & (A^\dagger A)^* = A^\dagger A\,. \end{aligned}$$

- $A^\dagger$ je těmito podmínkami určena jednoznačně.
- Máme **dvě ekvivalentní definice** pseudoinverze matice A.
- Z definice pseudoinverze plyne

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= U_r\Sigma_r V_r^* V_r \Sigma_r^{-1} U_r^* = U_r U_r^*, \\ A^\dagger A &= V_r \Sigma_r^{-1} U_r^* U_r \Sigma_r V_r^* = V_r V_r^*. \end{aligned}$$

- $AA^\dagger = U_r U_r^*$ je **ortogonálním projektorem** na $\mathcal{R}(A)$.
  $A^\dagger A = V_r V_r^*$ je **ortogonálním projektorem** na $\mathcal{R}(A^*)$.

Jiné vyjádření pseudoinverze

Pseudoinverze matic s plnou sloupcovou (řádkovou) hodností

Věta

Uvažujme matici $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Je-li $n \geq m$ a $\operatorname{rank}(A) = m$, potom

$$A^\dagger = (A^* A)^{-1} A^*.$$

Naopak, je-li $n < m$ a $\operatorname{rank}(A) = n$, potom $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$. ✎

- Je-li A čtvercová regulární matice, potom platí $A^\dagger = A^{-1}$.

Outline

Normy a singulární čísla

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a nechť $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ jsou její singulární čísla. Potom platí

$$\|A\| = \sigma_1 \,, \qquad \|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_r^2)^{1/2}$$

a navíc

$$\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r}\,\|A\| \,.$$

Podmíněnost matice

a singulární čísla

- Podmíněnost čtvercové regulární matice

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \, .$$

Jelikož $\|A\| = \sigma_1$ a $\|A^{-1}\| = \sigma_n^{-1}$, je

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \, .$$

Podmíněnost matice

a singulární čísla

- Podmíněnost čtvercové regulární matice

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \, .$$

Jelikož $\|A\| = \sigma_1$ a $\|A^{-1}\| = \sigma_n^{-1}$, je

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \, .$$

- Zobecnění na obdélníkové matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n \geq m$ s plnou sloupcovou hodností, $\mathrm{rank}(A) = m$,

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \, .$$

Outline

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ je matice hodnosti r a nechť je dáno přirozené číslo $k < r$. Cíl: nalézt matici $B_k \in \mathbb{C}^{n \times m}$ tak, že

$$\operatorname{rank}(B_k) = k \quad \text{a} \quad \|A - B_k\| = \min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \operatorname{rank}(X) = k}} \|A - X\| \, .$$

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ je matice hodnosti r a nechť je dáno přirozené číslo $k < r$. Cíl: nalézt matici $B_k \in \mathbb{C}^{n \times m}$ tak, že

$$\operatorname{rank}(B_k) = k \quad \text{a} \quad \|A - B_k\| = \min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \operatorname{rank}(X) = k}} \|A - X\| \,.$$

Lemma

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ hodnosti r a nechť k je přirozené číslo, $k < r$. Pro každou matici $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\operatorname{rank}(X) = k$, platí

$$\|A - X\| \geq \sigma_{k+1},$$

kde σ_{k+1} je $(k+1)$ní singulární číslo matice A. ✎

Aproximace maticí nižší hodnosti

Věta: Eckart, Young, Mirsky

Nechť je dána matice $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ hodnosti r a nechť k je přirozené číslo, $k < r$. Uvažujme singulární rozklad matice A,

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \, u_j \, v_j^* \, .$$

Potom je matice

$$A^{(k)} \equiv \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \, u_j \, v_j^*$$

nejlepší aproximací matice A hodnosti k a platí

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{n\times m} \\ \mathrm{rank}(X)=k}} \|A - X\| \; = \; \|A - A^{(k)}\| \; = \; \sigma_{k+1} \, .$$

Outline

Numerická hodnost matice

- Řekneme, že A má **numerickou hodnost** k, pokud A má k singulárních čísel výrazně větších než strojová přesnost ϵ a ostatní singulární čísla jsou úměrná ϵ

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_k \gg \sigma_{k+1} \approx \mathbf{u}.$$

Numerická hodnost matice

- Řekneme, že A má **numerickou hodnost** k, pokud A má k singulárních čísel výrazně větších než strojová přesnost ϵ a ostatní singulární čísla jsou úměrná ϵ

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_k \gg \sigma_{k+1} \approx \mathbf{u}.$$

- Není přitom kvantifikováno, co znamená, že je singulární číslo úměrné $\mathbf{u}$. Matlab $\rightarrow$ numerická hodnost matice je dána počtem singulárních čísel matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ větších než

$$\epsilon \, \|A\| \, \max\{n, m\}.$$

Numerická hodnost matice

- Řekneme, že A má **numerickou hodnost** k, pokud A má k singulárních čísel výrazně větších než strojová přesnost ϵ a ostatní singulární čísla jsou úměrná ϵ

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_k \gg \sigma_{k+1} \approx \mathbf{u}.$$

