Termín pro odevzdání: čtvrtek 12. prosince 2019

1. Spočtěte
   - $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,
   - $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$,
   - $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Rozmyslete si, pro jaká x jsou dané výrazy definované, a jak se to projeví při výpočtu.

2. Spočtěte
   - $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$
   - $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
   - $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

   Rozmyslete si, pro jaká x jsou dané výrazy definované, a jak se to projeví při výpočtu. Ujistěte se, že pokud zvládáte spočíst výše uvedené integrály, tak pro vás není problém spočíst i obecnější integrály typu

   $$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

   kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou daná reálná čísla.

3. Spočtěte

   $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

   (Opět se zamyslete nad definičním oborem.)

4. Ukažte, že platí

   $$\int_{x=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4+3\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

   Nejprve použijte substituci $u = \cot\frac{x}{2}$, a rozmyslete si, že tuto substituci lze použít na celém intervalu $(0, 2\pi)$. Poté se vraťte zpět k výpočtu, který jsme provedli na cvičení, a opravte ho. To jest použijte substituci $u = \tan\frac{x}{2}$ a zkoumejte jakým způsobem tato substituce selže a jakým způsobem lze toto selhání napravit. (Klíčem ke správnému výpočtu je rozdělit použití substituce na interval $(0, \pi)$ a na interval $(\pi, 2\pi)$, a následné "nalepení" primitivních funkcí na těchto intervalech tak, abychom dostali primitivní funkci, která je spojitá na celém intervalu $(0, 2\pi)$.)

   Připomínám, že určitý integrál je definován jako

   $$\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x =_{\mathrm{def}} \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

   kde F je primitivní funkce k f, aneb platí $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$.

Termín pro odevzdání: čtvrtek 21. listopadu 2019

1. Ukažte, že

   $$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

   Napište si definici funkce $\sinh x = y$, $y =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, a rovnici vyřešte pro x. Nápovědu lze případně najít na internetových stránkách přednášejícího v zápiscích z přednášky.

2. Odvoďte vzorec pro derivaci funkce $\operatorname{arctanh} x$. (Funkce $\operatorname{arctanh} x$ je inverzní funkce k funkci $\tanh x$, která je definována jako $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.) Dejte si pozor na definiční obor! Napište, na jakém inervalu vámi odvozený vzorec platí.

3. Najděte obecnou rovnici tečny ke kružnici o poloměru R v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}} & \frac{R}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\top$.

4. Spočtěte

   $$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos a}}{x-a},$$

   kde $a \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené kladné reálné číslo takové, že $\cos a \neq 1$.

5. Spočtěte

   $$\lim_{x\to 0+} \left(x + \mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Cvičení ve čtvrtek 28. listopadu 2019 odpadá. Na cvičení ve čtvrtek 5. prosince 2019 budeme psát druhou zápočtovou písemnou práci. Obsahem práce bude výpočet limit a derivací.

Termín pro odevzdání: čtvrtek 21. listopadu 2019

1. Spočtěte
$$\lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x-a},$$
kde $a \in \mathbb{R}^+$ je pevně zvolené kladné reálné číslo.
2. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Termín pro odevzdání: čtvrtek 14. listopadu 2019

1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2},$$
kde $a \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené reálné číslo. Příklad se pokuste vyřešit jednak hrubou silou s použitím součtových vzorců, a dále také s použitím difrenčního podílu pro *druhou* derivaci, viz cvičení.
2. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}.$$
(Při výpočtu by se vám opět mohly hodit součtové vzorce pro goniometrické funkce.)

Termín pro odevzdání: čtvrtek 7. listopadu 2019

1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}.$$
2. Spočtěte
$$\lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$
kde $a \in \mathbb{R}^+$ je pevné kladné reálné číslo.
3. [Nepovinné] Navštivte počítačovou laboratoř, spusťte si software pro symbolické výpočty `Wolfram Mathematica`, a přesvědčte se, že jste předchozí limity spočetli správně. Příkaz, který hledáte je:

```
Assuming[a > 0, Limit[(Sqrt[x] - Sqrt[a] + Sqrt[x - a])/Sqrt[(x^2 - a^2)], x -> a]]
```

Software `Wolfram Mathematica` si můžete nainstalovat i na vlastní počítač, MFF UK má pro studenty zakoupenou neomezenou licenci, pokyny k instalaci najdete na internetových stránkách Matematického ústavu. Pokud jsou mezi vámi příznivci mikropočítačů Raspberry Pi, pak vězte, že `Wolfram Mathematica` je k dispozici zdarma na všech těchto počítačích, podrobnosti najdete zde.

