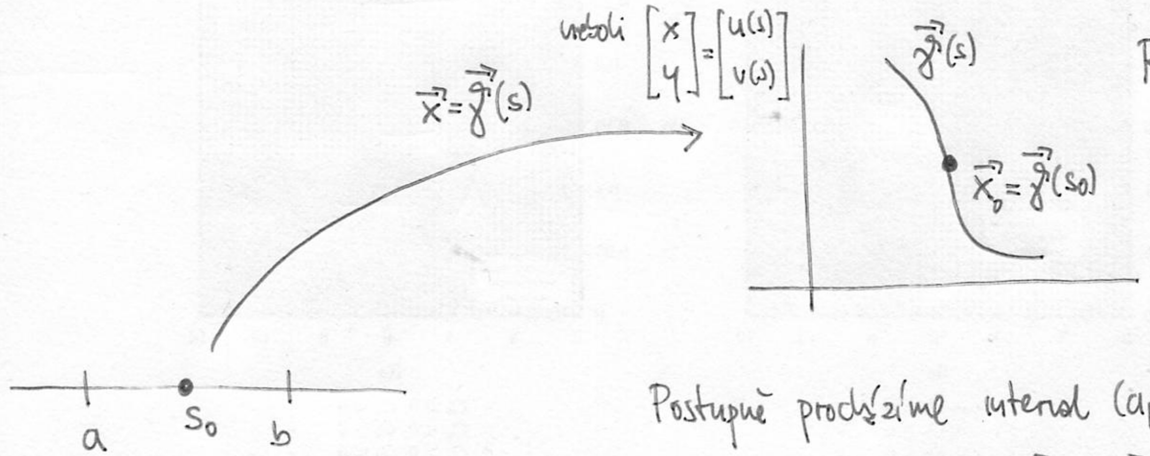
Popis křivky v rovině

Křivka je předpis, který zvoleném číslu (parametrizace křivky, typicky čas) přiřadí bod v rovině.



neboli $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(s_0) \\ v(s_0) \end{bmatrix}$

interval (a,b)

$s \in (a,b)$

↑

parametrizace

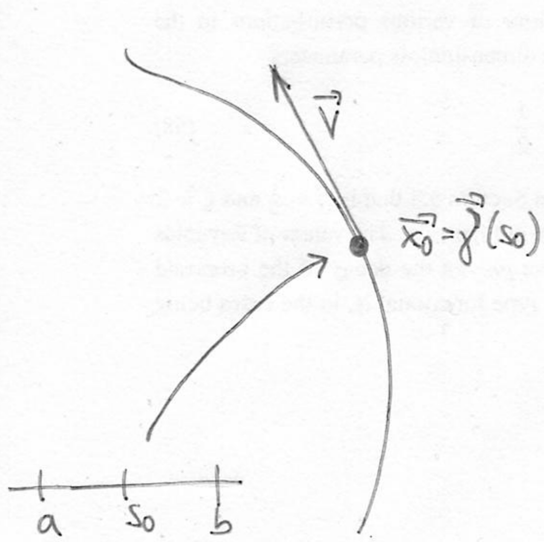
Postupně procházíme interval (a,b) a funkce

$$\vec{\gamma}(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$$

kreslí odpovídající křivku v $\mathbb{R}^2$. (Funkce $u(s)$ a $v(s)$ jsou reálné funkce jedné reálné proměnné. Tyto funkce udávají x-ovou a y-ovou souřadnici příslušného bodu.)

Tečnu ke křivce (tečný vektor) ke křivce $\vec{\gamma}$ v bodě $\vec{x}_0$. Nejprve zjistíme, jaká hodnota parametru s odpovídá bodu $\vec{x}_0$, aneb najdeme s_0 tak, aby platilo

$$\vec{x}_0 = \vec{\gamma}(s_0) \quad \text{neboli} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(s_0) \\ v(s_0) \end{bmatrix}$$



Tečný vektor ke křivce je pak dán vztahem

$$\vec{v} = \left.\frac{d\vec{\gamma}}{ds}\right|_{s=s_0}$$

což znamená (derivujeme po složkách)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0} \\ \left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0} \end{bmatrix}$$

Z tečného vektoru $\vec{v}$ pak snadno určíme parametrickou rovnici tečny

$$(*) \quad x = x_0 + \left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0}(s-s_0) \qquad y = y_0 + \left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0}(s-s_0)$$

Parametrická rovnice tečny ke křivce $\vec{\gamma}(s)$.

