

Jméno: \_\_\_\_\_

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem bodů
Bodů	20	20	20	20	20	100
Získáno						

[20] 1. Buď  $z \in \mathbb{C}$  komplexní číslo,  $z =_{\text{def}} \frac{1}{1+i}$ . Najděte reálnou a imaginární část čísla  $z$ ,  $\Re(z)$  a  $\Im(z)$ , jeho velikost  $|z|$  a číslo komplexně sdružené  $\bar{z}$ .

[20] 2. Uvažujte funkci

$$f(x) =_{\text{def}} \sin(\ln(x^2) - \ln|x|).$$

1. Určete definiční obor funkce  $f$ .
2. Rozhodněte, zda je funkce  $f$  na svém definičním oboru lichá, nebo sudá, nebo ani lichá ani sudá.
3. Rozhodněte, zda je funkce  $f$  na svém definičním oboru periodická. Pokud ano, najděte nejmenší periodu.
4. Rozhodněte, zda je funkce  $f$  na svém definičním oboru omezená, či neomezená.

[20] 3. Metodou matematické indukce dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

V průběhu důkazu by vám mohl být užitečný následující poznatek

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

(Tento vztah *nedokazujte!*)

[20] 4. Uvažujte množinu

$$M =_{\text{def}} \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| < |x| \leq 2\}.$$

Najděte  $\sup M$  a  $\inf M$ . Výsledek odůvodněte. (Úkol najít supremum a infimum intervalu považujte pro účely tohoto příkladu za primitivní konstrukci, kterou není třeba rozebírat.)

[20] 5. Uvažujte množinu

$$M =_{\text{def}} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Najděte  $\sup M$  a  $\inf M$ . Výsledek pečlivě odůvodněte.