Termín pro odevzdání: čtvrtek 31. října 2019

1. Připomeňte si vzorec
$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$
a binomickou větu a spočtěte limity:
   - $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$,
   - $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-(1+x)^n}{x}$
   - $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-(1+x)^{\frac{1}{n}}}{x}$
   - $\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{\frac{1}{m}}(1+bx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}$

   kde $m, n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Při výpočtu *nepoužívejte* l'Hospitalovo pravidlo. Proč? Uvědomte si, že l'Hospitalovo pravidlo po vás vyžaduje schopnost spočíst derivaci, což je v podstatě limita stejného typu jakou chcete s pomocí l'Hospitalova pravidla spočíst. Abyste tento bludný kruh přetnuli, zjevně musíte být schopní nějaké limity spočíst bez použití tohoto pravidla.

Termín pro odevzdání: čtvrtek 24. října 2019

1. Buďte M a N dvě podmnožiny $\mathbb{R}^2$, $M =_{\mathrm{def}} \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_M| \leq R_M \right\}$, $N =_{\mathrm{def}} \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_N| \leq R_N \right\}$, kde R_Na R_M jsou pevně zadaná kladná reálná čísla, a $\boldsymbol{y}_M$, $\boldsymbol{y}_N$ jsou pevně zadané vektory.
   - Zvolte $R_M = 1$, $R_N = 1$ a $\boldsymbol{y}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{y}_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Nakreslete si množiny M a N v $\mathbb{R}^2$.
   - Zvolte $R_M = 1$, $R_N = 1$ a $\boldsymbol{y}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{y}_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Spočtěte $\sup_{\boldsymbol{x} \in M} \left(\inf_{\boldsymbol{y} \in N} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \right)$.
   - Najděte kladná reálná čísla R_N, R_M a vektory $\boldsymbol{y}_M$, $\boldsymbol{y}_N$ tak, aby $\sup_{\boldsymbol{x} \in M} \left(\inf_{\boldsymbol{y} \in N} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \right) = 0$.
   - Uvažujte M a N pro obecné R_N, R_M a $\boldsymbol{y}_M$, $\boldsymbol{y}_N$ a předpokládejte, že platí $\sup_{\boldsymbol{x} \in M} \left(\inf_{\boldsymbol{y} \in N} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \right) = 0$. Které z následujících tvrzení platí $M \subset N$ nebo $N \subset M$?

Termín pro odevzdání: čtvrtek 17. října 2019

1. Buď $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná množina, a buďte $f : M \mapsto \mathbb{R}$ a $g : M \mapsto \mathbb{R}$ omezené funkce. Ukažte, že platí
   - $\sup_{x \in M} \left(f(x) + g(x) \right) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$,
   - $\sup_{x \in M} \left(f(x) + g(x) \right) \geq \sup_{x \in M} f(x) + \inf_{x \in M} g(x)$,
   - $\sup_{x \in M} \left(f(x) - g(x) \right) \leq \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} g(x)$.
2. [Nepovinné] Prozkoumejte chování posloupnosti číselné posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$, která je definována takto:
   1. Zvol libovolně $a_0 \in \mathbb{R}$.
   2. Následující prvek posloupnosti a_{k+1} je spočten z předchozího prvku posloupnosti vztahem $a_{k+1} =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{2}{a_k} \right)$.

   Nechte si na počítači spočíst několik členů posloupnosti a „ověřte“ si tak, že k-tý člen posloupnosti, tedy a_k, je pro velké k dobrou aproximací čísla $\sqrt{2}$. Pokud chcete o této posloupnosti vědět víc, podívejte se na náledující internetové stránky Square root algorithms a Newton's iteration.

Termín pro odevzdání: čtvrtek 10. října 2019

1. Prozkoumejte, zda platí následující ekvivalence:

$$\left((\forall x : \varphi(x)) \vee (\forall x : \psi(x)) \right) \overset{?}{\Leftrightarrow} \left(\forall x : \varphi(x) \vee \psi(x) \right)$$
$$\left((\exists x : \varphi(x)) \vee (\exists x : \psi(x)) \right) \overset{?}{\Leftrightarrow} \left(\exists x : \varphi(x) \vee \psi(x) \right)$$

   Pokud si myslíte, že ekvivalence neplatí, pokuste se najít výroky v "běžném jazyce", které mohou posloužit jako jasný protipříklad.
2. Dokažte, že platí:

$$C \smallsetminus (A \cup B) = (C \smallsetminus A) \cap (C \smallsetminus B)$$