Uvědomte si, že tečna je opět křivka určená vztahem

$$\vec{x} = \vec{\gamma}_{tečna}(s)$$

kde $\vec{\gamma}_{tečna}(s)$ je dána předpisem

$$\vec{\gamma}_{tečna}(s) = \begin{bmatrix} x_0 + \left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0}(s-s_0) \\ y_0 + \left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0}(s-s_0) \end{bmatrix}$$

Z parametrické rovnice tečny můžeme přejít k implicitní/obecné rovnici přímky

$$ax + by + c = 0$$

Skutečně, z rovnic (*) plyne, že

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0}} = s - s_0 \qquad \frac{y-y_0}{\left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0}} = s - s_0$$

odkud získáme

$$(x-x_0)\left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0} - (y-y_0)\left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0} = 0$$

což lze také zapsat jako

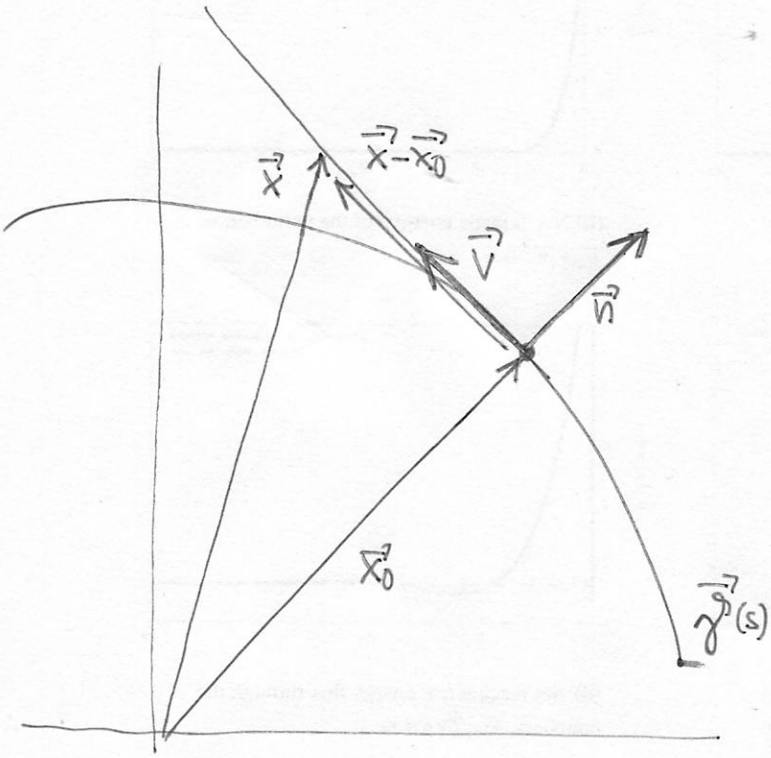
$$(\vec{x} - \vec{x_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

Obecná rovnice tečny ke křivce $\vec{\gamma}(s)$

kde $\vec{x} - \vec{x_0} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$ a $\vec{n}$ je normálový vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} \left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0} \\ -\left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0} \end{bmatrix}$

Normálový vektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} \left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0} \\ -\left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0} \end{bmatrix}$ je skutečně kolmý na tečný vektor $\vec{v}$, neboť

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$



Speciálním případem křivky v rovině je graf funkce $y = f(x)$. V tomto případě je

$$\vec{x} = \vec{\gamma}(s) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ f(s) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \vec{x_0} = \begin{bmatrix} s_0 \\ f(s_0) \end{bmatrix}$$

odkud plyne, že

$$\vec{v} = \left.\frac{d\vec{\gamma}}{ds}\right|_{s=s_0} = \begin{bmatrix} \left.\frac{ds}{ds}\right|_{s=s_0} \\ \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=s_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=s_0} \end{bmatrix}$$

parametrické rovnice tečny jsou tedy

$$x = s$$
$$y = f(s_0) + \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=s_0} (s - s_0)$$

A obecná/implicitní rovnice tečny je tedy

$$y = f(s_0) + \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=s_0} (x - s_0)$$

což můžeme zpět (přeznačit) jako

$$y = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$