Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	20	20	20	10	30	100
Získáno						

Zápočtová písemná práce určená k domácímu vypracování. Nutnou podmínkou pro získání zápočtu je zisk více jak 50 bodů. Pravidla jsou následující:

1. Příklady řešte samostatně bez cizí pomoci (spolužáci, starší kolegové a podobně).
2. Příklady lze řešit s použitím veškerých dosupných nástrojů (skripta, učebnice, software pro symbolické výpočty jako například Mathematica).
3. Pokud je příklad zadán ve stylu "řešte diferenciální rovnici" a pokud používáte software pro symbolické výpočty, není dovoleno použít funkce typu DSolve. Je naopak dovoleno použít bez dalšího komentáře výstup funkcí typu FourierTransform nebo Integrate. Je nutné explicitně uvést jednotlivé kroky řešení, dílčí výpočty lze svěřit software pro symbolické výpočty.
4. Pokud je příklad zadán ve stylu "najděte Fourierovu transformaci funkce" a pokud používáte software pro symbolické výpočty, není dovoleno použít funkce typu FourierTransform. Je naopak dovoleno použít bez dalšího komentáře výstup funkcí typu Apart, která provádí rozklad na parciální zlomky.
5. Numerická chyba v řešení znamená nulový bodový zisk za daný příklad.
6. Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

[20] 1. S použitím Laplaceovy transformace najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 2f = 2$$

na intervalu $(0, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} f|_{x=0} &= 0, \\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

[20] 2. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + |\boldsymbol{x}|^2}.$$

Abychom se bezpečně shodli na výsledku, tak připomínám, že užíváme následující definici Fourierovy transformace

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme.

[20] 3. S pomocí Fourierovy transformace vyřešte pro $x \in \mathbb{R}$ parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u,$$

kde k a γ jsou kladné konstanty, a počáteční podmínka je

$$u(x,t)|_{t=0} = f(x).$$

Nejprve odvoďte obecný vzorec pro řešení úlohy. (Obecné řešení je dáno prostřednictvím konvolučního integrálu.) Pro speciální počáteční podmínku

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

pak najděte explicitní předpis pro funkci $u(x,t)$.

[10] 4. Spočtěte Laplaceovu transformaci funkce

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

[30] 5. Ukažte, že jedním z možných řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - xf = 0,$$

je funkce

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi\right) \mathrm{d}\xi,$$

přičemž integrál v definici je chápán ve smyslu hlavní hodnoty, aneb $f(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{R} \cos\left(\frac{t^3}{3} + x\xi\right) \mathrm{d}\xi$. Ukažte, že pro $x \to +\infty$ platí

$$f(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}.$$