Jméno: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	20	20	20	20	20	100
Získáno						

Zápočtová písemná práce určená k domácímu vypracování. Nutnou podmínkou pro získání zápočtu je zisk více jak 50 bodů. Pravidla jsou následující:

1. Příklady řešte samostatně bez cizí pomoci (spolužáci, starší kolegové a podobně).
2. Příklady lze řešit s použitím veškerých dosupných nástrojů (skripta, učebnice, software pro symbolické výpočty jako například Mathematica).
3. Pokud je příklad zadán ve stylu "řešte diferenciální rovnici" a pokud používáte software pro symbolické výpočty, není dovoleno použít funkce typu DSolve. Je naopak dovoleno použít bez dalšího komentáře výstup funkcí typu FourierTransform nebo Integrate. Je nutné explicitně uvést jednotlivé kroky řešení, dílčí výpočty lze svěřit software pro symbolické výpočty.
4. Pokud je příklad zadán ve stylu "najděte Fourierovu transformaci funkce" a pokud používáte software pro symbolické výpočty, není dovoleno použít funkce typu FourierTransform. Je naopak dovoleno použít bez dalšího komentáře výstup funkcí typu Apart, která provádí rozklad na parciální zlomky.
5. Numerická chyba v řešení znamená nulový bodový zisk za daný příklad.
6. Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

[20] 1. Zkoumejte posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ definovanou jako

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{n}, \\ cn^\alpha & -\frac{1}{n} \leq x < 0, \\ -cn^\alpha & 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

Určete hodnotu parametrů $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f_n \to \delta',$$

kde δ' je derivace Dirac distribuce. Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

[20] 2. Pro $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ řešte rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} + k^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \delta,$$

kde δ je Dirac distribuce a $k \in \mathbb{R}^+$ je konstanta. (Pozor, specifikace prostoru, ve kterém hledáte řešení, zde není pro jen okrasu, je to zásadní informace.)

Pozor, v zadání práce rozeslaném 28. prosince bylo namísto věty "kde δ je Dirac distribuce" řečeno "kde δ' je derivace Dirac distribuce". Takovýto komentář je v kontextu zadání příkladu pochopitelně scestný. Zadaní příkladu je v pořádku, to jest na pravé straně rovnice je stutečně Dirac distribuce.

[20] 3. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \sin(\omega x),$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $\omega \in \mathbb{R}^+$, přesně specifikujte v jakém smyslu je v tomto případě Fourierova transformace definována. Abychom se bezpečně shodli na výsledku, tak připomínám, že užíváme následující definici Fourierovy transformace

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme.

[20] 4. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2},$$

kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, přesně specifikujte v jakém smyslu je v tomto případě Fourierova transformace definována. Abychom se bezpečně shodli na výsledku, tak připomínám, že užíváme následující definici Fourierovy transformace

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme.

[20] 5. Najděte Greenovu funkci pro úlohu

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= g, \\
f|_{x=0} &= 0, \\
\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} &= 0,
\end{aligned}
$$

kde g je daná funkce a L je kladná konstanta. (Aneb najděte funkci $G(x, x')$ takovou, že řešení úlohy lze zapsat jako $f(x) = \int_{x'=0}^{L} G(x, x') g(x') \, \mathrm{d}x'$.) S použitím této Greenovy funkce pak řešte úlohu

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= h, \\
f|_{x=0} &= a, \\
\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} &= b,
\end{aligned}
$$

kde a, b jsou konstanty a h je daná funkce.