Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Při výpočtu limit nepoužívejte l'Hospitalovo pravidlo.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	7	**Celkem bodů**
Bodů	10	10	10	10	20	20	20	100
Získáno								

[10] 1. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$.

Řešení:
Derivaci spočteme pomocí věty o derivaci složené funkce. Přímočarý výpočet dává

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \cos u \bigg|_{u=\cos(\cos x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} \cos v \bigg|_{v=\cos x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = [-\sin(\cos(\cos x))] [-\sin(\cos x)] [-\sin x]$$
$$= -\sin(\cos(\cos x)) \sin(\cos x) \sin x.$$

[10] 2. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{\sinh x}$.

Řešení:
Postupujeme opět podle věty o derivaci složené funkce. Přímočarý výpočet dává

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \frac{1}{u} \bigg|_{u=\sinh x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \left[-\frac{1}{\sinh^2 x}\right] [\cosh x] = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}.$$

[10] 3. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x$ v bodě $x = 1$.

Řešení:
Vzorec pro tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = x_0$ je

$$y = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0),$$

derivaci funkce $f(x)$ snadno spočteme, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -2\mathrm{e}^{-2x} + 1$, a dosadíme do vzorce,

$$y = \left(\mathrm{e}^{-2} + 1\right) + \left(-2\mathrm{e}^{-2} + 1\right)(x - 1).$$

[10] 4. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin a}}{x - a},$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Řešení:
Při výpočtu postupujeme takto

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{\sin a - \sin x}{\sin x \sin a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sin x \sin a} \frac{2\cos\left(\frac{a+x}{2}\right)\sin\left(\frac{a-x}{2}\right)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\cos\left(\frac{a+x}{2}\right)}{\sin x \sin a} \frac{\sin\left(\frac{a-x}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = -\frac{\cos a}{\sin^2 a},$$

přičemž jsme využili součtové vzorce pro funkci $\sin x$, větu o limitě součinu a známou limitu $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. (Případně si můžeme povšimnout, že limita je totožná s diferenčním podílem pro derivaci funkce $\frac{1}{\sin x}$ v bodě a, a výsledek dostaneme okamžitě z věty o derivování složené funkce.)

[20] 5. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos x}.$$

Řešení:

Při výpočtu postupujeme takto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{x-\frac{\pi}{4}}+\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}} = 1,$$

přičemž jsme využili větu o limitě součinu/součtu a větu o limitě složené funkce a známé limity $\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

[20] 6. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan x\right).$$

Řešení:

Při výpočtu postupujeme takto

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{1-\frac{2}{\pi}\arctan x}\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan x\right)x$$
$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x = \left|\begin{matrix} y=\frac{\pi}{2}-\arctan x \\ x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\end{matrix}\right| = \frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0+} y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0+} y\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}$$
$$= \frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0+}\frac{y}{\sin y}\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \frac{2}{\pi},$$

přičemž jsme využili součtové vzorce pro goinimetrické funkce, větu o limitě součinu/součtu a větu o limitě složené funkce a známou limitu $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

[20] 7. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi\sin x+x^2}-e^{x^2}}{\sin x}.$$

Řešení:

Při výpočtu postupujeme takto

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi\sin x+x^2}-e^{x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi\sin x+x^2}-e^{x^2}}{x}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\pi\sin x+x^2}-1}{x}-\frac{e^{x^2}-1}{x}\right)\frac{x}{\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\pi\sin x+x^2}-1}{\pi\sin x+x^2}\frac{\pi\sin x+x^2}{x}-\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x^2}{x}\right)\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin x+x^2}{x} = \pi,$$

přičemž jsme využili větu o limitě součinu/součtu a větu o limitě složené funkce a známé limity $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$, $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.