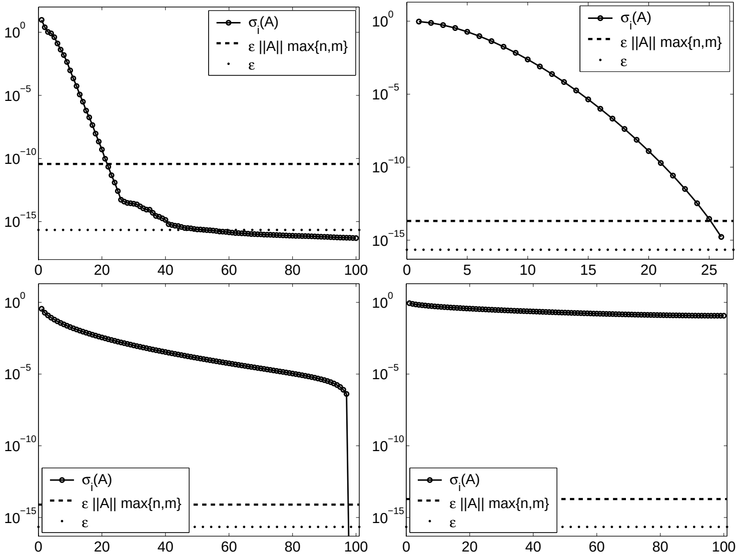
- Není přitom kvantifikováno, co znamená, že je singulární číslo úměrné $\mathbf{u}$. Matlab $\rightarrow$ numerická hodnost matice je dána počtem singulárních čísel matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ větších než

$$\epsilon \, \|A\| \, \max\{n, m\}.$$

- Příklady: krylovovská matice s normalizovanými sloupci,

$$\left[\frac{w}{\|w\|}, \frac{Bw}{\|Bw\|}, \ldots, \frac{B^{m-1}w}{\|B^{m-1}w\|} \right] \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

kde $m = 100$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Butterfly Gyro, kolekce Oberwolfach.



krylovovské matice (vlevo nahoře), `paralax(100)` (vpravo nahoře), `heat(100,1)` (vlevo dole), `heat(100,5)` (vpravo dole).

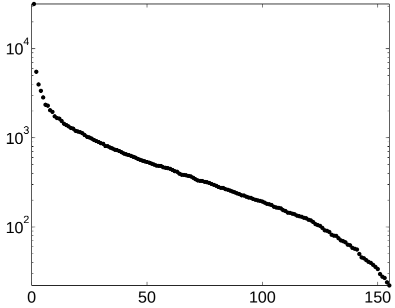
Outline

Použití SVD na kompresi dat

Fotografie a matice

- Fotografie = matice. Černobílá = 1 matice, barevná $\rightarrow$ 3 barevné kanály 3 matice.

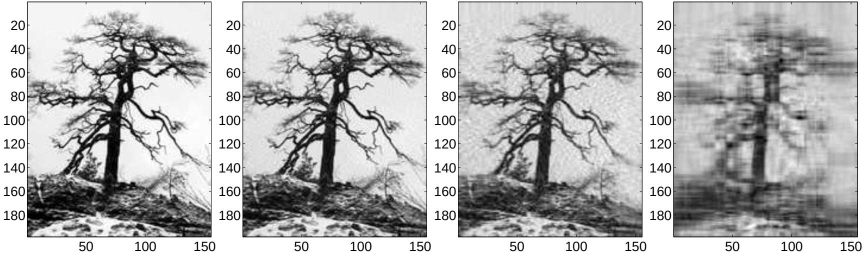
- Fotografie = matice. Černobílá = 1 matice, barevná → 3 barevné kanály 3 matice.
- Příklad: černobílá fotografie stromu → matice $A \in \mathbb{R}^{198\times 155}$, plná sloupcovou hodnost, singulární čísla



$$A^{(k)} \equiv \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \, u_j \, v_j^T \,, \quad k = 1, \dots, 155$$

Použití SVD na kompresi dat

Aproximace fotografie



Matice	co ukládáme	počet ukládaných čísel	paměť
A	$U_{155}, V_{155}, \sigma_{1,\dots,155}$	$(198+155+1)\times 155$	428 Kb
$A^{(86)}$	$U_{86}, V_{86}, \sigma_{1,\dots,86}$	$(198+155+1)\times 86$	237 Kb
$A^{(40)}$	$U_{40}, V_{40}, \sigma_{1,\dots,40}$	$(198+155+1)\times 40$	110 Kb
$A^{(10)}$	$U_{10}, V_{10}, \sigma_{1,\dots,10}$	$(198+155+1)\times 10$	27.6 Kb

Outline

Cvičení

5.1 Dokažte, že pro libovolnou komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ platí

$$\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A), \qquad \mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*).$$

5.2 Dokažte, že pro libovolnou komplexní matici $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ platí

$$\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*), \qquad \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A).$$

5.3 Dokažte

$$\|A_j\| = \|A_j\|_F = \sigma_j\,, \quad \text{kde} \quad A_j = \sigma_j u_j v_j^*.$$

5.4 Dokažte

$$\|A\| = \sigma_1$$

přímo z definice maticové normy.

Cvičení

5.5 Odvoďte vztah mezi spektrálním a singulárním rozkladem matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ v následujících případech:

1. A je hermitovská,
2. A je hermitovská a navíc pozitivně semidefinitní.

5.7 Ukažte, že $A^\dagger$ splňuje tzv. Moore-Penroseovy podmínky:

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger\,, \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A\,. \end{aligned}$$

5.9 Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n < m$, je matice s lineárně nezávislými řádky. Ukažte, že platí $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$.

5.10 Dokažte, že každá regulární matice A s podmíněností rovnou jedné je normální a je (nenulovým) skalárním násobkem unitární matice.